

# 原子激光器的空间有效增益范围\*

袁都奇<sup>†</sup>

(宝鸡文理学院物理与信息技术系, 宝鸡 721016)

(2009 年 8 月 10 日收到; 2009 年 12 月 17 日收到修改稿)

求出了  $\gamma$  维空间中理想玻色气体的态密度, 采用 Thomas-Fermi 近似, 导出了  $\gamma$  维广义幂律势阱中粒子数密度的空间分布. 在此基础上, 求出了原子激光器的空间有效增益范围(即  $\gamma$  维势阱中玻色-爱因斯坦凝聚的空间有效范围), 并对其产生影响的相关因素进行了讨论.

**关键词:**  $\gamma$  维空间, 玻色-爱因斯坦凝聚, 原子激光器, 空间有效增益范围

**PACC:** 0530J, 0570F, 0600

## 1. 引 言

玻色-爱因斯坦凝聚(BEC)实现以后, 关于 BEC 的动力学问题和相互作用<sup>[1]</sup>, 凝聚体的量子特性<sup>[2]</sup>, 相互作用对 BEC 的稳定性条件影响<sup>[3]</sup>, 亚稳态的出现<sup>[4]</sup>以及势场对于 BEC 性能的影响<sup>[5-7]</sup>等热点问题进行了大量研究. 人们预言 BEC 这种宏观量子现象, 必然会对许多新技术的发展及其应用, 产生革命性的影响. 利用玻色气体的 BEC 研制的原子激光器(atom laser)<sup>[8]</sup>, 实现了原子束相干放大和相干物质波的产生与输出, 这是 BEC 理论及其实验在新技术领域的重要应用之一. 原子激光器的出现意义重大, 它对物理学自身的发展、研究及其众多高技术的发展、应用都将产生重要影响. 目前关于原子激光器的实验研究, 只能在一些实现了 BEC 的实验室中进行.

原子激光器首先要实现使原子处于确定的同一量子态上, 而使处于其他量子态的原子数减少, 我们称其为原子数的增益, 然后采用特殊方法和手段, 引出处于同一量子态的原子, 实现相干物质波的输出. 因此, 也将原子激光器称为相干原子束发生器(coherent atomic beam generator). 到目前为止, 实现众多原子聚集于同一量子态的有效途径, 在理论和实验上只有玻色气体的 BEC. 由此可见, 原子激光器工作的主要环节, 就是通过特殊的装入手

段, 在原子阱中实现 BEC, 即实现在确定的同一量子态上的原子数增益. 显然, 势阱中原子发生 BEC 时的空间有效范围, 就是原子激光器中原子数增益的空间有效范围. 可见, 这是研制原子激光器时必须考虑, 并是影响其重要性能的参量. 作为近年来物理学研究的热点之一, 人们对于玻色爱因斯坦凝聚以及原子激光的各种性能进行了广泛研究<sup>[9-19]</sup>, 而关于原子激光器的空间有效增益范围如何, 它遵从何种规律与约束, 与哪些因素有关等问题, 目前尚无文献研究.

本文研究处于  $\gamma$  维广义幂律势阱中的理想玻色气体. 在 Thomas-Fermi 近似有效的前提下, 求出粒子的量子态密度  $D(p)$ ; 导出  $\gamma$  维势阱中粒子数密度的空间分布; 在此基础上, 给出原子激光器的空间有效增益范围, 即势阱中原子实现 BEC 的空间有效范围; 并对其影响因素进行讨论. 本文的研究, 既具有 BEC 研究领域的理论意义, 对原子激光器的研究, 又具有实际意义.

## 2. 单位体积的量子态密度 $D(p)$

实验上获得成功的 BEC 和原子激光器是在有外势约束的玻色系统中实现的, 而囚禁采用的外势可以有多种形式, 为了使研究结果更具普遍意义, 研究在任意维( $\gamma$  维)空间中满足普遍色散关系并处于任意幂函数型外势约束下的理想玻色气体系统.

\* 陕西省自然科学基金(批准号:2007A02)和宝鸡文理学院重点科研项目(批准号:ZK0914)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: yuanduqi@163.com

由于囚禁实验中,通常满足粒子数足够多,粒子能级间隔远小于其动能,所以 Thomas-Fermi 近似有效.此时,单粒子能量简单的等于其哈密顿,

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \varepsilon_0 p^s + \sum_{i=1}^{\gamma} u_i \left| \frac{r_i}{L_i} \right|^{t_i} \\ &= \varepsilon_0 p^s + u(r),\end{aligned}\quad (1)$$

式中第一项为粒子动能,第二项为粒子在势阱中的势能.其中  $\varepsilon_0, s$  为反映粒子运动特征的参量,  $p$  为动量;  $r_i$  为  $i$  方向的坐标分量,  $L_i$  为势阱中  $r_i$  方向的特征尺度,  $t_i$  为反映势阱性质的参量,  $t_i \rightarrow \infty$  时,则在  $|r_i| > L_i$  和  $|r_i| < L_i$  区域中,外势分别为  $\infty$  和 0,这对应于无外势约束(处于密闭容器中)的理想玻色气体.  $\varepsilon_0, s, u_i, L_i$  以及  $t_i$  均为正的常数.在原子激光器的势阱中实现 BEC 时,(1)式中的参数应该满足约束关系<sup>[20]</sup>

$$\frac{\gamma}{s} + \sum_{i=1}^{\gamma} \frac{1}{t_i} > 1.$$

粒子在相空间中的量子态总数可以表示为

$$\Sigma = \frac{g}{h^\gamma} \int \prod_{i=1}^{\gamma} (dr_i dp_i), \quad (2)$$

式中  $g$  为简并度,  $h$  为普朗克常数.利用  $\gamma$  维空间中的球体积

$$V(\gamma, R) = C_n R^\gamma = \frac{\pi^{\gamma/2}}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2} + 1\right)} R^\gamma, \quad (3)$$

式中  $\Gamma$  为伽玛函数,可将(2)式表示为

$$\Sigma = \frac{g\gamma C_n}{h^\gamma} \int \prod_{i=1}^{\gamma} dr_i \int p^{\gamma-1} dp. \quad (4)$$

由(4)式可得,  $\gamma$  维空间的单位体积内,动量介于  $0-p$  范围内,粒子的量子态数为

$$\Sigma(p) = \frac{g}{h^\gamma} \cdot \frac{\pi^{\gamma/2}}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2} + 1\right)} p^\gamma, \quad (5)$$

则单位体积内的态密度为

$$D(p) = \frac{\partial \Sigma(p)}{\partial p} = \frac{g\gamma}{h^\gamma} \frac{\pi^{\gamma/2}}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2} + 1\right)} p^{\gamma-1}. \quad (6)$$

### 3. 空间有效增益范围(BEC 的空间有效范围)

玻色粒子在满足(1)式的外势场中的平均占有数为

$$\langle n \rangle = \left\{ \exp \left[ \frac{\varepsilon_0 p^s + u(r) - \mu}{kT} \right] - 1 \right\}^{-1}, \quad (7)$$

其中  $\mu$  为化学势,  $k$  为玻尔兹曼常数,  $T$  为热力学温度.当原子聚集于同一量子态上,原子的波函数相关时,就称其发生了 BEC,而这个量子态的本征能量并未限定为基态能量.无外场时, BEC 发生的量子态既是能量的基态,又是动量的基态,而当外势存在时,原子的能量与空间位置有关,凝聚不在能量的基态,当温度愈来愈低时,理想玻色气体中大量原子的动量越来越接近于零.所以,理想玻色气体在外势场中的凝聚应该发生在动量的基态<sup>[21]</sup>.考虑到满足 Thomas-Fermi 近似时,对所有量子态的求和,可用对粒子相空间中的积分代替,则当  $T < T_c$  时,势阱中的粒子数密度分布可以表示为

$$\begin{aligned}n(r, T) &= n_0(r, T) + \int_0^\infty \langle n \rangle D(p) dp \\ &= n_0(r, T) + \frac{g\gamma}{h^\gamma} \frac{\pi^{\gamma/2}}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2} + 1\right)} \left(\frac{kT}{\varepsilon_0}\right)^{\gamma/s} \\ &\quad \times \frac{2}{s} I\left(\frac{2\gamma}{s} - 1\right) \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{j^{\gamma/s}} e^{-j \frac{(u(r)-\mu)}{kT}},\end{aligned}\quad (8)$$

式中  $n_0(r, T)$  表示温度为  $T$  时,势阱位置  $r$  处动量基态上的粒子数密度,即原子激光器中的粒子数密度增益.第二项表示处于激发态的粒子数密度,其中  $I\left(\frac{2\gamma}{s} - 1\right) = \int_0^\infty t^{\frac{2\gamma}{s}-1} e^{-t^2} dt$ . (8) 式说明,  $n(r, T)$  一定的情况下,囚禁势愈强,处于激发态的粒子数愈少,则凝聚于动量基态的粒子数愈多.

无外场时,理想玻色气体的粒子数密度与空间位置无关,记为  $n(T)$ ,并将其临界温度记为  $T_c^0$ .取  $u(r) = 0, T = T_c^0$ ,此时  $\mu = 0, n_0 = 0$ ,则由(8)式可以将无外场时,理想玻色气体的粒子数密度表示为

$$\begin{aligned}n(T_c^0) &= \frac{g\gamma}{h^\gamma} \frac{\pi^{\gamma/2}}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2} + 1\right)} \left(\frac{kT_c^0}{\varepsilon_0}\right)^{\gamma/s} \\ &\quad \times \frac{2}{s} I\left(\frac{2\gamma}{s} - 1\right) \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{j^{\gamma/s}}.\end{aligned}\quad (9)$$

利用(8)和(9)式,求得

$$\begin{aligned}\frac{n_0(r, T)}{n(r, T)} &= 1 - \frac{n(T_c^0)}{n(r, T)} \left(\frac{T}{T_c^0}\right)^{\gamma/s} \\ &\quad \times \frac{1}{\sum_{j=1}^\infty \frac{1}{j^{\gamma/s}}} \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{j^{\gamma/s}} e^{-j \frac{(u(r)-\mu)}{kT}}.\end{aligned}\quad (10)$$

由于发生 BEC 时,凝聚于基态的粒子分数满足  $0 \leq \frac{n_0(r, T)}{n(r, T)} \leq 1$ ,考虑到低温下的主要贡献来自  $j=1$  的项,由(10)式可得

$$kT \left[ 1 + \ln z - \frac{n(r, T)}{n(T_c^0)} \left( \frac{T_c^0}{T} \right)^{\gamma/s} \right] \leq \sum_{i=1}^{\gamma} u_i \left| \frac{r_i}{L_i} \right|^{t_i} \leq kT(1 + \ln z). \quad (11)$$

式中  $z$  为逸度,  $z = e^{\frac{\mu}{kT}}$ . (11) 式是  $\gamma$  维势阱中, 理想玻色气体发生 BEC 时, 空间有效范围的约束关系, 因而也是原子激光器中空间有效增益范围的约束关系.

## 4. 讨 论

### 4.1. 原子激光器的空间有效增益范围 (BEC 的空间有效范围)

(11) 式说明, 在发生 BEC 的条件下, 原子实现 BEC 的空间范围并不是一个可以任意调节的参数, 只能介于 (11) 式所限定的某个确定空间区域内. 由此可以得到, 原子激光器中原子数增益的空间坐标最小值 (BEC 的空间最小范围) 满足约束

$$\sum_{i=1}^{\gamma} u_i \frac{|r_i|_{\min}^{t_i}}{L_i^{t_i}} = kT \left[ 1 + \ln z - \frac{n(r, T)}{n(T_c^0)} \left( \frac{T_c^0}{T} \right)^{\gamma/s} \right]. \quad (12)$$

原子数增益的空间坐标最大值 (BEC 的空间最大范围) 满足约束

$$\sum_{i=1}^{\gamma} u_i \frac{|r_i|_{\max}^{t_i}}{L_i^{t_i}} = kT(1 + \ln z). \quad (13)$$

(12) 式是 BEC 即将开始发生时,  $\frac{n_0(r, T)}{n(r, T)} = 0$  所限制的空间范围约束, 它告诉我们, 凝聚开始, 凝聚的粒子分数最小时, 则其凝聚的空间范围也为最小. 小于 (12) 式限定的空间凝聚范围不可能出现.

(13) 式是在满足凝聚的强极限条件  $\frac{n_0(r, T)}{n(r, T)} = 1$  时, BEC 所限制的空间最大范围约束. 大于 (13) 式限制的凝聚范围也是不可能出现的. 可见随着凝聚的粒子分数的不断增加, 凝聚的空间范围也在增大. (11) 式的意义在于, 它给出了原子激光器输出相干原子束空间线度的约束范围及其相关的因素.

### 4.2. 温度的影响

在发生 BEC 的条件下,  $T < T_c$ , 在考虑近似条件

$z \approx 1$  的情况下, 由 (11) 式可以得到

$$kT \left[ 1 - \frac{n(r, T)}{n(T_c^0)} \left( \frac{T_c^0}{T} \right)^{\gamma/s} \right] \leq \sum_{i=1}^{\gamma} u_i \left| \frac{r_i}{L_i} \right|^{t_i} \leq kT. \quad (14)$$

(14) 式反映了空间有效增益范围与温度之间的关系. 其中  $\sum_{i=1}^{\gamma} u_i \left| \frac{r_i}{L_i} \right|^{t_i} \leq kT$ , 正好反映了满足 Thomas-Fermi 近似时, 粒子在势阱中的势能和热运动能量之间应满足的关系.

保持其他条件不变时, 随着温度降低, 凝聚于基态的粒子数将会增多. 在原子激光器中, 总希望有较大的粒子数增益, 单纯考虑基态的粒子数增益时, 需要降低温度. 而由  $\sum_{i=1}^{\gamma} u_i \left| \frac{r_i}{L_i} \right|^{t_i} \leq kT$  可知, 势阱给定时, 降低温度可以缩小发生 BEC 的空间最大范围. 若激光器对空间增益范围有要求或限制时, 则其温度的影响需要综合考虑, 进行优化.

### 4.3. 势阱性质的影响

文献[21]的研究表明, 增加势阱强度时, 可以增加势阱中囚禁的最大总粒子数. 这说明, 在保证粒子数装入的情况下, 增加势阱强度, 可使  $n(r, T)$  增大, 由 (12) 式可知, 若保持温度和逸度不变时, 这将使得空间最小增益范围减小. 由 (13) 式可以看出, 若保持  $T, z$  不变, 增加势阱强度 (即  $u_i$  增加) 时, 空间最大增益范围也将减小. 另外, 保持  $T, z$  不变时, 空间维数将会影响空间最小增益范围和最大增益范围, 而粒子的能动能量关系 (指数  $s$ ) 只影响空间最小增益范围. 在一维势阱  $u(x) = \frac{u}{L^t} |x|^t$  中,

$$|x|_{\max} = \left[ \frac{L^t kT}{u} \right]^{1/t}. \quad (15)$$

在二维对称势阱  $u(x, y) = \frac{u}{L^t} (|x|^t + |y|^t)$  中,

$$|x|_{\max}^t + |y|_{\max}^t = \frac{L^t}{u} kT. \quad (16)$$

### 4.4. 谐振势阱中的情况

考虑一个三维  $(x, y, z)$  空间中的球对称谐振势

$$u(r) = \frac{m}{2} \omega^2 (x^2 + y^2 + z^2), \quad (17)$$

其中  $m$  为粒子质量,  $\omega$  为势场圆频率, 由 (12), (13) 及 (17) 式可得, 空间最小增益半径为

$$R_{\min} = \left[ \frac{2kT}{m\omega^2} \left( 1 + \ln z - \frac{n(r, T)}{n(T_c^0)} \left( \frac{T_c^0}{T_c} \right)^{\gamma/s} \right) \right]^{1/2}, \quad (18)$$

空间最大增益半径满足

$$R_{\max} = \left[ \frac{2}{m\omega^2} kT(1 + \ln z) \right]^{1/2}. \quad (19)$$

若为非各向同性的椭球势

$$\begin{aligned} u(r) &= \frac{m}{2} \left[ \omega^2(x^2 + y^2) + \omega_z^2 z^2 \right] \\ &= \frac{m\omega^2}{2} (R^2 + \lambda^2 z^2), \end{aligned} \quad (20)$$

式中  $R$  表示与对称轴  $z$  正交的  $x$ - $y$  平面中势的作用范围,  $\lambda = \omega_z/\omega$ . 利用(13)式, 可以求得三维椭球势阱中的最大囚禁范围满足下式:

$$R^2 + \lambda^2 z^2 = \frac{2}{m\omega^2} kT(1 + \ln z). \quad (21)$$

(19)和(21)式说明, 在谐振势阱中, 空间有限增益范围, 不仅与温度有关, 还与势场的圆频率和发生 BEC 的原子质量密切相关, 这一点, 应该在原子激光器的研究中注意.

文献[22]报道了具有相互吸引作用的 $^7\text{Li}$ 原子气体的 BEC 实验. 实验中势阱的振动频率为  $\nu_z = 117 \pm 6 \text{ Hz}$ ,  $\nu_x = \nu_y = 163 \pm 15 \text{ Hz}$ , 在  $590 \text{ nK}$  的温度下, 原子气体沿着  $x$ - $y$  平面的囚禁半径大约为  $36 \mu\text{m}$ . 若采用本文从三维球对称谐振势得到的(19)式, 计算中近似取逸度  $z = 1$ ,  $T = 590 \text{ nK}$ ,  $\omega = 2\pi \times 163$ , 可以求得  $R_{\max} \approx 36.59 \mu\text{m}$ . 若采用椭球势条件下得到的(21)式, 采用球对称势时的参数计算取值  $\omega = 2\pi \times 163$ , 并取  $\omega_z = \omega/\sqrt{2}$ , 可以求得  $z$  坐标为零处,  $x$ - $y$  平面中的最大囚禁范围其值仍为  $R_{\max} \approx 36.59 \mu\text{m}$ , 而坐标  $z$  方向的最大囚禁范围为  $z_{\max} \approx 50.98 \mu\text{m}$ . 由此可见, 本文的结论可在一定程度上反映势阱囚禁原子气体空间范围的基本规律.

图1反映了在椭球势阱中,  $\omega$  一定时,  $x$ - $y$  平面中的囚禁半径与  $z$  坐标方向的囚禁范围以及参数  $\lambda$  的关系. 可以看出,  $\lambda$  的取值不影响  $z=0$  处  $x$ - $y$  平面中的最大囚禁半径.  $\lambda$  一定时, 随着  $z$  坐标的增加  $x$ - $y$  平面中的最大囚禁半径减小. 当  $z$  坐标超过一定值时, 确定  $z$  坐标处  $x$ - $y$  平面中的最大囚禁半径随

着  $\lambda$  增大的明显减小. 另外  $\lambda$  的取值, 直接影响  $z$  坐标方向的最大囚禁范围, 当  $\lambda$  增大时,  $z$  坐标方向的最大囚禁范围减小.

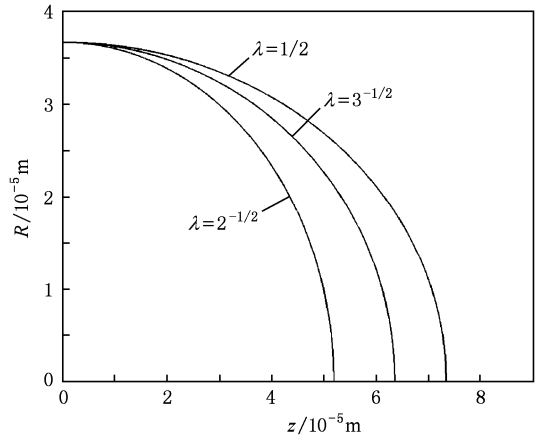


图1 椭球势阱中  $x$ - $y$  平面中的囚禁半径  $R$  与  $z$  方向的囚禁范围关系曲线

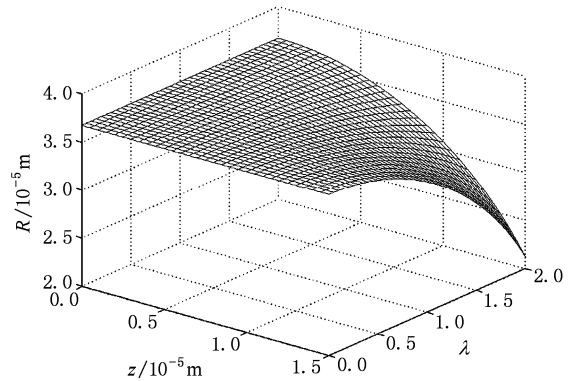


图2 椭球势阱中  $x$ - $y$  平面中的囚禁半径  $R$  与  $z$  方向的囚禁范围及  $\lambda$  的三维关系曲线

从图2可知, 当  $\lambda < 0.5$  时, 在  $z$  坐标小于  $1.5 \times 10^{-5} \text{ m}$  的范围内,  $x$ - $y$  平面中的最大囚禁半径基本不变. 而当  $\lambda > 0.5$  时, 当  $z$  坐标的增加时,  $x$ - $y$  平面中的最大囚禁半径逐渐减小. 当  $\lambda = 2$ ,  $z$  坐标大于  $0.5 \times 10^{-5} \text{ m}$  时,  $x$ - $y$  平面中的最大囚禁半径将迅速减小. 所以, 在椭球势阱中实现原子激光器时, 根据不同要求, 参数  $\lambda = \omega_z/\omega$  的恰当选择是必须认真考虑的因素.

- [1] Liu W M, Wu B, Niu Q 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 2294
- [2] Liu W M, Fan W B, Zheng W M, Liang J Q, Chui S T 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 170408
- [3] Yuan D Q 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1634 (in Chinese) [袁都奇 2006 物理学报 **55** 1634]
- [4] Kagan Y, Shlyapnikov G V, Walraven J T M 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 2670
- [5] Yan K Z, Tan W H 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1909 (in Chinese) [闫珂柱、谭维翰 2000 物理学报 **49** 1909]
- [6] Wang C, Yan K Z 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1284 (in Chinese) [王 翀、闫珂柱 2004 物理学报 **53** 1284]
- [7] Yu X C, Ye Y T, Cheng L 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 551 (in Chinese) [余学才、叶玉堂、程 琳 2006 物理学报 **55** 551]
- [8] Mewes M O, Andrews M R, Kurn D M, Durfee D S, Townsend C G, Ketterle W 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 582
- [9] Yin J L, Liu C Y, Yang Y Y, Liu J, Fan G H 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 356 (in Chinese) [殷建玲、刘承宜、杨友源、刘 江、范广涵 2004 物理学报 **53** 356]
- [10] Zhou M, Huang C G 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 54 (in Chinese) [周 明、黄春佳 2004 物理学报 **53** 54]
- [11] Li M, Sun J X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 2702 (in Chinese) [李 明、孙久勋 2006 物理学报 **55** 2702]
- [12] Mao B N, Pan B L, Chen G, Xia T T 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1793 (in Chinese) [毛邦宁、潘佰良、陈 钢、夏婷婷 2006 物理学报 **55** 1793]
- [13] Zhou Y X, Xia Q F, Sun C Y 2008 *J. At. Mol. Phys.* **25** 0633 (in Chinese) [周玉欣、夏庆峰、孙长勇 2008 原子与分子物理学报 **25** 0633]
- [14] Zhao J G, Sun C Y, Wen L H, Liang B L 2009 *Chin. Phys. B* **18** 2294
- [15] Qi R, Yu X L, Li Z B, Liu W M 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 185301
- [16] Ji C, Liu W M, Song J L, Zhou F 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 010402
- [17] Zhao J G, Sun C Y, Meng X G, Su J 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 6985 (in Chinese) [赵建刚、孙长勇、孟祥国、苏 杰 2009 物理学报 **58** 6985]
- [18] Zhao J G, Sun C Y, Liang B L, Su J 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4635 (in Chinese) [赵建刚、孙长勇、梁宝龙、苏 杰 2009 物理学报 **58** 4635]
- [19] Zong F D, Yang Y, Zhang J F 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3670 (in Chinese) [宗丰德、杨 阳、张解放 2009 物理学报 **58** 3670]
- [20] Li M Z, Chen L X, Chen C H 1999 *Phys. Rev. A* **59** 3109
- [21] Yu X C, Mo, Y 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 4075 (in Chinese) [余学才、莫 影 2004 物理学报 **53** 4075]
- [22] Bradley C C, Sackett C A, Tollet J J, Hulet R G 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 1687

## Valid gain range of space for atom laser\*

Yuan Du-Qi<sup>†</sup>

(Department of Physics and Information Technology, Baoji University of Sciences and Arts, Baoji 721007, China)

(Received 10 August 2009; revised manuscript received 17 December 2009)

### Abstract

The density of states for an ideal Bose gas in a  $\gamma$ -dimensional potential is obtained. Moreover, the spatial distribution of particle numerical density is derived in the Thomas-Fermi semiclassical approximation. On this basis, the valid gain range of space for atom laser (that is the valid trapped range of ideal Bose gas in  $\gamma$ -dimensional potential) is given, and the influence of some important factors is also discussed.

**Keywords:**  $\gamma$ -dimensional space, Bose-Einstein condensation, atom laser, valid gain range of space

**PACC:** 0530J, 0570F, 0600

\* Project supported by the Natural Science Foundation of the Shaanxi Province, China (Grant No. 2007A02) and the Science Foundation of Baoji University of Science and Arts, China (Grant No. ZK0914).

<sup>†</sup> E-mail: yuanduqi@163.com