

# 耦合量子点中的纠缠测量\*

王海霞<sup>†</sup> 殷 雯 王芳卫

(中国科学院物理研究所, 北京 100190)

(2009 年 9 月 16 日收到; 2009 年 12 月 10 日收到修改稿)

运用 Gurvitz 提出的求解薛定谔方程的方法并结合数值计算, 分析了两个自旋相反的电子在耦合双量子点中的振荡和纠缠情况, 以及如何利用量子点接触读出纠缠信息. 结果显示两电子通过库伦相互作用形成量子纠缠态. 强库伦作用下, 它们黏在一起运动, 类似于单电子在量子比特中的振荡. 这种情况下, 把量子点接触探测器靠近耦合双量子点, 可以通过探测器的电流变化率读取电子的纠缠信息.

**关键词:** 库伦作用, 纠缠, 测量, 电流变化率

**PACC:** 0365, 0560

## 1. 引 言

随着量子信息技术的高速发展, 近十年无论是在实验上还是在理论上, 介观体系中的量子测量一直都引起了人们的广泛关注<sup>[1-5]</sup>. 到目前为止, 普遍被接受的量子测量仪有三种: 量子点接触, 单电子晶体管和双量子点探测器<sup>[2,3,6,7]</sup>. 由于它们对周围的电荷极其敏感, 因此观察测量仪的电流变化情况就可以知道周围是否有电子存在. Gurvitz 等人采用单电子晶体管或者双量子点探测器来测量固态量子比特<sup>[2,3]</sup>, 发现适当调节测量器的相关参数, 就可以通过流经测量仪的电流判断电子在量子比特中的布居数. 这种布居数的测量前提都是单个电子在介观体系中振荡.

如果有两个甚至多个电子同处一个体系时, 电子之间可以通过一中介发生相互作用, 例如电子间的库伦相互作用<sup>[8]</sup>, 或通过交换光子的过程, 进而形成量子纠缠态. 形成纠缠态的电子在系统中必然有一定的分布规律, 而电子的分布可以通过测量仪器中的电流来反映, 因此测量仪器中的电流应该能反映电子的纠缠信息. 文献[9]利用量子点接触测量了两个有相互作用的 qubit 形成的纠缠. 本文将测量同一个耦合双量子点中自旋相反的电子形成的纠缠.

## 2. 理论模型

所研究的系统(如图 1 所示). 整个系统包括两大部分: 耦合量子点 (DD) 和一个量子点接触 (QPC). 为了研究的方便, 假设每个量子点仅仅有一个能级, 根据泡利不相容原理, 每个能级最多只能有自旋不同的两个电子占据, 电子可以在两个量子点之间振荡. 在左边的量子点附近放置一个量子点接触用来探测电子在耦合量子点中的概率分布情况.

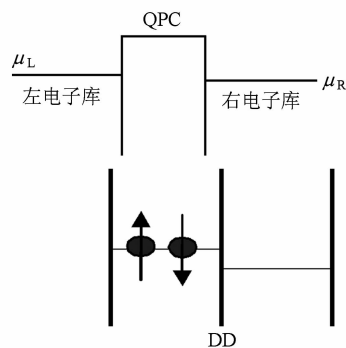


图 1 DD 和 QPC 的示意图. 图中 DD 包含自旋相反的两个电子, 电子在耦合的两量子点中跳跃, 但不能发生自旋的翻转. 一个量子点接触靠近左量子点, 它被用来测量 DD 中电子的纠缠

系统哈密顿量为

\* 国家重点基础研究发展计划(批准号:2010CB33102)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: whx@aphy.iphy.ac.cn

$$H = H_{\text{DD}} + H_{\text{QPC}} + H_{\text{int}}, \quad (1)$$

其中

$$\begin{aligned} H_{\text{DD}} = & \sum_{i\sigma} E_i a_{i\sigma}^{\dagger} a_{i\sigma} + \sum_{\sigma} \Omega_0 (a_{1\sigma}^{\dagger} a_{2\sigma} \\ & + a_{2\sigma}^{\dagger} a_{1\sigma}) + U_1 \sum_i n_{i\uparrow} n_{i\downarrow} \\ & + U_2 \sum_{\sigma_1, \sigma_2} n_{1\sigma_1} n_{2\sigma_2}, \end{aligned} \quad (2)$$

这里,  $i=1, 2$  分别表示左和右两个量子点,  $a_{i\sigma}^{\dagger}$  ( $a_{i\sigma}$ ) 是处于  $i$  量子点自旋为  $\sigma$  的电子的产生(湮没)算符,  $E_i$  是  $i$  量子点的轨道能级.  $\Omega_0$  是两个量子点间的跳跃幅.  $U_1$  和  $U_2$  分别是点内和点之间的库伦相互作用.

QPC 的哈密顿量为

$$\begin{aligned} H_{\text{QPC}} = & \sum_l E_l c_l^{\dagger} c_l + \sum_r E_r c_r^{\dagger} c_r \\ & + \sum_{l,r} \Omega_{lr} (c_r^{\dagger} c_l + c_l^{\dagger} c_r), \end{aligned} \quad (3)$$

这里  $c_l^{\dagger}$  ( $c_l$ ) 和  $c_r^{\dagger}$  ( $c_r$ ) 分别是左、右库中电子的产生(湮没)算符.  $H_{\text{int}}$  给出了 DD 和 QPC 之间的静电相互作用为

$$\begin{aligned} H_{\text{int}} = & \sum_{l,r} \delta\Omega_{lr} a_{l\uparrow}^{\dagger} a_{l\uparrow} (c_r^{\dagger} c_l + c_l^{\dagger} c_r) \\ & + \sum_{l,r} \delta\Omega_{lr} a_{l\downarrow}^{\dagger} a_{l\downarrow} (c_r^{\dagger} c_l + c_l^{\dagger} c_r), \end{aligned} \quad (4)$$

$\delta\Omega_{lr}$  是通过左边量子点增加一个电子而带来的 QPC 的跳跃幅  $\Omega_{lr}$  的变化, 它与电子自旋无关.

假设注入耦合量子点中的是两个自旋不同的电子, 这两个电子在其中振荡, 但不存在自旋的翻转. 在占据态表象下写出系统的波函数为

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle = & \left[ b_1(t) a_{1\uparrow}^{\dagger} a_{1\downarrow}^{\dagger} + b_2(t) a_{1\uparrow}^{\dagger} a_{2\downarrow}^{\dagger} \right. \\ & + b_3(t) a_{1\downarrow}^{\dagger} a_{2\uparrow}^{\dagger} + b_4(t) a_{2\uparrow}^{\dagger} a_{2\downarrow}^{\dagger} \\ & + \sum_{l,r} b_{1lr}(t) a_{1\uparrow}^{\dagger} a_{1\downarrow}^{\dagger} c_r^{\dagger} c_l \\ & + \sum_{l,r} b_{2lr}(t) a_{1\uparrow}^{\dagger} a_{2\downarrow}^{\dagger} c_r^{\dagger} c_l \\ & + \sum_{l,r} b_{3lr}(t) a_{1\downarrow}^{\dagger} a_{2\uparrow}^{\dagger} c_r^{\dagger} c_l \\ & \left. + \sum_{l,r} b_{4lr}(t) a_{2\uparrow}^{\dagger} a_{2\downarrow}^{\dagger} c_r^{\dagger} c_l + \dots \right] |0\rangle, \end{aligned} \quad (5)$$

这里,  $b_j(t)$ ,  $j=1, 2, 3, 4, 1l_r, 2l_r, \dots$  表示系统在  $t$  时刻处于相应状态的概率幅. 例如  $b_{2lr}(t)$  表示在时刻  $t$  有一个电子已经穿过 QPC 的势垒从左库跳到了右库, 同时左量子点中有一个自旋向上的电子而右量子点中有一个自旋向下的电子的概率幅. 真空态  $|0\rangle$  对应着这样的状态: 耦合量子点中没有电子,

QPC 中的左、右电子库中的电子填至费米能级  $\mu_L, \mu_R$ .

### 3. 布洛赫型的主方程

根据耦合量子点中电子可能的占据情况, 把整个体系的状态分为四类: 用  $|1\rangle$  表示两个自旋相反的电子都在左量子点中,  $|2\rangle$  表示左量子点中有一个自旋向上的电子, 同时右量子点中有一个自旋向下的电子,  $|3\rangle$  表示左量子点中有一个自旋向下的电子, 而自旋向上的电子在右量子点中,  $|4\rangle$  表示两个自旋相反的电子都在右量子点中. 采用 Gurvitz 发展的量子主方程的方法<sup>[10]</sup>, 计算体系的密度矩阵, 其中矩阵的对角元  $\sigma_{ii}$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) 表示态  $|i\rangle$  的占据概率,

$$\dot{\sigma}_{11} = i\Omega_0(\sigma_{12} - \sigma_{21}) + i\Omega_0(\sigma_{13} - \sigma_{31}), \quad (6a)$$

$$\dot{\sigma}_{22} = i\Omega_0(\sigma_{21} - \sigma_{12}) + i\Omega_0(\sigma_{24} - \sigma_{42}), \quad (6b)$$

$$\dot{\sigma}_{33} = i\Omega_0(\sigma_{31} - \sigma_{13}) + i\Omega_0(\sigma_{34} - \sigma_{43}), \quad (6c)$$

$$\dot{\sigma}_{44} = i\Omega_0(\sigma_{42} - \sigma_{24}) + i\Omega_0(\sigma_{43} - \sigma_{34}), \quad (6d)$$

非对角元  $\sigma_{ij}$  ( $i \neq j$ ) 表示量子相干的特征,

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{12} = & i(E_2 - E_1)\sigma_{12} + i(U_2 - U_1)\sigma_{12} \\ & - \frac{1}{2}(D' + D'')\sigma_{12} + i\Omega_0(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \\ & + i\Omega_0(\sigma_{14} - \sigma_{32}) + \sqrt{D'D''}\sigma_{12}, \end{aligned} \quad (7a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{13} = & i(E_2 - E_1)\sigma_{13} + i(U_2 - U_1)\sigma_{13} \\ & - \frac{1}{2}(D' + D'')\sigma_{13} + i\Omega_0(\sigma_{11} - \sigma_{33}) \\ & + i\Omega_0(\sigma_{14} - \sigma_{23}) + \sqrt{D'D''}\sigma_{13}, \end{aligned} \quad (7b)$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{14} = & 2i(E_2 - E_1)\sigma_{14} - \frac{1}{2}(D + D'')\sigma_{14} \\ & + i\Omega_0(\sigma_{12} - \sigma_{24}) + i\Omega_0(\sigma_{13} - \sigma_{34}) \\ & + \sqrt{DD''}\sigma_{14}, \end{aligned} \quad (7c)$$

$$\dot{\sigma}_{23} = i\Omega_0(\sigma_{21} - \sigma_{13}) + i\Omega_0(\sigma_{24} - \sigma_{43}), \quad (7d)$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{24} = & i(E_2 - E_1)\sigma_{24} + i(U_1 - U_2)\sigma_{24} \\ & - \frac{1}{2}(D + D')\sigma_{24} + i\Omega_0(\sigma_{22} - \sigma_{44}) \\ & + i\Omega_0(\sigma_{23} - \sigma_{14}) + \sqrt{DD'}\sigma_{24}, \end{aligned} \quad (7e)$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{34} = & i(E_2 - E_1)\sigma_{34} + i(U_1 - U_2)\sigma_{34} \\ & - \frac{1}{2}(D + D')\sigma_{34} + i\Omega_0(\sigma_{32} - \sigma_{14}) \\ & + i\Omega_0(\sigma_{33} - \sigma_{44}) + \sqrt{DD'}\sigma_{34}, \end{aligned} \quad (7f)$$

在上面的式子中,已经定义了: $D = 2\pi\rho_L\rho_R\Omega^2(\mu_L - \mu_R)$ ,  $D' = 2\pi\rho_L\rho_R(\Omega + \delta\Omega)^2(\mu_L - \mu_R)$ ,  $D'' = 2\pi\rho_L\rho_R(\Omega + 2\delta\Omega)^2(\mu_L - \mu_R)$ . 假设 QPC 中的隧穿系数  $\Omega_{lr}$  ( $\delta\Omega_{lr}$ ) 和能级是弱耦合的, 所以有  $\Omega_{lr}(\delta\Omega_{lr}) = \Omega(\delta\Omega)$ . 此外  $\rho_L$  ( $\rho_R$ ) 代表的是左(右)电子库的态密度. 从(6)式和(7)式, 还可以给出流经 QPC 的电流

$$I(t) = I_0\sigma_{44} + I_1(\sigma_{22} + \sigma_{33}) + I_2\sigma_{11}, \quad (8)$$

这里  $I_0 = D$  是当 DD 的左量子点中没有电子时 QPC 的电流,  $I_1 = D'$  是左边量子点有一个电子存在时 QPC 的电流,  $I_2 = D''$  是两个电子同时在左量子点时 QPC 的电流.

#### 4. 讨论与分析

下面通过数值分析讨论两个电子在 DD 中的动力学行为以及如何从 QPC 的电流获取 DD 中电子的纠缠信息. 在以下的计算过程, 选择两量子点间的耦合系数  $\Omega_0$  为能量单位, 量子点内和量子点间的库伦相互作用有这样的关系  $U_1 = \sqrt{2}U_2$ , 并且  $D' = 0.9D$ ,  $D'' = 0.9D'$ .

首先考虑没有测量仪的情况 ( $D = 0$ ). 假设初始时刻两个自旋相反的电子都在左边量子点中. 图 2 给出了不同库伦作用下电子的布居数随时间的演化情况. 可以看出, 随着  $U_1$  的增加, 振荡曲线趋于光滑, 最终体系只有  $\sigma_{11}$  和  $\sigma_{44}$  两种状态. 也就是说, 如果发现一个电子在某个量子点内, 则另一电子也必定在同一量子点内.

耦合量子点中的电子由于库伦相互作用, 会形成电子纠缠态. Wootters 等人在文献[8]中给出了计算两体两维混态纠缠度的方法——共生纠缠度 (Concurrence). 图 3 就根据这种方法画出的对应于图 2 的纠缠曲线. 图 3 中, 当库伦作用为零时, 纠缠度是零. 可见, 电子间的纠缠是通过库伦作用这一中介来发生的. 当库伦作用  $U = 10, 20$ , 纠缠随时间呈复杂的演化. 然而当库伦作用继续增大时, 纠缠曲线越来越有规则也越来越光滑.

在  $U_1 = 40$  的纠缠曲线上, 可以看到有小振幅的振荡. 为了更好的说明产生这种小振荡的原因, 给出了纠缠和电子布居数  $\sigma_{11}, \sigma_{44}$  的组合图, 见图 4 (a). 发现  $\sigma_{11}$  和  $\sigma_{44}$  曲线也存在这种振荡. 而在 4 (b) 图中, 电子间库伦作用更强, 体系处于  $\sigma_{22}$  和  $\sigma_{33}$  的概率为零,  $\sigma_{11}, \sigma_{44}$  和纠缠曲线都变得很光滑. 所

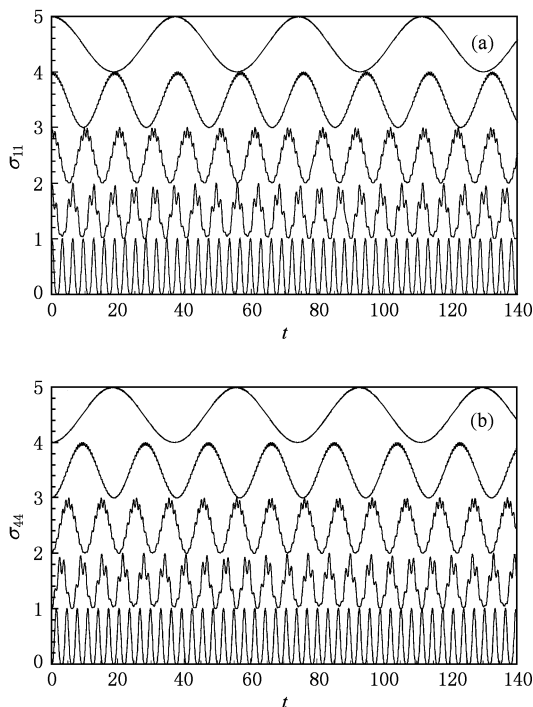


图 2 孤立耦合双量子点中的电子占据概率(从下到上, 对应  $U_1 = 0, 10, 20, 40, 80$  的曲线分别上移  $0, 1, 2, 3, 4$ ) (a)  $\sigma_{11}$ ; (b)  $\sigma_{44}$

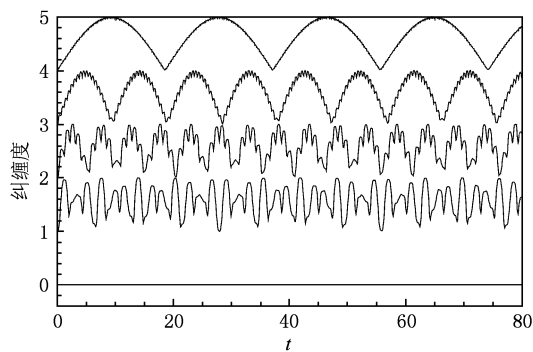


图 3 不同库伦作用下纠缠度随时间的变化. 参数与图 2 对应

以, 可以把这种小振荡归因于体系在态  $\sigma_{22}, \sigma_{33}$  和  $\sigma_{11}, \sigma_{44}$  间的小振幅振荡引起的. 在图 4 中还可以看到, 纠缠度取最大值 1 时, 对应于  $\sigma_{11}, \sigma_{44}$  的概率均为 0.5, 这正是两体两维体系形成的最大纠缠态 Bell 态. 此外, 能很清晰的看到纠缠度曲线的变化周期是振动曲线的一半. 接下来, 将启动探测仪, 在 QPC 中找到一个与纠缠度有相同周期的物理量来反应纠缠的变化.

当有测量仪器监测 DD 体系, 将会有退相干现象<sup>[11-13]</sup>. 电子在 DD 体系中的振动振幅以及纠缠度

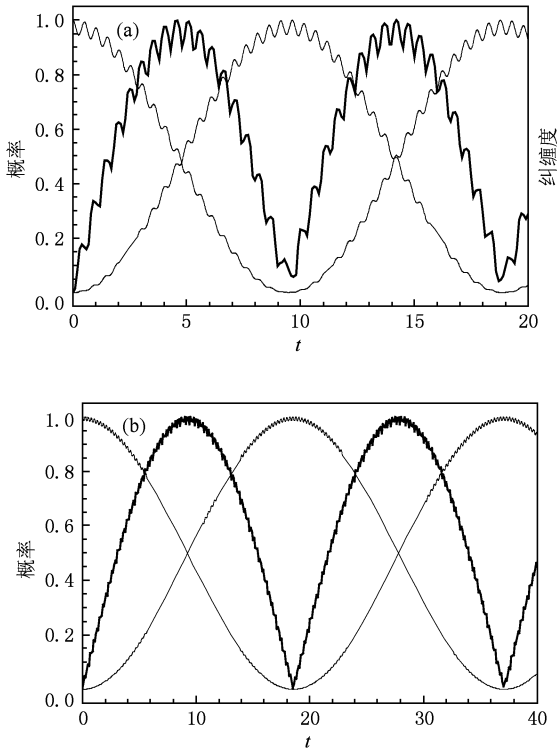


图4 纠缠(粗线)和电子布居数  $\sigma_{11}, \sigma_{44}$  (细线) 分别随时间的演化 (a)  $U = 40$ ; (b)  $U = 80$

曲线的变化幅度会随时间而减小,但其周期均不会改变. 库伦作用比较大 ( $U_1 = 40, 80$ ) 的时候, 电子在耦合量子点中仅有两种占据情况, 类似于单电子在 qubit 中的行为, 这时, 探测仪能够探测耦合量子点中的电子布居数, 那么这时的纠缠信息也应该能被反映出来, 所以在这里仅考虑强库伦作用的情况. 这样, 电流 (8) 式就可以改写为

$$\begin{aligned} I(t) &= I_0 \sigma_{44}(t) + I_2 \sigma_{11}(t) \\ &= I_0 (1 - \sigma_{11}(t)) + I_2 \sigma_{11}(t), \end{aligned} \quad (9)$$

从 (9) 式不难看出, 电流和振动曲线  $\sigma_{11}$  有相同的变化周期, 而纠缠的周期与电子布居数  $\sigma_{11}$  的周期又不相同 (图 4), 因此不能通过电流正确反映纠缠信息. 在这里我们参考文献 [9], 给出电流随时间的变化率  $|dI(t)/dt|$ . 图 5 给出了  $D = 1, 2$  时的纠缠度和电流变化率随时间的演化曲线. 观察到电流变化率呈现高频率的振荡. 然而对比图 5 (a), (b), 却发现纠缠和电流变化率的演化非常相似, 同时达到最高峰, 同时到达最低点, 所以纠缠的最小、最大信息可以通过电流的变化来反应. 在图 5 (a) 中还可以看出  $D$  越大, 纠缠的衰减就越快, 这是由于测量导致的退相干率不同所造成的 [11]. 这种退相干同样会造

成电子在 DD 中振荡曲线的衰减, 也就会反应在电流以及电流变化率曲线中. 因此, 纠缠的最值以及纠缠的衰减都可以通过 QPC 的电流变化率获取.

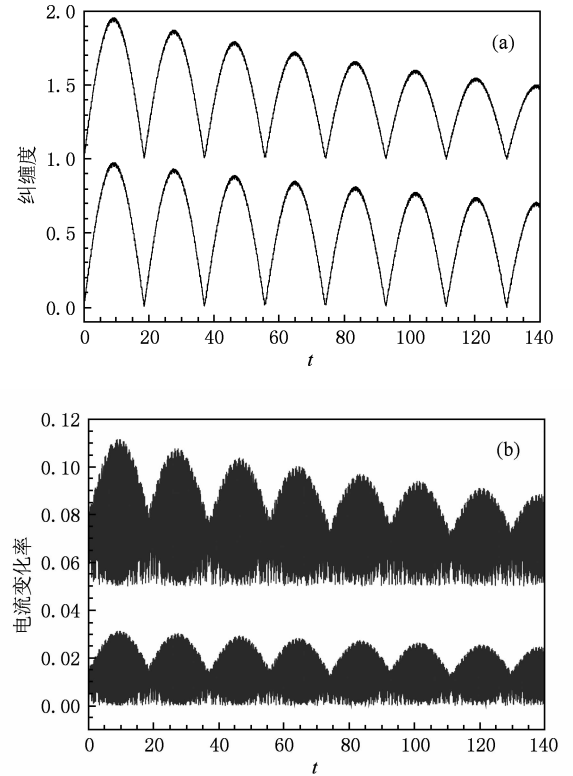


图5 测量仪器启动时, DD 的电子纠缠度和流经 QPC 的电流变化率随时间的变化, 其中  $U_1 = 80$  (a) 对应于  $D = 1, 2$  的纠缠曲线相应上移 0, 1; (b) 对应于  $D = 1, 2$  的电流变化曲线相应上移 0, 0.05

最后还要指出的是, 如果初始时刻两个电子分别在两个量子点内, 那么随着库伦作用的增大, 只有  $\sigma_{22}$  和  $\sigma_{33}$  两种状态. 从 (8) 式得知, 这时的电流为常数  $D'$ , 也就是说电流变化率为零. 这样, 电流变化率就不能反映电子纠缠的信息了.

## 5. 结 论

本文研究用量子点接触测量自旋相反的两个电子在耦合量子点中的纠缠信息. 对于孤立的耦合量子点, 两个电子在其中通过库伦相互作用发生纠缠, 并且随着库伦作用增大, 两电子黏在一起振荡, 这时的纠缠曲线变得更有规律也更加光滑. 由于强库伦作用下两电子在耦合双量子点中的运动如同单电子在 qubit 中的行为, 所以可以通过流经探测器的电流了解强库伦作用下的电子运动情况 [2]. 然而

这种情况下的电子纠缠信息却无法从量子点接触的电流中读出, 因为电流与纠缠的变化具有不同的周期. 但发现电流变化率与纠缠的演化非常相似, 而且由测量退相干导致的振动和纠缠的衰减都在

电流变化率中有所体现. 因此, 库伦作用比较大时, 可以从量子点接触的电流变化率知道耦合量子点中的电子纠缠信息.

- [1] Jiang Z T, Yang J, Han Q Z 2008 *J. Phys. Condens* **20** 075210
- [2] Gurvitz S A 2005 *Phys. Rev. B* **72** 073303
- [3] Gilad T, Gurvitz S A 2006 *Phys. Rev. Lett* **97** 116806
- [4] Huang X S, Xie S Y, Yang Y P 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 2269 (in Chinese) [黄仙山、谢双媛、羊亚平 2006 物理学报 **55** 2269]
- [5] Hu X N, Li X Q 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3259 (in Chinese) [胡学宁、李新奇 2006 物理学报 **55** 3259]
- [6] Jiao H J, Li X Q 2007 *Phys. Rev. B* **75** 155333.
- [7] Elzerman J M, Nanson R, Willems van Beveren L M, Witkamp B, Vandersypen L M K, Kouwenhoven L P 2004 *Nature* **430** 431
- [8] Wootters W K 1998 *Phys. Rev. Lett* **80** 2245
- [9] Liu J, Jiang Z T, Shao B 2009 *Phys. Rev. B* **79** 115323
- [10] Gurvitz S A 1997 *Phys. Rev. B* **56** 15215
- [11] Gurvitz S A 2000 *Phys. Rev. Lett* **85** 812
- [12] Zhang Y P, Gao Y F, Liang J Q *Phys Lett A* **346** 115
- [13] Liu S D, Cheng M T, Zhou H J, Li Y Y, Wang Q Q, Xue Q K 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 2122 (in Chinese) [刘绍鼎、程木田、周慧君、李耀义、王取泉、薛其坤 2006 物理学报 **55** 2122]

## Measurement of entanglement in coupled dots \*

Wang Hai-Xia<sup>†</sup> Yin Wen Wang Fang-Wei

(*Institute of physics, Chinese Academy of Science, Beijing 100080, China*)

(Received 16 September 2009; revised manuscript received 10 December 2009)

### Abstract

Using the method developed by Gurvitz of solving Schrödinger equations and the numerical calculation, we investigate the oscillation and the entanglement of the two opposite-spin electrons in coupled quantum dots, and show how to read out the entanglement by quantum point-contact detector. The results show that the two electrons start to entangle due to Coulomb interaction, and then they move together with Coulomb interaction augmenting, similar to the oscillation of an electron in a qubit. In this case, we locate a quantum point contact detector near one of the quantum dots, and the entanglement information can be obtained by changing the current.

**Keywords:** Coulomb interaction, entanglement, measurement, current change rate

**PACC:** 0365, 0560

\* Project supported by the National Basic Research Program of China (Grant No. 2010CB33102).

<sup>†</sup> E-mail: whx@qphy.iphy.ac.cn