第 59 卷 第 8 期 2010 年 8 月
1000-3290/2010/59(08)/5213-06
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol. 59, No. 8, August, 2010

完整约束力学系统保 Lie 对称性差分格式*

张宏彬[1)†] 吕洪升[2)] 顾书龙[1)]

1)(巢湖学院物理系,巢湖 238000)

2)(巢湖学院数学系,巢湖 238000)

(2009 年 8 月 31 日收到;2009 年 11 月 5 日收到修改稿)

提出一种保完整约束力学系统 Lie 点对称性的差分格式.其具体做法是:首先求出完整约束力学系统的 Lie 点对称群,并将其延拓到离散的差分格点上;其次利用其特征方程找出独立的离散不变量;再应用独立的离散不变量来构造不变量的差分格式,且此差分格式在连续极限下应给出原系统的微分方程;最后给出一个例子,作为本文结果的说明.

关键词: 完整约束力学系统,保 Lie 点对称性,差分格式

PACC: 0320

1. 引 言

十九世纪末,Lie[1]利用 Lie 群研究微分方程的解集变换,如今 Lie 群理论已成为分类和求解微分方程的重要工具[2—4]. 1918 年,Noether[5]研究了力学系统作用量在时空无限小单参数变换群作用下的不变性,建立了 Noether 对称性理论,率先将 Lie 群理论应用于动力学系统. 1981 年,李子平[6]研究了线性非完整系统的 Noether 理论. 1986 年以来,梅凤翔和他的合作者[7—10]系统地研究了约束力学系统的对称性,取得了一些重要的结果. 近 20 年来,研究差分方程的对称性在国际上受到人们的关注. Levi 和 Winternitz[11—13]讨论定义在固定均匀格点上(即格点不变换)差分方程的 Lie 点对称性,并运用其处理微分差分方程,取得一些有意义的结果. Floreanini 和 Vinet[14,15]讨论定义在固定均匀格点上,差分方程的'广义点对称性'(即对称变换同时作用在多个格点上),用其研究线性差分方程或通过变量变换可以线性化的非线性方程问题很有效. Hernandez Heredero[16—18]等考虑定义在固定均匀格点上差分方程的广义对称性(即无限小生成元中包含有导数项的),此思路在处理离散的非线性可积方程(即非线性差分方程拥有 Lax 对)时比较成功. Dorodnitsyn[19—25]等率先讨论将点变换同时变换差分方程的解和格点方程,并在保持原连续系统对称性的前提下(即认为离散后的系统应该与原连续系统有同样的对称性),由对称性来确定方程的差分形式和格点的取法. 近年来,我国学者也开始涉及离散动力学系统对称性研究[26—38]. 本文将微分方程 Lie 对称性逆问题的思想(即由 Lie 对称性来构造不变量微分方程),应用到完整约束力学系统的离散方程中,提出一种保完整约束力学系统 Lie 点对称性的差分格式. 其具体做法是:首先求出完整约束力学系统的 Lie 点对称群,并将其延拓到离散的差分格点上;其次利用其特征方程找出独立的离散不变量;再应用独立的离散不变量来构造不变量的差分格式,且此差分格式在连续极限下应给出原系统的微分方程.

2. 完整约束力学系统的 Lie 对称性

2.1. 完整约束力学系统运动方程

设力学系统所受约束是理想、双面、完整的,其位形由 n 个广义坐标 q_s $(s=1,2,\cdots,n)$ 来确定,则系统的运动微分方程可表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q''_s \quad (s=1,2,\cdots,n), \tag{1}$$

* 国家自然科学基金(批准号:10872037),安徽省自然科学基金(批准号:070416226)资助的课题.

† E-mail:hbzhang2002@eyou.com

其中 $L=L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 为系统的 Lagrange 函数，它由 $L=T-V$ 确定，T 为系统的动能，V 为势函数. $Q''_s=Q''_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 为非势广义力，若 $Q''_s=0$ 或 Q''_s 可被写成广义势函数，即 $Q''_s=\frac{\partial U}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial U}{\dot{q}_s}$，则方程(1) 可被改写成下列形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L'}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial L'}{\partial q_s}=0\quad(s=1,2,\cdots,n),\tag{2}$$

其中 $L'=L+U$，设系统(1)非奇异，即

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_s\partial\dot{q}_k}\right)\neq 0,\tag{3}$$

则从方程(1)可解得全部广义加速度，有

$$E_s=\ddot{q}_s-f_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=0\quad(s=1,2,\cdots,n),\tag{4}$$

2.2. 完整约束力学系统 Lie 点对称性

定义 1 若局域点变换

$$t^*=t+\varepsilon\xi(t,\boldsymbol{q}),\tag{5}$$

$$q_s^*=q_s+\varepsilon\eta_s(t,\boldsymbol{q})\quad(s=1,2,\cdots,n),\tag{6}$$

将系统(4)的解 $q_s(t)$ 变换为解 $q_s^*(t^*)$，则变换(5)，(6)式的全体构成系统(4)的 Lie 点对称群 G，其中 ε 为群参数.

对称群 G 的 Lie 代数 $\boldsymbol{g}$ 可由下面的矢量场构造

$$X=\xi(t,\boldsymbol{q})\frac{\partial}{\partial t}+\eta_s(t,\boldsymbol{q})\frac{\partial}{\partial q_s},\tag{7}$$

对于给定系统(4)的 Lie 点对称群 G 和 Lie 代数 $\boldsymbol{g}$，可通过求解下面的确定方程得到：

$$pr^{(2)}X(E_s)\big|_{E_s=0}=0,\ s=1,2,\cdots,n,\tag{8}$$

其中 $\mathrm{pr}^{(2)}X$ 是矢量场 X 的二阶延拓.

2.3. 完整约束力学系统 Lie 对称性不变量微分方程

如果已知系统(4)的对称矢量场 X，有一套系统的程序，来构造一类二阶常微分方程(不变量微分方程)，所构造的二阶常微分方程与原系统(4)的方程有相同的 Lie 点对称群.

具体步骤是：如已知系统(4)式存在一维 Lie 点对称性矢量场 X，由

$$\mathrm{pr}^{(2)}XI(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}})=0,\tag{9}$$

其中 I 是以 $t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}}$ 为自变量的可微函数，其特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}t}{\xi(t,q_s)}=\frac{\mathrm{d}q_s}{\eta(t,q_s)}=\frac{\mathrm{d}\dot{q}_s}{\eta^{(1)}(t,q_s,\dot{q}_s)}=\frac{\mathrm{d}\ddot{q}_s}{\eta^{(2)}(t,q_s,\dot{q}_s,\ddot{q}_s)},\tag{10}$$

其中

$$\eta^{(1)}=\eta_t+(\eta_{q_s}-\xi_t)\dot{q}_s-\xi_{q_s}(\dot{q}_s)^2,$$

$$\eta^{(2)}=\eta_{tt}+(2\eta_{tq_s}-\xi_{tt})\dot{q}_s+(\eta_{q_sq_s}-2\xi_{tq_s})(\dot{q}_s)^2-\xi_{q_sq_s}(\dot{q}_s)^3+(\eta_{q_s}-2\xi_t)\ddot{q}_s-3\xi_{q_s}\dot{q}_s\ddot{q}_s,$$

解方程组(10)，可以获得一组基本的不变量

$$I_1(t,q_s),I_2(t,q_s,\dot{q}_s),$$
$$I_3(t,q_s,\dot{q}_s,\ddot{q}_s),$$
$$\frac{\partial I_3}{\partial\ddot{q}_s}\neq 0\quad(s=1,2,\cdots,n),\tag{11}$$

不变量方程可被表示为

$$F(I_1,I_2,I_3)=0,\ \frac{\partial F}{\partial I_3}\neq 0,\tag{12}$$

其中 F 是不变量 I_1,I_2,I_3 的任意函数. 显然方程(12)保留了原系统(4)所具有的 Lie 点对称性. 如已知系统(4)存在两维 Lie 点对称性矢量场 X_1,X_2，则要求所构造的不变量方程对 X_1 和 X_2 均具有不变性，此时有两种情况：

1) 两特征方程

$$\mathrm{pr}^{(2)}X_1I(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}})=0,\tag{13a}$$

$$\mathrm{pr}^{(2)}X_2I(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}})=0,\tag{13b}$$

有一共同的不变量解

$$I=I(t,\boldsymbol{q}_s,\dot{\boldsymbol{q}}_s,\ddot{\boldsymbol{q}}_s)\quad\frac{\partial I}{\partial\ddot{q}_s}\neq 0,\tag{14}$$

则可得由群 $\{X_1,X_2\}$ 生成的强不变量方程为

$$F(I)=0,\tag{15}$$

其中 F 是不变量 I 的任意函数.

2) 两特征方程没有共同的不变量解时，由下面的方程：

$$\mathrm{pr}^{(2)}X_iF(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}})\big|_{F=0}=0\quad i=1,2,\tag{16}$$

获得一弱不变量方程.

3. 完整约束力学系统的保 Lie 对称性差分格式

3.1. 离散完整约束力学系统 Lie 对称性

完整约束系统被离散化后，由下面两个差分方程描述

$$F(t_{n-1},t_n,t_{n+1},q_{s,n-1},q_{s,n},q_{s,n+1})=0,\tag{17a}$$

$$\Omega(t_{n-1},t_n,t_{n+1},q_{s,n-1},q_{s,n},q_{s,n+1})=0,\tag{17b}$$

方程(17a)是一个二阶差分方程，在连续极限的情况下应回到原系统的微分方程(4)；另一个方程(17b)给出离散格点间的关系，在连续极限的情况下应是一个 $0=0$ 的恒等式.

定义 2　如果点变换(5)，(6)式满足下面的确定方程：

$$\mathrm{pr}^{(2)}X_dF(t_{n-1},t_n,t_{n+1},q_{s,n-1},q_{s,n},q_{s,n+1})\Big|_{\substack{F=0\\ \Omega=0}}=0, \tag{18a}$$

$$\mathrm{pr}^{(2)}X_d\Omega(t_{n-1},t_n,t_{n+1},q_{s,n-1},q_{s,n},q_{s,n+1})\Big|_{\substack{F=0\\ \Omega=0}}=0, \tag{18b}$$

则称变换 (5)，(6)式为差分方程(17a)，(17b)的连续 Lie 点对称性. 其中

$$\begin{aligned}\mathrm{pr}^{(2)}X_d =\ &\xi(t_{n-1},q_{s,n-1})\frac{\partial}{\partial t_{n-1}}\\ &+\eta(t_{n-1},q_{s,n-1})\frac{\partial}{\partial q_{s,n-1}}\\ &+\xi(t_n,q_{s,n})\frac{\partial}{\partial t_n}+\eta(t_n,q_{s,n})\frac{\partial}{\partial q_{s,n}}\\ &+\xi(t_{n+1},q_{s,n+1})\frac{\partial}{\partial t_{n+1}}\\ &+\eta(t_{n+1},q_{s,n+1})\frac{\partial}{\partial q_{s,n+1}},\end{aligned} \tag{19}$$

3.2. 完整约束力学系统保 Lie 点对称性差分格式

对完整约束系统(4)，若已知其 Lie 点对称性矢量场(7)式，为了得到保此 Lie 点对称性的差分格式，首先将(7)式延拓到三相邻的差分格点上，得到(19)式.

其次采用特征方程的方法

$$\mathrm{pr}^{(2)}X_dI(t_{n-1},t_n,t_{n+1},q_{s,n-1},q_{s,n},q_{s,n+1})=0, \tag{20}$$

求得一组独立的离散不变量 $I_i(t_{n-1},t_n,t_{n+1},q_{s,n-1},q_{s,n},q_{s,n+1})$ $(i=1,2,\cdots)$；再由独立的离散不变量来构造不变量的差分格式，且此差分格式在连续极限下还原为原完整系统的运动微分方程；显然如此得到的差分格式与原系统的运动微分方程具有同样的 Lie 点对称性.

对完整约束系统(4)，若已知其 Lie 点对称性矢量场有两个或两个以上，为了得到保此 Lie 点对称性的差分格式，首先分别将 Lie 点对称性矢量场延拓到三相邻的差分格点上，利用它们的特征方程，求一组共同的独立离散不变量 $\xi_i(t_{n-1},t_n,t_{n+1},q_{s,n-1},q_{s,n},q_{s,n+1})$ $(i=1,2,\cdots)$；再由这些共同的独立离散不变量来构造不变量的差分格式，同样要求此差分格式在连续极限下还原为原完整系统的运动微分方程.

为了明确上面叙说的程序，下面通过一个具体的例子说明.

4. 举　　例

若一完整力学系统，其函数 $L=\frac{1}{2}\dot q^2$，非势广义力 $Q=-\frac{4}{t}\dot q-\frac{2}{t^2}q$，则系统的运动微分方程可写为

$$\ddot q=-\frac{4}{t}\dot q-\frac{2}{t^2}q, \tag{21}$$

容易求出系统具有下面三个点对称性

$$X_1=\frac{\partial}{\partial t}-\frac{2q}{t}\frac{\partial}{\partial q}, \tag{22a}$$

$$X_2=\frac{1}{t^2}\frac{\partial}{\partial q}, \tag{22b}$$

$$X_3=t\frac{\partial}{\partial t}, \tag{22c}$$

现将(22a)，(22b)和(22c)延拓到三相邻的差分格点上，得到

$$\begin{aligned}\mathrm{pr}^{(2)}X_1=\ &\frac{\partial}{\partial t_{n-1}}-\frac{2q_{n-1}}{t_{n-1}}\frac{\partial}{\partial q_{n-1}}+\frac{\partial}{\partial t_n}\\ &-\frac{2q_n}{t_n}\frac{\partial}{\partial q_n}+\frac{\partial}{\partial t_{n+1}}-\frac{2q_{n+1}}{t_{n+1}}\frac{\partial}{\partial q_{n+1}},\end{aligned} \tag{23a}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{pr}^{(2)}X_2=\ &\frac{1}{(t_{n-1})^2}\frac{\partial}{\partial q_-}+\frac{1}{(t_n)^2}\frac{\partial}{\partial q_n}\\ &+\frac{1}{(t_{n+1})^2}\frac{\partial}{\partial q_{n+1}},\end{aligned} \tag{23b}$$

$$\mathrm{pr}^{(2)}X_3=t_{n-1}\frac{\partial}{\partial t_{n-1}}+t_n\frac{\partial}{\partial t_n}+t_{n+1}\frac{\partial}{\partial t_{n+1}}, \tag{23c}$$

由于(23a)包含 $\frac{\partial}{\partial t_n}$，且系数是常数，显然函数

$$I_1=t_{n+1}-t_n, \tag{24a}$$

$$I_2=t_n-t_{n-1}, \tag{24b}$$

是两个独立的不变量，对 $\mathrm{pr}^{(2)}X_3$ 可被改写成为

$$\begin{aligned}\mathrm{pr}^{(2)}X_3&=t_{n-1}\frac{\partial}{\partial t_{n-1}}+t_n\frac{\partial}{\partial t_n}+t_{n+1}\frac{\partial}{\partial t_{n+1}}\\ &=I_1\frac{\partial}{\partial I_1}+I_2\frac{\partial}{\partial I_2},\end{aligned} \tag{25}$$

虽然 I_1 和 I_2 不是(25)式的不变量，但他们的比 $\xi_1=\frac{I_1}{I_2}=\frac{t_{n+1}-t_n}{t_n-t_{n-1}}$ 却是(25)式的不变量.

另外，

$$\mathrm{pr}^{(2)}X_1 I(t_{n-1},t_n,t_{n+1},q_{n-1},q_n,q_{n+1})$$

$$=\Big(\frac{\partial}{\partial t_{n-1}}-\frac{2q_{n-1}}{t_{n-1}}\frac{\partial}{\partial q_{n-1}}+\frac{\partial}{\partial t_n}-\frac{2q_n}{t_n}\frac{\partial}{\partial q_n}$$

$$+\frac{\partial}{\partial t_{n+1}}-\frac{2q_{n+1}}{t_{n+1}}\frac{\partial}{\partial q_{n+1}}\Big)$$

$$\times I(t_{n-1},t_n,t_{n+1},q_{n-1},q_n,q_{n+1})=0. \tag{26}$$

解特征微分方程可得三个新的不变量

$$I_3=(t_{n+1})^2 q_{n+1}, \tag{27a}$$

$$I_4=(t_n)^2 q_n, \tag{27b}$$

$$I_5=(t_{n-1})^2 q_{n-1}. \tag{27c}$$

下面用 I_1,I_3,I_4 来表示 t_n,t_{n+1},q_n,q_{n+1}. 为此将 $\mathrm{pr}^{(2)}X_2$ 改写为

$$\mathrm{pr}^{(2)}X_2=\frac{1}{(t_n)^2}\frac{\partial}{\partial q_n}+\frac{1}{(t_{n+1})^2}\frac{\partial}{\partial q_{n+1}}$$

$$=\frac{\partial}{\partial I_3}+\frac{\partial}{\partial I_4}, \tag{28}$$

显然

$$J_1=I_3-I_4 \tag{29}$$

是(28)式的不变量.

将 $\mathrm{pr}^{(2)}X_3$ 改写为

$$\mathrm{pr}^{(2)}X_3=t_n\frac{\partial}{\partial t_n}+t_{n+1}\frac{\partial}{\partial t_{n+1}}$$

$$=I_1\frac{\partial}{\partial I_1}+2J_1\frac{\partial}{\partial J_1}, \tag{30}$$

则

$$\xi_2=\frac{J_1}{(I_1)^2} \tag{31}$$

是(30)式的不变量.

同理，可以用 I_2,I_3,I_5 来表示 t_n,t_{n-1},q_n,q_{n-1} 则 $\mathrm{pr}^{(2)}X_1$ 可被改写为

$$\mathrm{pr}^{(2)}X_2=\frac{1}{(t_n)^2}\frac{\partial}{\partial q_n}+\frac{1}{(t_{n-1})^2}\frac{\partial}{\partial q_{n-1}}$$

$$=\frac{\partial}{\partial I_4}+\frac{\partial}{\partial I_5}, \tag{32}$$

显然

$$J_2=I_4-I_5 \tag{33}$$

是(32)式的不变量.

将 $\mathrm{pr}^{(2)}X_3$ 改写为

$$\mathrm{pr}^{(2)}X_3=t_n\frac{\partial}{\partial t_n}+t_{n-1}\frac{\partial}{\partial t_{n-1}}$$

$$=I_2\frac{\partial}{\partial I_2}+2J_2\frac{\partial}{\partial J_2}, \tag{34}$$

则

$$\xi_3=\frac{J_2}{(I_2)^2} \tag{35}$$

是它的不变量.

令 $h_{n+1}=h_+=t_{n+1}-t_n=I_1, h_n=h=t_n-t_{n-1}=I_2$，在 $t=t_n$ 展开 $q_{n\pm1}=q(t_{n\pm1})$，有

$$q_{n+1}=q(t_{n+1})=q(t_n+h_+)$$

$$=q(t)+h_+\dot q+\frac{1}{2!}(h_+)^2\ddot q+O((h_+)^3),$$

$$q_{n-1}=q(t_{n-1})=q(t_n-h)$$

$$=q(t)-h\dot q+\frac{1}{2!}(h)^2\ddot q+O((h)^3),$$

利用 ξ_1,ξ_2,ξ_3 构造函数

$$\frac{2\xi_1}{\xi_1+1}\Big(\xi_2-\frac{\xi_3}{\xi_1}\Big), \tag{36}$$

经计算可得

$$\frac{2\xi_1}{\xi_1+1}\Big(\xi_2-\frac{\xi_3}{\xi_1}\Big)=(t^2\ddot q+4t\dot q+2q)$$

$$+\Big(\frac{1}{3}t^2\dddot q+2t\ddot q+2\dot q\Big)$$

$$\times(h_+-h)+O(h^2), \tag{37}$$

求连续极限有

$$\frac{2\xi_1}{\xi_1+1}\Big(\xi_2-\frac{\xi_3}{\xi_1}\Big)=(t^2\ddot q+4t\dot q+2q), \tag{38}$$

故可得保 Lie 点对称性的差分格式如下：

$$\frac{2\xi_1}{\xi_1+1}\Big(\xi_2-\frac{\xi_3}{\xi_1}\Big)=0, \tag{39a}$$

$$\xi_1=k, \tag{39b}$$

其中 k 为不等于零的常数.

5. 结　　论

本文从原连续完整力学系统微分方程的 Lie 点对称群出发，将其对称性向量场延拓到三相邻的差分格点上，利用它们的特征方程，求得独立的离散不变量，由这些离散不变量来构造不变量的差分格式，并要求所构造的差分格式在连续极限下应回归原系统的微分方程，对完整力学系统，给出了一种保 Lie 点对称性的差分格式，整个思路和过程较为明确，其困难和挑战在于：如何利用所求得的独立离散不变量来构造不变量的差分格式，且保证所构造的差分格式在连续极限下应给出原系统的微分方程，这是应该继续探讨的问题.

[1] Lie S 1889 *Die infinitesimalen Beruhrungstransformationen der Mechanik* (Leipz: Berichte)

[2] Olver P J 1986 *Applications of Lie Groups to differential Equations* (New York: Springer)

[3] Wluman G and Kumei S 1989 *Symmetries and Differential Equations* (Berlin: Springer)

[4] Ibragimov N H 1985 *Transformation Groups Applied to Mathematical Physics* (Boston: Reidel)

[5] Noether A E 1918 *Nachr. Akad. Wiss. Gottingen Math. Phys.* KI **II** 235

[6] Li Z P 1981 *Acta Phys. Sin* **30** 1659 (in Chinese) [李子平 1981 物理学报 **30** 1659]

[7] Luo Y, Zhao Y Y 1986 *J. Beijing Inst. Technol* **6** 41 (in Chinese) [罗 勇、赵跃宇 1986 北京工业学院学报 **6** 41]

[8] Zhao Y Y, Mei F X 1999 *Symmetries and Conserved quantities of Mechanical systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [赵跃宇、梅凤翔 1999 (北京:科学出版社)]

[9] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese)[梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统应用 (北京:科学出版社)]

[10] Mei F X 2004 *Symmetries and Conserved Quantities of Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔 2004 约束力学系统的对称性与守恒量 (北京:北京理工大学出版社)]

[11] Levi D, Winternitz P 1991 *Phys. Lett.* **152A** 335

[12] Levi D, Winternitz P 1993 *J. Math. Phys.* **34** 3713

[13] Levi D, Winternitz P 1995 *Symmetries of Discrete Dynamical Systems. Technical Report* CRM-2312. 1995, *Centre de recherches mathématiques, Université de Motréal*

[14] Floreanini R, Negro J, Nieto L M, Vinet L 1996 *Lett. Math. Phys.* **36** 351

[15] Floreanini R, Vinet L 1995 *J. Math. Phys.* **36** 7024

[16] Hernúndez Heredero R, Levi D 2003 *J. Nonl. Math. Phys.* **10** Suppl **2** 77

[17] Hernúndez Heredero R, Levi D, M A Rodriguez, P Winternitz 2000 *J. Phys.* A:*Math. Gen.* **33** 5025

[18] Hernúndez Heredero R, Levi D, Rodriguez M A, Winternitz P 2001 *J. Phys. A*:*Math. Gen.* **34** 2459

[19] Dorodnitsyn V A 1991 *J. Sov. Math.* **55** 1490

[20] Dorodnitsyn V A 1993 *Dokl. Ak. Nauk.* **328** 678

[21] Dorodnitsyn V A 1994 *Int. J. Mod. Phys.* **C5** 723

[22] Dorodnitsyn V A, Kozlov R 2003 *J. Nonl. Math. Phys.* **10** 16

[23] Dorodnitsyn V A, Kozlov R, Winternitz P 2000 *J. Math. Phys.* **41** 480

[24] Dorodnitsyn V A, Kozlov R, Winternitz. P 2004 *J. Math. Phys.* **45** 336

[25] Dorodnitsyn V A, Winternitz P 2000 *Nonlinear Dynamics.* **22** 49

[26] Fu J L, Chen L Q, Salnalor J, Tang Y F 2006 *Phys. Lett.* A **358** 5

[27] Fu J L, Dai G D, Jiménes S, Tang Y F 2007 *Chin. Phys.* **16** 570

[28] Fu J L, Chen B Y, Tang Y F, Fu H 2008 *Chin. Phys.* B **17** 3942

[29] Fu J L, Chen B Y, Xie F P 2008 *Chin. Phys.* B **17** 4354

[30] Fu J L, Nie N M, Huang J F, Salvador J, Tang Y F, Lius V, Zhao W J 2009 *Chin. Phys.* B **18** 2634

[31] Fu J L, Chen L Q, Chen B Y 2009 *Sci. China* G **39** 1320

[32] Liu R W, Zhang H B, Chen L Q 2006 *Chin. Phys.* **15** 249

[33] Shi S Y, Fu J L, Chen L Q 2008 *Chin. Phys.* B **17** 385

[34] Shi S Y, Fu J L, Huang X H, Chen L Q, Zhang X B 2008 *Chin. Phys.* B **17** 754

[35] Zhang H B, Chen L Q, Gu S L, Liu C Z 2007 *Chin. Phys.* **16** 582

[36] Zhang H B, Chen L Q, Liu R W 2005 *Chin. Phys.* **14** 238

[37] Zhang H B, Chen L Q, Liu R W 2005 *Chin. Phys.* **14** 888

[38] Zhang H B, Chen L Q, Liu R W 2005 *Chin. Phys.* **14** 1031

The Lie point symmetry- preserving difference scheme of holonomic constrained mechanical systems*

Zhang Hong-Bin[1)†] Lü Hong-Sheng[2)] Gu Shu-Long[1)]

1)(*Department of Physics*, *Chaohu College*, *Chaohu* 238000, *China*)

2)(*Department of Mathematics*, *Chaohu College*, *Chaohu* 238000, *China*)

(Received 31 August 2009; revised manuscript received 5 November 2009)

Abstract

In this paper a Lie point symmetry- preserving difference schemes approximating holonomic constrained mechanical systems is presented. The procedure is as follows: Firstly we find the Lie point symmetry groups of the original equation, and prolong them to three points of the lattice. Secondly the discrete invariants are obtained by solving discrete characteristic equations, then the invariant difference scheme is constructed by using these discrete invariants; and this invariants difference scheme will give the original equation under the continuous limit. Finally an example is presented to illustrate the applications of the result.

Keywords: holonomic constrained mechanical systems, Lie point symmetry- preserving, difference scheme

PACC: 0320

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10872037), the Natural Science Foundation of Anhui Province of China (Grant No. 070416226).

† E-mail: hbzhang2002@eyou.com