第 59 卷 第 8 期 2010 年 8 月
1000-3290/2010/59(08)/5261-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 59, No. 8, August, 2010

哈勃参数对 Robertson-McVittie 时空中光线轨道的影响和雷达回波延迟修正*

宫衍香† 李 峰

(泰山学院物理与电子工程学院,泰安 271021)

(2009 年 9 月 7 日收到;2009 年 10 月 12 日收到修改稿)

采用后牛顿近似计算方法讨论了哈勃参数 $H(t)$ 对 Robertson-McVittie 时空中电磁波传播的后牛顿影响. 对于光线的偏转实验,同时考虑了光源和接收点的有限距离(d_1,d_2)对偏转角度的影响,计算给出了哈勃参数 H_0 对偏转角度的最大修正. 对于雷达回波的延迟效应,给出了哈勃参数对时间延迟公式的最大修正. 该工作利用经典引力实验考虑宇宙膨胀对电磁波传播的后牛顿影响,可为当前的高精度空间引力实验提供理论参考.

关键词: Robertson-McVittie 时空, 哈勃参数, 电磁波传播, 后牛顿近似

PACC: 0420C, 0420J, 0240

1. 引　　言

当光线掠过太阳表面时,广义相对论给出的偏转角度为 1.75″,雷达信号在地球与水星之间的最大时间延迟为 240 μs. 从后牛顿角度看,对于太阳系的引力效应,比如光线的偏转、时间延迟、水星的近日点进动等,后牛顿近似的精度为 10^{-6},二阶后牛顿的精度要求为 10^{-12}. 随着空间技术的发展,当今的空间引力计划如 LISA[1] (Laser Interferometer Space Antenna, 2000), GAIA[2] (Global Astrometric Interferometer for Astrophysics, 2001), 美国航天局的 FAME[3] (Full-sky Astrometric Mapping Explorer, 2000), 还有中国科学院紫金山天文台的 Ni 提出的 ASTROD[4] (Astrodynamic Space Test of Relativity Using Optical Devices, 2002)等其角度测量的精度可以达到微角秒量级. 实验上的进步也推动了包括引力波在内的引力理论研究[5—12]. 就经典引力实验而言,理论上也须考虑影响引力效应二阶后牛顿以上结果的各种因素. 目前,电磁波的传播公式已经按照后牛顿展开的方式推得,即令 $g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu}$, $|h_{\mu\nu}|\ll 1$,其中背景度规 $\eta_{\mu\nu}$ 为静态 Minkowski 度规. 既然实验上使得高精度的测量成为可能,用电磁波传播的高精度引力效应讨论各种与天文学有关的问题将成为很有意思的课题,例如文献[13]讨论时间延迟效应对天文单位的影响. 本文采用后牛顿近似方法讨论宇宙膨胀对电磁信号传播的影响,即以 Robertson-McVittie 度规为例,研究光信号掠过置身于宇宙膨胀背景下的天体时所产生的二阶后牛顿精度的偏转效应和雷达回波延迟效应,计算给出哈勃参数的最大修正项.

本文的符号说明,在后牛顿近似计算方法中,常以 $O(n)$ 或 $O(c^{-n})$ 表示含有 c^{-n} 的 n 阶小量,c 为真空中的光速. 这样 $O(1)$ 即含有 $1/c$ 的项可以视为一个小参量,对于太阳系的引力实验来讲这种近似是合理的[14]. 近似计算中可以把度规、克氏记号等以 $O(n)$ 的形式级数展开,根据近似程度的要求取有限的项. 例如在 PPN 度规中 $g_{00}=-1+2U-2\beta U^2+\cdots$ 若对于太阳取 $U=GM_{\odot}/rc^2$ (牛顿势),则其展开形式为 $g_{00}=-1+O(2)+O(4)+\cdots$,省略号表示高于 $O(4)$ 的高阶小量.

2. Robertson-McVittie 时空

标准的 Robertson-McVittie 度规形式如下[13, 15, 16]:

* 国家自然科学基金(批准号:10674099)资助的课题.

† E-mail: yxgong@ sina. com

$$ds^2 = -\left(\frac{1-\dfrac{GM}{2c^2ra(t)}}{1+\dfrac{GM}{2c^2ra(t)}}\right)^2 c^2\mathrm{d}t^2 + \left(1+\frac{GM}{2c^2ra(t)}\right)^4 a^2(t)(\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2), \quad (1)$$

其中 G 为万有引力常数,M 为天体的质量,c 为真空中的光速,$a(t)$ 为一尺度因子. 度规(1)可以认为是在 FLRW(friedmann-lemaître-robertson-walker)背景度规下,一个点质量周围的引力场. 不过,最新的行星运动的动力学模型(EIH 运动方程)和光线传播模型,以及其他太阳系可观测的模型并不是以随动坐标系(1)式的形式推导的,而是采用的 BCRS 参考系(barycentric celestial reference system)或者是建立在后牛顿框架基础上、与 BCRS 参考系对应的参考系. 由于各种天文常数也是按照 BCRS 参考系或者与 BCRS 参考系一致的参考系推得的,为了讨论哈勃常数 H_0 对光线偏转实验的影响,应当把度规(1)改写,采用尽可能与 BCRS 参考系相近的参考系. 需要强调的指出的是,BCRS 参考系和宇宙参考系的匹配在天文学中是个重要的基础问题,见文献[13]. 为此,采用如下的径向坐标变换[15, 16]:

$$R = a(t)r\left(1+\frac{GM}{2c^2ra(t)}\right)^2, \quad (2)$$

利用(2)式可以把(1)式改写为

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1-\frac{2GM}{c^2R}\right)c^2\mathrm{d}t^2 + \left(\frac{\mathrm{d}R}{\sqrt{1-\dfrac{2GM}{c^2R}}} - \frac{H(t)}{c}Rc\mathrm{d}t\right)^2 + R^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2), \quad (3)$$

这里的 $H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$ 为哈勃参数,上标一点表示对时间求导. 如果 $H(t)$ 不随时间变,即为现在的哈勃常数 H_0,则有 $H(t)\to H_0 = (h_0/3.08)\times10^{-17}$ $[1/\mathrm{s}]$,$h_0 = 0.7$. 可以引入如下时间变换消去(3)式中的 $\mathrm{d}t\mathrm{d}R$ 项[13, 17]

$$cT = ct + \frac{H_0}{c}\int\frac{R\mathrm{d}R}{\left(1-\dfrac{2GM}{c^2R}-\dfrac{H_0^2}{c^2}R^2\right)\sqrt{1-\dfrac{2GM}{c^2R}}}, \quad (4)$$

实际的情形中哈勃参数是随时间变的,然而对太阳系的引力实验来讲,可作近似考虑. 因为电磁信号引力实验的观测数据记录的时间间隔(约为 100 年)远远小于宇宙的年龄(10^7 年). 假设

$$H(t) \simeq H_0 + \left.\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\right|_0 (t-t_0), \quad (5)$$

取 $\mathrm{d}H/\mathrm{d}t\,|_0 \sim H_0/T_U \sim 10^{-24}[1/\mathrm{s\cdot yr}]$ 是合理的[13],这样就有

$$H_0 \sim 10^{-17} > \left.\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\right|_0 \times 100[\mathrm{yr}] \sim 10^{-22}[1/\mathrm{s}], \quad (6)$$

从(6)式可以看出,对于宇宙的膨胀 H_0 起决定性的影响. 把(4)式代入(3)式可得

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1-\frac{2GM}{c^2r}-\frac{H_0^2}{c^2}r^2\right)c^2\mathrm{d}t^2 + \left(1+\frac{2GM}{c^2r}+\frac{H_0^2}{c^2}r^2\right)\mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2). \quad (7)$$

上式中已经把 $\mathrm{d}r^2$ 前的系数作了后牛顿展开,并且把 T 和 R 仍用 t 和 r 来表示.

3. 光线的偏转角度

不失一般性,可以取质点的初始位置及速度在赤道平面上,则有

$$\theta = \frac{\pi}{2},\ \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda} = 0, \quad (8)$$

把光子的轨道微分方程积分可得如下公式[14]:

$$\phi(R) = \phi_d + \int_R^d A^{1/2}(r)\left[\left(\frac{r}{R}\right)^2\left(\frac{B(R)}{B(r)}\right)-1\right]^{-1/2} \times \frac{\mathrm{d}r}{r}, \quad (9)$$

对于度规(7)式 $A(r)$ 和 $B(r)$ 分别为

$$A(r) = 1 + \frac{2GM}{c^2r} + \frac{H_0^2}{c^2}r^2, \quad (10)$$

$$B(r) = 1 - \frac{2GM}{c^2r} - \frac{H_0^2}{c^2}r^2. \quad (11)$$

若是采用飞船放在火星上的相干光源,则光源的有限距离对偏转角度的影响需要考虑(多出来的修正项比 d_1,d_2 均为无穷远情况下的二阶后牛顿项还大)[18]. 设光源到中心天体(太阳)的距离为 d_1,接收点(空间卫星)到中心天体的距离为 d_2,设 $|\phi(d_1)-\phi(d_2)| = \alpha$ 为光子沿直线传播时造成的角度变化. 那么当受中心天体的引力影响时,光线轨道相对于直线的偏离为

$$\Delta\phi_d = |\phi(R)-\phi(d_1)| + |\phi(R)-\phi(d_2)| - \alpha, \quad (12)$$

其中 R 为光线轨道最接近中心天体的距离.

下面采用后牛顿近似方法处理,令

$$\frac{B(R)}{B(r)} = 1 + O(2) + O(4), \tag{13}$$

$O(n)$为包含 c^{-n}的未知项,即有

$$B(R) = B(r) + O(2)B(r) + O(4)B(r), \tag{14}$$

由(11)式,比较(14)式两边含 c^{-n} 的同阶项,不难得出

$$\begin{aligned}\frac{B(R)}{B(r)} =& 1 + \frac{2GM}{c^2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) + \frac{H_0^2}{c^2}(r^2 - R^2) \\ &+ \left(\frac{2GM}{c^2 r} + \frac{H_0^2}{c^2}r^2\right)\left[\frac{2GM}{c^2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)\right. \\ &\left. + \frac{H_0^2}{c^2}(r^2 - R^2)\right],\end{aligned} \tag{15}$$

为了便于积分,把(9)式中括号里面的部分改写为如下形式:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{r}{R}\right)^2\left(\frac{B(R)}{B(r)}\right) - 1 \\ &= \left[\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 1\right][1 + O(2) + O(4)],\end{aligned} \tag{16}$$

用同样的方法可以定出待定量,即有

$$\begin{aligned}\left(\frac{r}{R}\right)^2\left(\frac{B(R)}{B(r)}\right) - 1 =& \left[\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 1\right] \\ &\times\left\{1 - \frac{2GMr}{R(r+R)c^2} + \frac{H_0^2}{c^2}r^2\right. \\ &- \left(\frac{2GM}{c^2 r} + \frac{H_0^2}{c^2}r^2\right) \\ &\left.\times\left[\frac{2GM}{c^2}\frac{r}{R(r+R)} - \frac{H_0^2}{c^2}r^2\right]\right\},\end{aligned} \tag{17}$$

利用

$$(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots, \tag{18}$$

把积分号中的相应部分展开,保留质量部分的二阶后牛顿项(即 $O(4)$部分)以及含 H_0 的最大项,略去其他高阶小量,可得

$$\begin{aligned}\phi(R) - \phi(d) =& \int_R^d \frac{1}{r}\left[\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 1\right]^{-1/2} \\ &\times\left\{1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{GM}{r} + \frac{GMr}{R(r+R)}\right)\right. \\ &+ \frac{1}{c^4}\left[-\frac{1}{2}\frac{G^2M^2}{r^2} + 3\frac{G^2M^2}{R(r+R)}\right. \\ &+ \frac{3}{2}\frac{G^2M^2r^2}{R^2(r+R)^2} \\ &\left.\left. - 2GMH_0^2 r\right]\right\}\mathrm{d}r,\end{aligned} \tag{19}$$

把被积函数的各项逐个积分,结果为

$$\begin{aligned}&\phi(R) - \phi(d) \\ &= \frac{\pi}{2} - \arctan\left[\left(\frac{d}{R}\right)^2 - 1\right]^{-1/2} \\ &+ \frac{GM}{c^2 d}\sqrt{\left(\frac{d}{R}\right)^2 - 1} + \frac{GM}{c^2 R}\sqrt{\frac{d-R}{d+R}} \\ &- \frac{G^2M^2}{2c^4}\left\{\frac{1}{2d^2}\sqrt{\left(\frac{d}{R}\right)^2 - 1}\right. \\ &\left. - \frac{1}{2R^2}\arctan\left[\left(\frac{d}{R}\right)^2 - 1\right]^{-1/2} + \frac{\pi}{4R^2}\right\} \\ &- \frac{3G^2M^2}{c^4R^2}\left\{\sqrt{\frac{d-R}{d+R}}\right. \\ &\left. + \arctan\left[\left(\frac{d}{R}\right)^2 - 1\right]^{-1/2} - \frac{\pi}{2}\right\} \\ &+ \frac{G^2M^2}{2c^4R^2}\frac{R+2d}{R+d}\sqrt{\frac{d-R}{d+R}} - 2\frac{GM}{c^4} \\ &\times H_0^2 R\ln\left[\frac{d}{R} + \sqrt{\left(\frac{d}{R}\right)^2 - 1}\right],\end{aligned} \tag{20}$$

把(20)式代入(12)式,即可计算光子掠过天体表面时的偏转角度. 如果中心天体为太阳,d_1 和 d_2 均取无穷远,α 取 π,考虑到 $O(2)$项,则偏转角度为

$$\begin{aligned}\Delta\phi_d =& \lim_{d_1\to\infty}|\phi(R) - \phi(d_1)| + \lim_{d_2\to\infty}|\phi(R) \\ &- \phi(d_2)| - \pi \\ &= \frac{4GM_\odot}{c^2R_\odot} \approx 1.75'',\end{aligned} \tag{21}$$

这和经典文献的结果一致. 第五项和第六项为质量部分的二阶后牛顿修正,最后一项为哈勃参数的修正.

若中心天体为太阳,考虑光线掠过太阳表面的情况(即最大偏转),则哈勃参数造成的最大修正为

$$\begin{aligned}&\frac{2GM_\odot}{c^4}H_0^2R_\odot\left\{\ln\left[\frac{d_1}{R_\odot} + \sqrt{\left(\frac{d_1}{R_\odot}\right)^2 - 1}\right]\right. \\ &\left. + \ln\left[\frac{d_2}{R_\odot} + \sqrt{\left(\frac{d_2}{R_\odot}\right)^2 - 1}\right]\right\}.\end{aligned} \tag{22}$$

其中 $M_\odot$和 $R_\odot$分别为太阳的质量和半径.

4. 雷达回波的时间延迟

雷达信号从 R 传到 r,或从 r 传到 R 的时间为[14]

$$t(r,R) = \frac{1}{c}\int_R^r \left\{ A(r)B^{-1}(r) \Big/ \left[1 - \frac{B(r)}{B(R)}\left(\frac{R}{r}\right)^2 \right] \right\}^{1/2} \mathrm{d}r, \tag{23}$$

仍设 $\phi(r)$ 为信号到达处 r 的角坐标，则当 $|\phi_1 - \phi_2| > \pi/2$ 时，光子从 r_1 传到 r_2 的时间应为

$$t_{12} = t(r_1, R) + t(r_2, R), \tag{24}$$

若对于 $|\phi_1 - \phi_2| < \pi/2$，则 t_{12} 为二者时间之差.

考虑到后后牛顿精度，同样令

$$\frac{B(r)}{B(R)} = 1 + O(2), \tag{25}$$

或

$$B(r) = B(R)[1 + O(2)], \tag{26}$$

令(26)式两边 $O(c^{-n})$ 的同次幂项相等，可定出 $O(2)$，最后得

$$\frac{B(r)}{B(R)} = 1 + \frac{2GM}{c^2}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right) + \frac{H_0^2}{c^2}(R^2 - r^2), \tag{27}$$

$$1 - \frac{B(r)}{B(R)}\left(\frac{R}{r}\right)^2 = \left[1 - \left(\frac{R}{r}\right)^2\right] \times \left[1 - \frac{2GMR}{c^2 r(r+R)} + \frac{H_0^2}{c^2}R^2\right]. \tag{28}$$

把(28)式代回(23)式，把被积函数的每个乘积项分别展开后再相乘，同样保留到质量部分的二阶后牛顿修正和含 H_0 的最大修正项，则有

$$t(r,R) = \frac{1}{c}\int_R^r \left[1 - \left(\frac{R}{r}\right)^2\right]^{-1/2} \times \left[1 + \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{GMR}{c^2 r(R+r)} + \frac{H_0^2 r^2}{c^2} - \frac{H_0^2 R^2}{2c^2}\right] \mathrm{d}r, \tag{29}$$

把被积函数逐项积分，略去高阶小量可得

$$t(r,R) = \frac{1}{c}(r^2 - R^2)^{1/2} + \frac{2GM}{c^3}\ln\frac{r + (r^2 - R^2)^{1/2}}{R} + \frac{GM}{c^3}\left(\frac{r-R}{r+R}\right)^{1/2} + \frac{H_0^2}{3c^3}(r^2 - R^2)^{1/2} \times \left(r^2 + \frac{R^2}{2}\right). \tag{30}$$

把(30)式代入(24)式便可讨论时间延迟实验的理论结果. 显然，(30)式的第一项 $(r^2 - r_0^2)^{1/2}/c$ 为信号走直线所需要的时间，后面各项为广义相对论的延迟效应. 第二项和第三项为后牛顿修正，这和 Schwarzschild 场的延迟结果完全一致[14]. 最后一项是哈勃参数造成的.

如果测量地球和水星之间的回波延迟，则当水星上合时，延迟量最大(所谓上合即水星、太阳与地球在一直线上，且地球与水星在太阳的两侧)，这时雷达信号沿太阳的边缘擦过，所以 $R \approx R_\odot$，则哈勃参数造成的最大双程额外时间延迟为

$$\begin{aligned}(\Delta t)_{\max} &= 2[t(r_\oplus, R_\odot) + t(r_{水}, R_\odot)] \\ &= \frac{2H_0^2}{3c^3}\left[\sqrt{(r_\oplus^2 - R_\odot^2)}\left(r_\oplus^2 + \frac{R_\odot^2}{2}\right) + \sqrt{(r_{水}^2 - R_\odot^2)}\left(r_{水}^2 + \frac{R_\odot^2}{2}\right)\right].\end{aligned} \tag{31}$$

其中 $r_\oplus$ 和 $r_{水}$ 分别表示地球和水星到太阳中心的距离.

5. 结 论

本文首先把标准的 Robertson - McVittie 度规通过径向坐标变换改写为 BCRS 参考系中的形式(7)式，然后利用后牛顿近似方法讨论了该度规场中的光线偏转问题. 与一般的做法不同我们同时考虑了光源和接收点的有限距离(d_1, d_2)对偏转角度的影响，最后给出了哈勃参数 H_0 对光线轨道的最大修正项. 对于雷达回波延迟实验，同样讨论了哈勃参数 H_0 造成的最大延迟项，其质量部分的延迟结果和前人的工作一致. 在将来的高精度空间引力实验中需要考虑很多的微小因素，宇宙膨胀的影响也是其中之一，如文献[13]所述这些讨论涉及引力理论或天文学的基本问题，有其研究的价值.

[1] Danzmann K, Rudiger A 2003 *Class. Quantum. Grav.* **20** 1
[2] Perryman M A C, de Boer K S, Gilmore G, Høg E, Lattanzi M G, Lindegren L, Luri X, Mignard F, Pace O, de Zeeuw P T 2001 *Astron. and Astrophys.* **369** 339
[3] Triebes K J, Gilliam L, Hilby T, Horner S D, Perkins P, Vassar R H, Harris F, Monet D G 2000 *Proc. SPIE* **4013** 482
[4] Ni W T 2002 *Int. J. Mod. Phys.* D **11** 947
[5] Zeng X X, Yang S Zh, Chen D Y 2008 *Chin. Phys.* B **17** 1629
[6] Peng J J, Wu Sh Q 2008 *Chin. Phys.* B **17** 825
[7] Zhu J, Ji P Y 2008 *Chin. Phys.* B **17** 356
[8] Chen J H, Wang Y J 2007 *Chin. Phys.* **16** 3212
[9] Zhao W 2007 *Chin. Phys.* **16** 2894

[10] Lei ZH H, Lan M J, Wang X Y, Li J J 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7408 (in Chinese) [雷中华、兰明建、汪先友、李建杰 2008 物理学报 **57** 7408]

[11] Wu Y B, Dong P, Zhao G M, Deng X M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4974 (in Chinese) [吴亚波、董　鹏、赵国明、邓雪梅 2005 物理学报 **54** 4974]

[12] Shi B P, Li F Y, Zhang Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5041 (inChinese) [石东平、李芳昱、张　义 2006 物理学报 **55** 5041]

[13] Arakida H 2009 *New. Astron* **14** 264

[14] Weinberg S 1980 *Gravitation and Cosmology*: *Principles and Applications of the General Theory of Relativity* (BeiJing: Science Press) P. 208 (in Chinese) [温伯格 1980 引力论和宇宙论：广义相对论的原理和应用(北京：科学出版社)第 208 页]

[15] Nolan B C 1999 *Class. Quant. Grav.* **16** 1227

[16] Nolan B C 1999 *Class. Quant. Grav.* **16** 3183

[17] Jarenfelt G 1940 *Ann. Acad. Soc. Sci. Fennicae.* A **45** 3

[18] Xu C M, Xu J J, Yang L T, Huang Z H 1984 *Fudan Journal* **28** 228 (in Chinese) [须重明、徐建军、杨兰田、黄振华 1984 复旦学报 **28** 228]

Effect of Hubble parameter on the orbit of light ray and radar echo delay in Robertson-McVittie spacetime*

Gong Yan-Xiang†　Li Feng

(*College of Physics and Electronic Engineering*, *Taishan University*, *Tai'an*　271021, *China*)

(Received 7 September 2009; revised manuscript received 12 October 2009)

Abstract

In this paper, the effect of Hubble parameter on the propagation of electromagnetic wave in Robertson-McVittie spacetime is discussed by using the post-Newtonian approximation method. To the bending test of light ray, the deflection angle caused by Hubble parameter H_0 is calculated to its maximum amendatory term. Besides, the effects of finite distances of light source and receiver (d_1 and d_2) on deflection angle are also considered in this work. To the radar echo delay test, the maximum amendatory term to the formulae, induced by Hubble parameter, is given. The paper focuss on the study of influence of cosmological expansion on the propagation of electromagnetic wave. The work can be checked in the current high-precision gravity experiments in space and provides a theoretical basis for these experiments.

Keywords: Robertson-McVittie spacetime, Hubble parameter, propagation of electromagnetic wave, post-Newtonian approximation method

PACC: 0420C, 0420J, 0240

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10674099).

† E-mail: yxgong@sina.com