第 59 卷 第 8 期 2010 年 8 月
1000-3290/2010/59(08)/5219-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 59, No. 8, August, 2010


# 一类广义 Birkhoff 系统的广义正则变换*

李彦敏[1)†]　梅凤翔[2)]

1)(商丘师范学院物理与信息工程系,商丘　476000)

2)(北京理工大学宇航学院力学系,北京　100081)

(2009 年 9 月 26 日收到;2010 年 1 月 5 日收到修改稿)

研究一类广义 Birkhoff 系统的广义正则变换. 建立这类广义 Birkhoff 系统的运动微分方程, 得到了该系统的广义正则变换以及保持广义正则变换的条件. 最后, 举例说明结果的应用.

**关键词:** 广义 Birkhoff 系统, 广义正则变换, 生成函数

**PACC:** 0320

## 1. 引　　言

1978 年 Santilli 建立了 Birkhoff 方程和 Pfaff-Birkhoff 原理[1]. 1983 年 Santilli 进一步研究了 Birkhoff 方程、Birkhoff 方程的变换理论以及 Galilei 相对论的推广等[2]. 文献[3]构造了 Birkhoff 系统动力学的基本框架. 近年来, Birkhoff 系统动力学领域内的研究已取得了一系列重要结果[4—19]. Birkhoff 系统动力学是 Hamilton 力学的自然推广, 可在原子与分子物理, 强子物理中找到应用[1,2]. 文献[20]进一步研究了 Birkhoff 方程增加一个附加项的情形, 并称之为广义 Birkhoff 方程. 由广义 Birkhoff 方程描述的系统称为广义 Birkhoff 系统. 有关广义 Birkhoff 系统的研究已有初步进展, 涉及基本框架[21], 动力学逆问题[22], 积分不变量[23,24], 时间积分定理[25], 以及对称性[20,26]. 因为通常的 Birkhoff 系统不容易构造, 而广义 Birkhoff 方程的实现则较易, 并且有更多的自由度. 因此, 对广义 Birkhoff 系统动力学的研究有重要意义.

变换是物理学和力学研究问题的重要手段. 对于分析动力学问题中直接得到的 Hamilton 正则变换方程来说, 往往很难求解. 因此, 利用变换的方法, 使它变成一个较易求解的微分方程组, 是一个十分重要的研究课题. 正则变换便是达到这一目的的主要工具[27]. 文献[28—31]详细地讨论了 Hamilton 系统的正则变换, 文献[2]指出, Hamilton 正则方程经过正则变换保持不变, 而经过非正则变换则变为 Birkhoff 方程. 文献[2, 3, 32]讨论了 Birkhoff 方程的变换理论. 本文基于文献[2,3,32], 讨论一类特殊的广义 Birkhoff 系统的广义正则变换. 首先, 建立 Birkhoff 方程. 其次, 研究这类特殊广义 Birkhoff 系统的广义正则变换. 最后, 举例说明结果的应用.

## 2. 一类广义 Birkhoff 系统的微分方程

广义 Birkhoff 方程有形式[21]

$$\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial t} + \Lambda_\mu = 0,$$
$$(\mu, \nu = 1, \cdots, 2n), \tag{1}$$

其中 $B = B(t, \boldsymbol{a})$ 为 Birkhoff 函数, $R_\mu = R_\mu(t, \boldsymbol{a})$ 为 Birkhoff 函数组, 而 $\Lambda_\mu = \Lambda_\mu(t, \boldsymbol{a})$ 为附加项. 当 $\Lambda_\mu = 0(\mu = 1, \cdots, 2n)$, 则(1)式成为 Birkhoff 方程.

现在研究一类特殊的广义 Birkhoff 系统. 假定存在某函数 $W = W(t, \boldsymbol{a})$, 使得附加项 $\Lambda_\mu$ 有形式[23]

$$\Lambda_\mu = \frac{\partial W}{\partial a^\mu} \quad (\mu = 1, \cdots, 2n), \tag{2}$$

此时方程(1)表示为

$$\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial a^\mu} = 0. \tag{3}$$

* 国家自然科学基金(批准号: 10772025, 10932002, 10972127), 河南省自然科学基金(批准号: 082300410330, 082300410370, 102300410144)资助的课题.

† E-mail: ynmnl@yahoo.com.cn

令

$$\tilde{B} = B - W, \tag{4}$$

则方程(3)表示为形式

$$\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu - \frac{\partial \tilde{B}}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial t} = 0, \tag{5}$$

函数 $\tilde{B}$ 可称为类 Birkhoff 函数.

## 3. 广义正则变换

方程(5)有类似于 Birkhoff 方程的形式,因此 Birkhoff 系统的广义正则变换理论可应用于广义 Birkhoff 系统(5).

研究 Birkhoff 变量的变换

$$T:\begin{cases} t^* = t, \\ a^{\mu *} = a^{\mu *}(t,\boldsymbol{a}), \end{cases} \tag{6}$$

假设函数 $a^{\mu *}(t,\boldsymbol{a})$ 及其导数在 $t \geqslant t_0$ 是有界的,连续的,并设存在逆变换

$$T^{-1}:\begin{cases} t = t^*, \\ a^\mu = a^\mu(t,\boldsymbol{a}^*). \end{cases} \tag{7}$$

类似于文献[2,3,32]的讨论,广义 Birkhoff 方程(5)变换为

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial R_\nu(t,\boldsymbol{a})}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu(t,\boldsymbol{a})}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu - \frac{\partial \tilde{B}}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial t} \\ &= \frac{\partial a^{\rho *}}{\partial a^\mu}\left\{\left[\frac{\partial R_\sigma^*(t,\boldsymbol{a}^*)}{\partial a^{\rho *}} - \frac{\partial R_\rho^*(t,\boldsymbol{a}^*)}{\partial a^{\sigma *}}\right]\dot{a}^{\sigma *} \right.\\ &\quad \left. - \frac{\partial \tilde{B}^*(t,\boldsymbol{a}^*)}{\partial a^{\rho *}} - \frac{\partial R_\rho^*(t,\boldsymbol{a}^*)}{\partial t}\right\} \\ &= 0 \quad (\mu,\nu,\rho,\sigma = 1,\cdots,2n),\end{aligned} \tag{8}$$

其中

$$R_\rho^*(t,\boldsymbol{a}^*) = \left(\frac{\partial a^\alpha}{\partial a^{\rho *}}R_\alpha\right)(t,\boldsymbol{a}^*),$$

$$\tilde{B}^*(t,\boldsymbol{a}^*) = \left(\tilde{B} - \frac{\partial a^\alpha}{\partial t}R_\alpha\right)(t,\boldsymbol{a}^*)$$

$$(\rho,\alpha = 1,\cdots,2n). \tag{9}$$

如果原来的广义 Birkhoff 方程(5)经过变换(6)而变换为广义 Birkhoff 方程

$$\left(\frac{\partial R_\nu^*(t,\boldsymbol{a}^*)}{\partial a^{\mu *}} - \frac{\partial R_\mu^*(t,\boldsymbol{a}^*)}{\partial a^{\nu *}}\right)\dot{a}^{\nu *} - \frac{\partial \tilde{B}^*(t,\boldsymbol{a}^*)}{\partial a^{\mu *}} - \frac{\partial R_\mu^*(t,\boldsymbol{a}^*)}{\partial t} = 0, \tag{10}$$

则称变换(6)为系统的广义正则变换.

变换(6)为广义正则性的条件就是 Pfaff 作用量在变量变换下的稳定性,即

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\{R_\mu^*(t,\boldsymbol{a}^*)\dot{a}^{\mu *} - \tilde{B}^*(t,\boldsymbol{a}^*)\}\mathrm{d}t = 0, \tag{11}$$

而在原变量下有条件

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\{R_\mu(t,\boldsymbol{a})\dot{a}^\mu - \tilde{B}(t,\boldsymbol{a})\}\mathrm{d}t = 0, \tag{12}$$

因此,变换(5)的广义正则性条件可表示为

$$\begin{aligned}&R_\mu(t,\boldsymbol{a})\mathrm{d}a^\mu - \tilde{B}(t,\boldsymbol{a})\mathrm{d}t - R_\mu^*(t,\boldsymbol{a}^*)\mathrm{d}a^{\mu *} \\ &+ \tilde{B}^*(t,\boldsymbol{a}^*)\mathrm{d}t = \mathrm{d}\Phi,\end{aligned} \tag{13}$$

其中 $\Phi$ 为 $t,\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}^*$ 的任意函数. 已知函数 $\Phi$ 便可单值地确定变换(6). 函数 $\Phi$ 称为生成函数.

对所论系统,由(13)式求得广义正则变换是很困难的. 为找到广义正则变换,可先令 $\tilde{B}^* = 0$,由(9)式求得部分变换,再由(10)和(13)式求得另一部分变换.

## 4. 算 例

下面举例说明上述结果的应用.

二阶广义 Birkhoff 系统有形式

$$\begin{aligned}&R_1 = a^2, R_2 = 0, \\ &B = \frac{a^1 a^2}{t} + \frac{1}{2}(a^1)^2 + \frac{1}{2}(a^2)^2, \\ &\Lambda_1 = a^1, \Lambda_2 = a^2.\end{aligned} \tag{14}$$

对系统(14),有

$$\begin{aligned}&W = \frac{1}{2}(a^1)^2 + \frac{1}{2}(a^2)^2, \\ &\tilde{B} = B - W = \frac{a^1 a^2}{t}.\end{aligned} \tag{15}$$

方程(5)给出

$$-\dot{a}^2 - \frac{a^2}{t} = 0, \quad \dot{a}^1 - \frac{a^1}{t} = 0. \tag{16}$$

令变换后的 Birkhoff 函数 $\tilde{B}^*$ 为零,由(9)式第二式有

$$\tilde{B}^* = \left(\frac{a^1 a^2}{t} - \frac{\partial a^1}{\partial t}a^2\right)(t,a^*) = 0. \tag{17}$$

可取

$$a^1 = t a^{1 *}, \tag{18}$$

由(9)式第一式得

$$R_1^* = \frac{\partial a^1}{\partial a^{1 *}}R_1 + \frac{\partial a^2}{\partial a^{1 *}}R_2$$

$$= \frac{\partial a^1}{\partial a^{1*}} a^2 = t a^2(t, a^*),$$

$$R_2^* = \frac{\partial a^1}{\partial a^{2*}} R_1 + \frac{\partial a^2}{\partial a^{2*}} R_2 = 0. \tag{19}$$

将(17),(19)式代入(13)式,可知满足广义正则性条件. 为求得 $a^2 = a^2(t, a^*)$,可由方程(10)得到

$$\left(\frac{\partial R_2^*}{\partial a^{1*}} - \frac{\partial R_1^*}{\partial a^{2*}}\right)\dot{a}^{2*} - \frac{\partial R_1^*}{\partial t} = 0. \tag{20}$$

由(19),(20)式可找到

$$R_1^* = a^{2*} = t a^2. \tag{21}$$

这样,(18),(21)式就是系统的广义正则变换.

变换后的广义 Birkhoff 方程为

$$\dot{a}^{1*} = 0, \ \dot{a}^{2*} = 0, \tag{22}$$

积分得

$$a^{1*} = C_1, \quad a^{2*} = C_2, \tag{23}$$

即

$$\frac{a^1}{t} = C_1, \quad t a^2 = C_2. \tag{24}$$

于是有

$$a^1 = C_1 t, \quad a^2 = \frac{C_2}{t}. \tag{25}$$

## 5. 结　　论

本文研究的特殊广义 Birkhoff 方程(5)有与 Birkhoff 方程类似的形式. 因此,文献[2,3,32]所讨论的 Birkhoff 系统的正则变换也适用于广义 Birkhoff 系统(5).


[1] Santilli R M 1978 *Foundations of theoretical mechanics* Ⅰ (New York: Springer Verlag)

[2] Santilli R M 1983 *Foundations of Theoretical Mechanics* Ⅱ (New York: Springer Verlag)

[3] Mei F X, Shi R C, Zhang Y F, Wu H B 1996 *Dynamics of Birkhoff Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔、史荣昌、张永发、吴惠彬 1996 Birkhoff 系统动力学 (北京: 北京理工大学出版社)]

[4] Zhang H B 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1837 (in Chinese) [张宏彬 2001 物理学报 **50** 1837]

[5] Guo Y X, Luo S K, Shang M 2001 *Rep. Math. Phys.* **47** 313

[6] Luo S K, Lu Y B, Zhou Q, Wang Y D, Ou Y S 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1913 (in Chinese) [罗绍凯、卢一兵、周　强、王应德、欧阳实 2002 物理学报 **51** 1913]

[7] Shang M, Guo Y X, Mei F X 2007 *Chin. Phys.* **16** 292

[8] Ge W K, Mei F X 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 2476 (in Chinese) [葛伟宽、梅凤翔 2007 物理学报 **56** 2479]

[9] Mei F X, Gang T Q, Xie J F 2006 *Chin. Phys.* **15** 1678

[10] Fu J L, Chen L Q, Luo S K, Chen X W, Wang X M 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2289 (in Chinese) [傅景礼、陈立群、罗绍凯、陈向炜、王新民 2001 物理学报 **50** 2289]

[11] Zhang Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 5374 (in Chinese) [张　毅 2008 物理学报 **57** 5374]

[12] Gu S L, Zhang H B 2004 *Chin. Phys.* **13** 979

[13] Ding N, Fang J H, Chen X X 2008 *Chin. Phys.* B **17** 1967

[14] Chen X W, Zhang R C, Mei F X 2000 *Acta Mech. Sin.* **16** 282

[15] Chen X W, Mei F X 2000 *Mechanics Research Communications* **27** 365

[16] Chen X W 2002 *Chin. Phys.* **11** 441

[17] Li Y M 2008 *J. of Henan Normal University* **36** 52 [李彦敏 2008 河南师范大学学报(自然科学版) **36** 52]

[18] Wang P, Fang J H, Wang X M 2009 *Chin. Phys.* B **18** 1312

[19] Ding G T 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 7431 (in Chinese) [丁光涛 2009 物理学报 **58** 7431]

[20] Mei F X 1993 *Science in China Serie* A **36** 1456

[21] Mei F X, Zhang Y F, He G 2007 *J Beijing Inst. Technol.* **27** 1035 (in Chinese) [梅凤翔、张永发、何　光 2007 北京理工大学学报 **27** 1035]

[22] Mei F X, Xie J F, Gang T Q 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4649 (in Chinese) [梅凤翔、谢加芳、江铁强 2008 物理学报 **57** 4649]

[23] Mei F X, Cai J L 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4657 (in Chinese) [梅凤翔、蔡建乐 2008 物理学报 **57** 4657]

[24] Shang M, Mei F X 2009 *Chin. Phys.* B **18** 3155

[25] Ge W K, Mei F X 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 699 (in Chinese) [葛伟宽、梅凤翔 2009 物理学报 **58** 699]

[26] Zhang Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 7436 (in Chinese) [张　毅 2009 物理学报 **58** 7436]

[27] Mei F X, Liu D, Luo Y 1991 *Advanced analytical mechanics* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) p333 (in Chinese) [梅凤翔、刘　端、罗　勇 1991 高等分析力学 (北京: 北京理工大学出版社) 第 333 页]

[28] Whittaker E T 1937 *A Treatise on Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, Fouth Ed (Cambridge: Cambridge Univ Press)

[29] Lurie A I 1961 *Analyltical Mechanics* (Moscow: GIFML) (in Russian)

[30] José J V, Saletan E J 1998 *Classical Dynanmics* (New York: Cambridge vniv Press)

[31] Papastavridis J G 2002 *Analyltical Mechanics* (New York: Oxford vniv Press)

[32] Galiullin A S, Gafarov G G, Malaishka R P, Khwan A M 1997 *Analytical Dynamics of Helmholtz, Birkhoff and Nambu Systems* (Moscow: UFN) P183 (in Russian)

# Generalized canonical transformations of a kind of generalized Birkhoff systems*

Li Yan-Min[1)†] Mei Feng-Xiang[2)]

1) (*Department of Physics and Information Engineering, Shangqiu Normal College, Shangqiu* 476000, *China*)

2) (*Department of Applied Mechanics, School of Aerospace, Beijing Institute of Technology, Beijing* 100081, *china*)

(Received 26 September 2009; revised manuscript received 5 January 2010)

Abstract

The generalized canonical transformations of a kind of generalized Birkhoff systems are studied in this paper. The differential equations of motion of the generalized Birkhoff systems are estallished. The condition under which the transformations of the system are canonical is obtained. An example is given to illustrate the application of the result.

**Keywords**: generalized Birkhoff system, generalized canonical transformation, generating function

**PACC**: 0320

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10772025, 10932002, 10972127), the Natural Science Foundation of Henan Province, China (Grant Nos. 082300410330, 082300410370, 102300410144).

† E-mail: ynmnl@ yahoo. com. cn