

非关联噪声驱动的单稳系统的平均首次穿越时间*

何成娣[†] 徐 伟 岳晓乐

(西北工业大学应用数学系, 西安 710072)

(2009 年 9 月 7 日收到; 2009 年 12 月 7 日收到修改稿)

基于非对称双稳系统的理论研究了偏单稳系统的平均首次穿越时间问题, 并基于势函数分析了参数对平均首次穿越时间的影响. 得出结论: 1) 当偏稳系数为零时, 随着加性噪声强度和参数 a 的增加, 两个方向的平均首次穿越时间相等且均单调减小, 2) 随着偏稳系数 b 的增加, 势阱的对称性被破坏, 粒子由 x_{s1} 跃迁到 x_{s2} 的时间线性地减小, 而粒子由 x_{s2} 跃迁到 x_{s1} 的时间线性地增加. 3) 随着乘性噪声强度和加性噪声强度比率 R 的增加, 两个方向平均首次穿越时间均单调增加.

关键词: 平均首次穿越时间, 单稳系统, 加性噪声, 乘性噪声

PACC: 0540, 0250

1. 引 言

平均首次穿越时间 (mean first passage time, MFPT) 作为刻画逃逸问题的重要指标, 已成为人们关注的焦点. Madureira 等^[1] 发现噪声的关联性对激活率有很大的影响. Wang 等^[2] 发现噪声间的相关性会导致平均首次穿越时间对称性的破缺. 靳艳飞等^[3] 发现在非对称双稳系统中, 平均首次穿越时间对初始状态具有“记忆性”. 同时人们对不同类型关联噪声驱动的双稳系统的 MFPT 问题也做了大量研究^[4-10]. 王朝庆等^[11] 和赵燕等^[12] 还分别讨论了色关联噪声和非高斯噪声激励下的 FHN 神经元模型的 MFPT.

但以上都是基于双稳系统所做的研究, 单稳系统在实际中也广泛存在并且已有一些研究^[13-17]. Stocks 等^[14,15] 基于线性响应理论和波动耗散理论研究了单稳系统的零耗散-随机共振问题. Guo 等^[16] 基于绝热近似理论给出单稳系统的信噪比表达式, 并发现信噪比随参数变化出现非单调行为, Zhou 等^[17] 在其基础上研究了混合周期信号激励的单稳系统的随机共振. 但对于单稳系统的平均首次穿越时间的研究却很少. 本文通过将单稳系统转化为与其等价的双稳系统来研究单稳系统的平均首次穿越时间随参数的变化, 并基于势函数对变化做了

分析.

2. 偏单稳系统及其平均首次穿越时间

考虑如下由乘性和加性白噪声驱动的过阻尼单稳系统^[13]

$$\frac{dx}{dt} = -ax^3 + b + x\xi(t) + \eta(t), \quad (1)$$

$a > 0$ 为常数, $b > 0$ 为偏稳系数. $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 分别表示均值为零的乘性和加性白噪声, 具有如下统计性质:

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2D\delta(t-t'),$$

$$\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = 2Q\delta(t-t'), \quad (2)$$

$$\langle \xi(t)\eta(t') \rangle = \langle \xi(t')\eta(t) \rangle = 0, \quad (3)$$

D 和 Q 分别为乘性和加性噪声的噪声强度.

通过方程(1)–(3)可以得到该系统的福克-普朗克方程如下:

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = \left[-\frac{\partial}{\partial x} A(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} B(x) \right] \times \rho(x,t), \quad (4)$$

这里, $A(x) = Dx - ax^3 + b$, $B(x) = Dx^2 + Q$.

从而由方程(4)得系统的稳态概率密度函数为

$$\rho_{st}(x) = \frac{N}{\sqrt{B(x)}} \exp \left[-\frac{U(x)}{D} \right], \quad (5)$$

* 国家自然科学基金(批准号:10872165)资助的课题.

[†] E-mail: sunnyhechengdi@126.com

其中 N 是归一化常数, $U(x)$ 是广义势函数, 且具有形式

$$\begin{aligned} U(x) &= \int_{-\infty}^x \frac{D}{B(x)} [V'(x)] dx \\ &= \frac{a}{2} x^2 - \frac{aQ + D^2}{2D} \ln \left| x^2 + \frac{Q}{D} \right| \\ &\quad - \frac{b}{\sqrt{Q/D}} \arctan \left(\frac{x}{\sqrt{Q/D}} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

其中

$$V'(x) = \frac{dV}{dx} = ax^3 - Dx - b. \quad (7)$$

由方程(6)和(7), 当 $D \neq 0$ 时, 可以把此单稳系统看成一个与其等价的非对称双稳系统, 但 a, b 和 D 必须满足关系式 $a < \frac{4D^3}{27b^2}$. 进而通过解方程 $V'(x) = 0$ 可得系统的两个稳定点和一个不稳定点分别为

$$\begin{aligned} x_{s1} &= -2 \sqrt{\frac{D}{3a}} \cos \left\{ \frac{1}{3} \arccos \left[\frac{b}{2 \sqrt{\left(\frac{D}{3a}\right)^3}} \right] - \frac{\pi}{3} \right\}, \\ x_{s2} &= 2 \sqrt{\frac{D}{3a}} \cos \left\{ \frac{1}{3} \arccos \left[\frac{b}{2 \sqrt{\left(\frac{D}{3a}\right)^3}} \right] \right\}, \\ x_u &= -2 \sqrt{\frac{D}{3a}} \cos \left\{ \frac{1}{3} \arccos \left[\frac{b}{2 \sqrt{\left(\frac{D}{3a}\right)^3}} \right] + \frac{\pi}{3} \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

粒子由 x_{s1} 跃迁到 x_{s2} 的平均首次穿越时间定义为

$$\begin{aligned} T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2}) &= \int_{x_{s1}}^{x_{s2}} \frac{dx}{B(x)\rho_{st}(x)} \int_{-\infty}^x dy \rho_{st}(y), \end{aligned} \quad (9)$$

粒子由 x_{s2} 跃迁到 x_{s1} 的平均首次穿越时间定义为

$$\begin{aligned} T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1}) &= \int_{x_{s2}}^{x_{s1}} \frac{dx}{B(x)\rho_{st}(x)} \int_x^{+\infty} dy \rho_{st}(y), \end{aligned} \quad (10)$$

由快速下降法^[18] 可得该系统的两个不同方向的平均首次穿越时间为

$$\begin{aligned} T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2}) &= 2\pi \left| [-D + 3ax_{s1}^2] [-D + 3ax_u^2] \right|^{-1/2} \\ &\quad \times \exp \left\{ \frac{1}{D} [U(x_u) - U(x_{s1})] \right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1}) &= 2\pi \left| [-D + 3ax_{s2}^2] [-D + 3ax_u^2] \right|^{-1/2} \\ &\quad \times \exp \left\{ \frac{1}{D} [U(x_u) - U(x_{s2})] \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

3. 讨 论

为了更好地研究 MFPT, 首先讨论广义势函数随参数的变化情况. 如图 1(a), 随着 a 的增加, 势阱的深度和宽度均减小, 双稳性减弱; 图 1(b) 中, 随着 b 的增加, 势阱的对称性被破坏, 因此 b 代表了势阱的非对称性. 图 2(a) 中, 随着乘性噪声强度的增大, 势阱的深度和宽度均增加, 双稳性增强; 图 2(b) 中, 随着加性噪声强度的增加, 势阱的宽度增加, 但势垒降低, 且势垒降低的幅度比阱宽度增加的幅度大, 因此势阱的双稳性减弱了. 以下分析图 3—6. 因为 a, b 和 D 满足一定的关系时势函数才是双稳的, 因此以下不考虑平均首次穿越时间作为乘性噪声强度的函数随参数的变化.

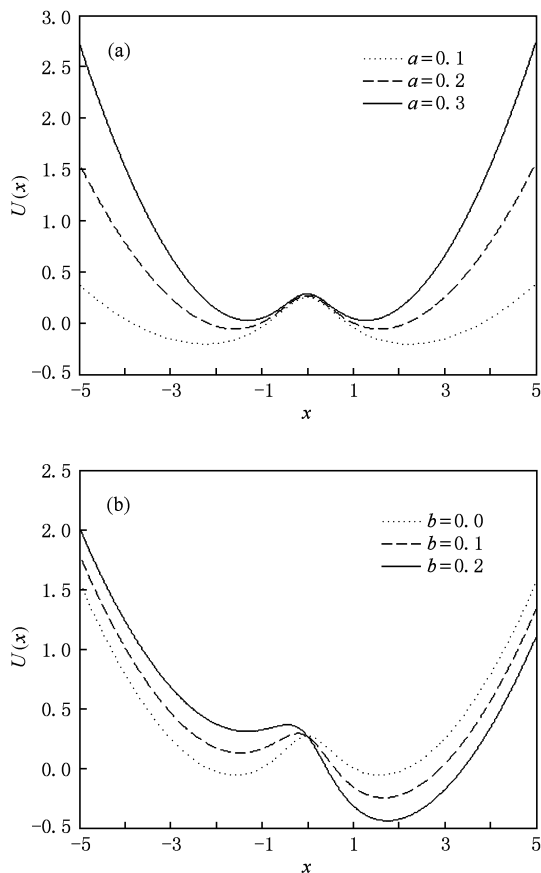


图 1 广义势函数随着参数 a 和 b 的变化 $D=0.5, Q=0.2$ (a) $b=0.0$; (b) $a=0.2$

图 3 给出了 MFPT 作为加性噪声强度 Q 的函数随不同的势阱非对称性 b 的变化. 由图可见, T_+ 和 T_- 随着加性噪声强度 Q 的增加而单调减小, 这是因为由图 2(b), 随着 Q 的增加, 势阱的双稳性减弱,

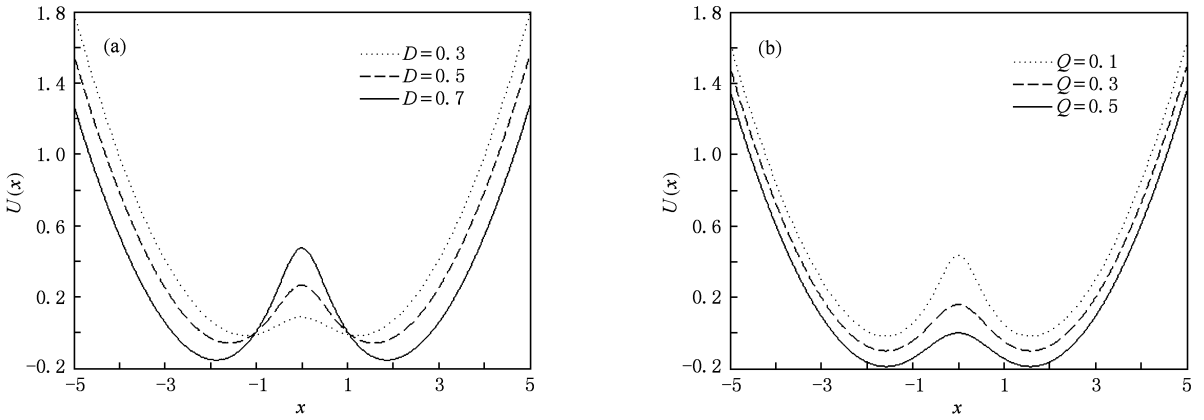


图 2 广义势函数随着噪声强度 D 和 Q 的变化 $a=0.2, b=0.0$ (a) $Q=0.2$; (b) $D=0.5$

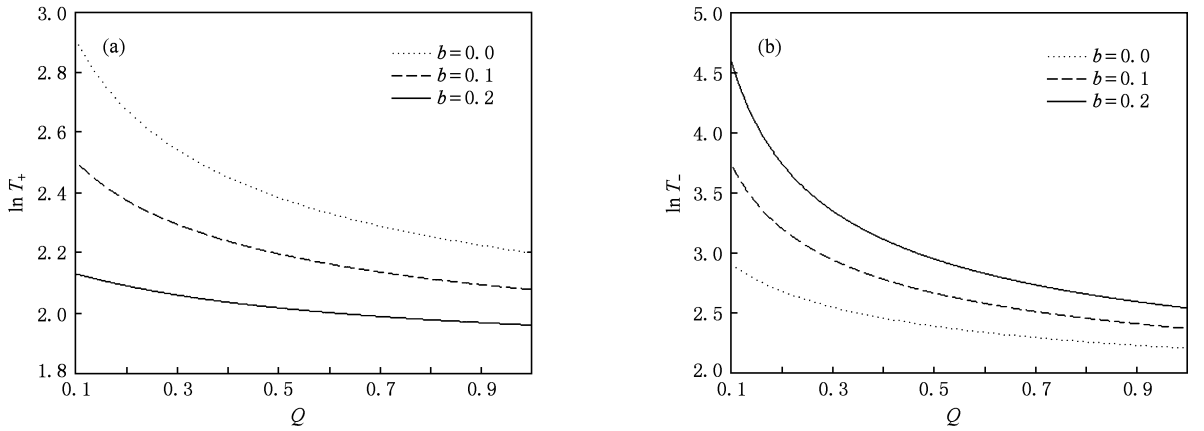


图 3 MFPT 作为加性噪声强度的函数随偏稳系数 b 的变化 ($D=0.5, a=0.1$)

因此粒子由 x_{s1} 跃迁到 x_{s2} 和由 x_{s2} 跃迁到 x_{s1} 的时间都减小了. 但随着 b 的增加, T_+ 单调减小, 而 T_- 单调增加, 且两图中对应 $b=0.0$ 的曲线是一致的. 因为由图 1(b), $b=0.0$ 时, 势阱是对称的, 故 $T_+ = T_-$;

当 $b > 0$ 时, 势阱的对称性被破坏, 左边的势垒降低, 右边的势垒升高, 因此粒子由 x_{s1} 跃迁到 x_{s2} 的时间 T_+ 减小, 而粒子由 x_{s2} 跃迁到 x_{s1} 的时间 T_- 增加了.

图 4 给出了平均首次穿越时间作为加性噪声强

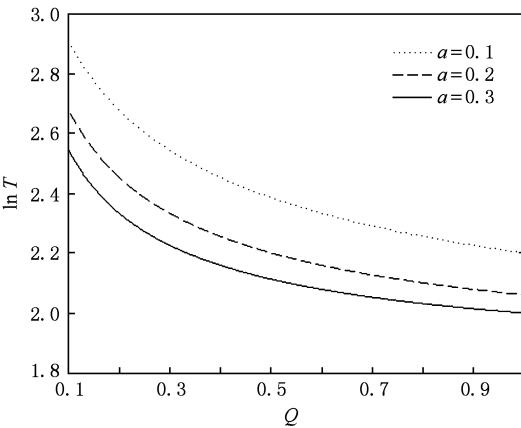


图 4 MFPT 作为加性噪声强度 Q 的函数随参数 a 变化的曲线 ($D=0.5, b=0.0$)

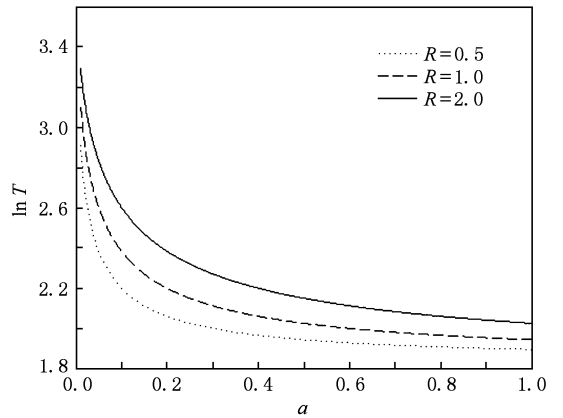
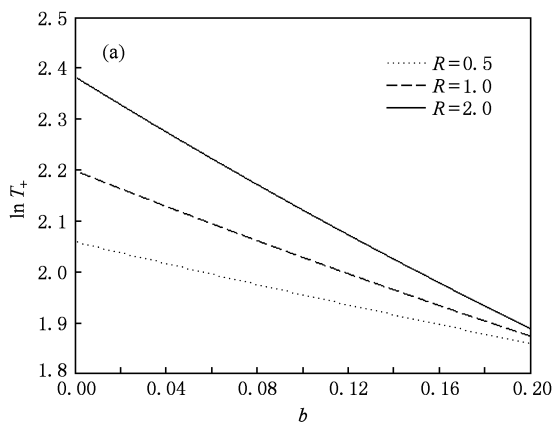


图 5 MFPT 作为参数 a 的函数随噪声强度比率 R 的变化曲线 ($D=0.5, b=0.0$)

度 Q 的函数随着 a 的变化曲线. 因为 $b = 0.0$, 故 $T_+ = T_-$. 随着 Q 和 a 的增加, 平均首次穿越时间均单调减小, 这是因为由图 1(a), 势阱的高度和深度随着 a 的增加都减小了, 因此粒子在两稳定点之间跃迁所需的时间也减小了.

图 5 给出了 MFPT 作为参数 a 的函数随乘性噪声强度和加性噪声强度的比率 $R = D/Q$ 变化的曲线. 同样取 $b = 0.0$, 因此 $T_+ = T_-$. 随着 a 的增加, 平均首次穿越时间单调减小, 由图 1(a) 可解释. 当 R 依次取 0.5, 1.0 和 2.0 时, 平均首次穿越时间单调增加, 这是因为由图 2, 势阱的双稳性随着加性噪声



强度 Q 的增加而减弱, 随着乘性噪声强度 D 的增加而增强, 因此当 R 增加时, 势阱的双稳性增强.

图 6 分别给出了不同方向的 MFPT 作为势阱非对称性 b 的函数随噪声比率 R 的变化. 很明显, $\ln T_+$ 与偏稳系数 b 呈线性关系, 随着 b 的增加, T_+ 单调减小, T_- 单调增加, 这是因为 b 的增加破坏了势阱的对称性. 但随着 R 的增加, T_+ 和 T_- 均单调增加, 解释同前. 这里所得出的结论与文献 [3] 非对称双稳系统中, $\ln T_- - r$ 曲线上存在一个极小值形成抑制平台的结论是不同的.

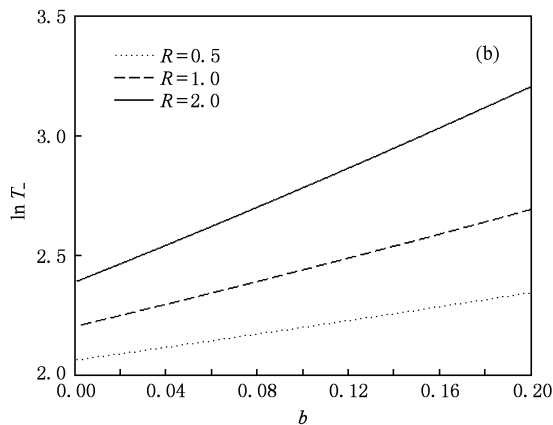


图 6 MFPT 作为偏稳系数 b 的函数随噪声比率 R 的变化 ($D = 0.5, a = 0.2$)

4. 结 论

通过以上对非关联噪声驱动的单稳系统的平均首次穿越时间的讨论, 看出单稳系统的 MFPT 有其自己的特点, 与非对称双稳系统的平均首次穿越时间有很多不同, 尽管我们是用基于非对称双稳系统的理论做的讨论. 其主要结论如下: 1) 随着参数 b 的增加, 势阱的对称性被破坏. 说明与非对称双稳系统一样, b 代表了势阱的非对称性. 2) 当 $b = 0$ 时,

随着加性噪声强度 Q 和参数 a 的增加, $T_+ = T_-$ 且均单调减小, 因为势垒的高度随着 Q 和 a 的增加减弱了. 3) $\ln T_+$ 与偏稳系数 b 呈线性关系, 随着 b 的增加, T_+ 单调减小, T_- 单调增加, 这是因为 b 的增加破坏了势阱的对称性, 导致左右势垒高度不等, 因此粒子在两个稳定态间跃迁所需时间不同. 4) 随着加性噪声强度和乘性噪声强度比率 R 的增加, T_+ 和 T_- 均单调增加. 5) 鉴于以上的结论, 我们可以通过增加噪声比率或减小参数 a 和 b 的值来提高系统准稳态的寿命.

- [1] Madureira A J R, Hanggi P, Wio H S 1996 *Phys. Lett. A* **271** 248
 [2] Wang J, Cao L, Wu D J 2003 *Phys. Lett. A* **308** 23
 [3] Jin Y F, Xu W, Ma S J, Li W 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3480 (in Chinese) [靳艳飞、徐伟、马少娟、李伟 2005 物理学报 **54** 3480]
 [4] Jia Y, Li J R 1996 *Phys. Rev. E* **53** 5764

- [5] Ning L J, Xu W, Yang X L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 25 (in Chinese) [宁丽娟、徐伟、杨晓丽 2007 物理学报 **56** 25]
 [6] Zhang N M, Xu W, Wang C Q 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5083 (in Chinese) [张娜敏、徐伟、王朝庆 2007 物理学报 **56** 5083]
 [7] Jin Y F, Xu W 2005 *Chaos, Solitons and Fractals* **23** 275
 [8] Luo X Q, Zhu S Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 977 (in Chinese) [罗晓琴、朱士群 2002 物理学报 **51** 977]

- [9] Xie C W, Mei D C 2003 *Chin. Phys.* **12** 1208
- [10] Zhang X Y, Xu W 2007 *Chin. Phys.* **16** 0928
- [11] Wang Z Q, Xu W, Zhang N M, Li H Q 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 749 (in Chinese) [王朝庆、徐伟、张娜敏、李海泉 2008 物理学报 **57** 749]
- [12] Zhao Y, Xu W, Zou S C 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 1396 (in Chinese) [赵燕、徐伟、邹少存 2009 物理学报 **58** 1396]
- [13] Vilar J M G, Rubi J M 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 2863
- [14] Stocks N G, Stein N D, Soskin S M, McClintock P V E 1992 *J. Phys. A: Math. Gen.* **25** L1119
- [15] Stocks N G, Stein N D, McClintock P V E 1993 *J. Phys. A: Math. Gen.* **26** L385
- [16] Guo F, Zhou Y R, Jiang S Q, Gu T X 2006 *J. Phys. A: Math. Gen.* **39** 13861
- [17] Zhou B C, Xu W 2007 *Chaos, Solution and Fractals* **40** 401
- [18] Hu G 1994 *Stochastic Forces and Nonlinear System* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) (in Chinese) [胡岗 1994 随机力与非线性系统 (上海:上海科技教育出版社)]

The mean first-passage time in a mono-stable system driven by uncorrelated noises*

He Cheng-Di[†] Xu Wei Yue Xiao-Le

(Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

(Received 7 September 2009; revised manuscript received 7 December 2009)

Abstract

In this paper, the mean first-passage time (MFPT) in a biased mono-stable system is investigated on the basis of the theory used in an asymmetric bistable system. The effects of parameters on MFPT are also analyzed based on the generalized potential function. The results show that, first, with parameter a and additive noise intensity Q increasing, the MFPTs in two directions both decrease on condition that bias parameter b is equal to zero; second, the time in which the particle jumps from x_{s1} to x_{s2} linearly decreases while the time in which the particle jumps from x_{s2} to x_{s1} linearly increases, owing to the fact that the symmetry of potential well is broken by the increase of bias parameter b ; finally, the MFPTs in two directions monotonically increase as the ratio of multiplicative noise intensity to the additive noise intensity increases.

Keywords: mean first passage time, mono-stable system, additive noise, multiplicative noise

PACC: 0540, 0250

* Project supported by the National Science Foundation of China (Grant No. 10872165).

[†] E-mail: sunnyhechengdi@126.com