

# 基于自适应-脉冲控制方法实现 时变耦合驱动-响应复杂网络的投影同步\*

曾长燕 孙梅<sup>†</sup> 田立新

(江苏大学非线性科学研究中心, 镇江 212013)

(2009 年 10 月 23 日收到; 2009 年 12 月 9 日收到修改稿)

最近, 对时变延迟网络的脉冲稳定性的研究大量出现, 但通过自适应-脉冲控制方法获得的时变延迟网络同步准则却很少. 本文中, 运用自适应-脉冲控制方法, 设计自适应反馈控制器、自适应律和线性脉冲控制器, 研究时变耦合部分线性系统驱动-响应复杂网络的投影同步. 获得时变耦合网络的自适应-脉冲投影同步准则. 并且不需要网络的耦合构造矩阵是不可约的. 另外, 运用数值模拟证实方案的有效性和可行性.

**关键词:** 复杂网络, 投影同步, 时变耦合, 自适应-脉冲控制

**PACC:** 0545

## 1. 引 言

许多现实系统可以用复杂网络来描述, 如 Internet, WWW, 细胞网络, 新陈代谢网等等<sup>[1-5]</sup>. 复杂网络中有趣的现象之一是所有动力节点的同步. 许多同步方法已被研究, 如完全同步<sup>[6]</sup>, 滞后同步<sup>[7]</sup>, 投影同步<sup>[8]</sup>, 广义同步<sup>[9]</sup>. 其中, 由比例因子刻画的投影同步是广义同步中的一种.

实际中, 网络结构仅部分已知或完全未知, 很难得到耦合强度的精确估计. 因此, 通过自适应方法研究同步成为一种重要方法. 大量文章已讨论了网络的自适应同步<sup>[10-14]</sup>.

另一方面, 脉冲式控制允许仅使用少量控制脉冲, 就能使系统达到稳定和同步. 仅在离散脉冲瞬间, 驱动系统就会发送同步脉冲到响应系统, 这样就可以减少在传输信号中的信息冗余, 并且增加了抗干扰的鲁棒性. 脉冲控制的主要思想是只要满足一些条件, 就会改变系统的状态. 近年来, 脉冲控制同步已被大量研究<sup>[15-18]</sup>.

由于传播的有限速度或交通堵塞, 在信息传输过程中有一些时间延迟. 在生物和物理网络中, 时间延迟是非常常见的. 在复杂网络模型中, 考虑时

间延迟更符合实际. 许多文章已讨论了时变延迟网络的脉冲稳定性<sup>[19-22]</sup>, 但运用自适应-脉冲控制方法获得的关于时变延迟网络同步准则却很少.

受到以上讨论的启发, 结合脉冲控制和自适应控制方法, 基于脉冲微分方程稳定性理论, 设计简单的连续输入和线性脉冲控制器, 研究时变延迟耦合部分线性系统驱动-响应网络的投影同步. 建立时变耦合网络的自适应-脉冲投影同步准则. 并且不需要耦合构造矩阵是不可约的. 此外, 运用数值模拟证实方案的有效性.

## 2. 问题的建立

在文献[14]中, 引入时变耦合部分线性系统的驱动-响应动力网络模型

$$\begin{aligned} \dot{w}^d(t) &= M(z) \cdot w^d(t), \\ \dot{z}(t) &= f(w^d(t), z(t)), \\ \dot{w}_i^r(t) &= M(z) \cdot w_i^r(t) \\ &+ \sum_{j=1}^N c_{ij} A w_j^r(t - \tau(t)) \\ &+ u_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N, \end{aligned} \quad (1)$$

上标 d 和 r 分别代表驱动和响应网络系统.  $u_i \in R^n$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) 是控制输入.

\* 国家自然科学基金(批准号:90610031), 教育部基金(批准号:09YJA90088)资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯联系人. E-mail: sunm@ujs.edu.cn (M. Sun).

$w_i^r (i=1, 2, \dots, N)$  代表响应网络系统的  $n$  维状态变量.  $N$  是耦合节点的数目.  $\tau(t)$  是时变耦合延迟.  $A \in R^{n \times n}$  是内耦合矩阵,  $C = (c_{ij})_{N \times N}$  是耦合构造矩阵. 如果节点  $i$  和节点  $j (j \neq i)$  有连接, 那么  $c_{ij} \neq 0$ ; 否则,  $c_{ij} = 0$ , 矩阵  $C$  的对角元素定义为

$$c_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N c_{ij}, (1 \leq i \leq N).$$

我们的目标是将脉冲控制和自适应控制方法相结合, 实现时变耦合部分线性系统的驱动-响应动力网络的投影同步.

定义同步误差  $e_i(t) = w_i^r - \lambda w^d$  ( $\lambda$  是比例因子). 在自适应-脉冲控制下, 网络受控状态满足系统

$$\dot{w}^d(t) = M(z) \cdot w^d(t),$$

$$\dot{z}(t) = f(w^d(t), z(t)),$$

$$\dot{w}_i^r(t) = M(z) \cdot w_i^r(t)$$

$$+ \sum_{j=1}^N c_{ij} A w_j^r(t - \tau(t)) + u_i, \quad t \neq t_k,$$

$$\Delta w_i^r = w_i^r(t_k^+) - w_i^r(t_k^-)$$

$$= B_{i_k} [w_i^r - \lambda w^d], \quad t = t_k, \quad (2)$$

其中  $k=1, 2, \dots, i=1, 2, 3, \dots, N$ ,  $w_i^r(t_k^+)$  是  $w_i^r(t_k)$  在  $t=t_k$  时刻的右极限,  $w_i^r(t_k^-) = w_i^r(t_k)$ ,  $\{t_k\}$  满足  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots, t_k \rightarrow \infty$ .  $B_{i_k}$  是一个  $n \times n$  的常矩阵. 比例因子  $\lambda$  是希望值.

那么误差动力系统如下:

$$\dot{e}_i(t) = M(z) \cdot e_i(t)$$

$$+ \sum_{j=1}^N c_{ij} A e_j(t - \tau(t)) + u_i, \quad t \neq t_k,$$

$$\Delta e_i = B_{i_k} e_i, \quad t = t_k, k = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

误差系统(3)的稳定性可以确保系统(2)实现投影同步.

**假设 1** 时间延迟  $\tau(t)$  是微分函数, 且  $0 \leq \dot{\tau}(t) \leq \delta < 1$ . 易看出, 如果耦合延迟  $\tau(t)$  是常数, 假设仍成立.

**引理 1**<sup>[23]</sup> 对于任意向量  $x, y \in R^n$  和正定矩阵  $Q \in R^{n \times n}$ , 下面矩阵不等式成立:

$$2x^T y \leq x^T Q x + y^T Q^{-1} y.$$

连续控制输入  $u_i$  是如下定义的自适应-反馈控制器

$$u_i = -d_i e_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (4)$$

且自适应律为

$$\dot{d}_i = k_i e_i^T e_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (5)$$

其中  $k_i > 0$  是任意常数.

### 3. 自适应-脉冲投影同步

选择自适应反馈控制器和线性脉冲控制器使系统(2)实现投影同步. 根据参考文献[24]中定理 3.1, 获得了网络同步准则, 推导如下.

**定理** 设  $\mu$  是  $M^T(z) + M(z)$  最大特征值的上确界,  $\alpha = \lambda_{\max}(AA^T) \cdot \max(c_{ij}^2)$ , ( $1 \leq i, j \leq N$ ).  $d$  是初始反馈强度  $d_0$  ( $1 \leq i \leq N$ ) 的最小值且满足

$$\mu + \alpha + \frac{1}{1 - \delta} - 2d > 0, \quad (6)$$

网络(2)实现投影同步, 如果满足以下条件:

$$1) 0 < \tau(t) \leq t_{k+1} - t_k \leq l, \quad (7)$$

$$2) \max_k (\|I + B_{i_k}\|^2) = \rho_k, \quad (8)$$

3) 存在  $r > 0$ , 使得

$$\left( \mu + \alpha + \frac{1}{1 - \delta} - 2d + r \right) l + \ln \left( \rho_k + \frac{l}{1 - \delta} \right) \leq 0, \quad (9)$$

其中  $I \in R^{n \times n}$  表示单位阵.  $\lambda_{\max}(\cdot)$  是最大特征值.  $\lambda_{\min}(\cdot)$  是最小特征值.

**证明** 因为  $\dot{d}_i = k_i e_i^T e_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , 有  $d_i \geq d_{i0}$ .  $d_{i0}$  是  $d_i$  的初始值. 构造以下 Lyapunov 泛函:

$$V(t) = \sum_{i=1}^N e_i^T(t) e_i(t) + \frac{1}{1 - \delta} \int_{t-\tau(t)}^t \sum_{i=1}^N e_i^T(s) e_i(s) ds, \quad (10)$$

其中

$$V_1(t) = \sum_{i=1}^N e_i^T(t) e_i(t),$$

$$V_2(t) = \frac{1}{1 - \delta} \int_{t-\tau(t)}^t \sum_{i=1}^N e_i^T(s) e_i(s) ds,$$

则  $V(t) = V_1(t) + V_2(t)$ , 有

$$\sum_{i=1}^N e_i^T(t) e_i(t) \leq V_1(t) \leq \sum_{i=1}^N e_i^T(t) e_i(t),$$

$$0 \leq V_2(t) \leq \frac{\tau(t)}{1 - \delta} \sum_{i=1}^N \|e_i\|_i^2, \quad (11)$$

其中  $\|e_i\|_i \triangleq \sup_{t-\tau(t) \leq s \leq t} \|e_i(s)\|$ .

因为  $0 < \tau(t) \leq t_{k+1} - t_k \leq l$ , 得出

$$0 \leq V_2(t) \leq \frac{l}{1 - \delta} \sum_{i=1}^N \|e_i\|_i^2, \quad (12)$$

对  $t \neq t_k$ , 运用引理 1 和假设 1, 沿着轨道(3)得  $V(t)$  的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \sum_{i=1}^N e_i^T(t) [M(z) + M^T(z)] e_i(t) + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{ij} e_i^T(t) A e_j(t - \tau(t)) \\ &\quad - 2 \sum_{i=1}^N d_i e_i^T(t) e_i(t) + \frac{1}{1-\delta} \sum_{i=1}^N e_i^T(t) e_i(t) - \frac{1-\dot{\tau}(t)}{1-\delta} \sum_{i=1}^N e_i^T(t - \tau(t)) e_i(t - \tau(t)) \\ &\leq \mu \sum_{i=1}^N e_i^T(t) e_i(t) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{ij}^2 e_i^T(t) A A^T e_i(t) + \sum_{j=1}^N e_j^T(t - \tau(t)) e_j(t - \tau(t)) \\ &\quad - 2 \sum_{i=1}^N d_{i0} e_i^T(t) e_i(t) - \frac{1-\dot{\tau}(t)}{1-\delta} \sum_{i=1}^N e_i^T(t - \tau(t)) e_i(t - \tau(t)) + \frac{1}{(1-\delta)} \sum_{i=1}^N e_i^T(t) e_i(t) \\ &\leq \left[ \mu + \alpha + \frac{1}{1-\delta} - 2d \right] \sum_{i=1}^N e_i^T(t) e_i(t) = \left[ \mu + \alpha + \frac{1}{1-\delta} - 2d \right] V(t). \end{aligned}$$

选择适当初始值  $d$  使

$$\mu + \alpha + \frac{1}{1-\delta} - 2d > 0.$$

当  $t = t_k$  时,

$$\begin{aligned} V_1(t_k^+) &= \sum_{i=1}^N e_i^T(t) (I + B_{i_k})^T (I + B_{i_k}) e_i(t) \\ &\leq \rho_k \sum_{i=1}^N e_i^T(t) e_i(t) \leq \rho_k V_1(t_k). \end{aligned}$$

根据文献[24]中定理 3.1, 得出误差系统(3)在零点全局渐近稳定. 因此, 时变耦合部分线性系统的驱动-响应网络(2)实现投影同步. 证明完成.

### 4. 数值模拟

本节中, 考虑由统一混沌系统组成的网络作为例子来解释以上结果. 统一混沌系统<sup>[25]</sup>描述如下:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (25\theta + 10)(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 &= (28 - 35\theta)x_1 - x_1z + (29\theta - 1)x_2, \\ \dot{z} &= x_1x_2 - \frac{8 + \theta}{3}z, \end{aligned} \tag{13}$$

其中  $\theta \in [0, 1]$ , 当  $\theta = 0$  时, 它是 Lorenz 系统, 当  $\theta = 1$  时, 它是 Chen 系统.

基于统一混沌系统的驱动-响应动力网络方程描述为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (25\theta + 10)(y - x), \\ \dot{y} &= (28 - 35\theta - z)x + (29\theta - 1)y, \\ \dot{z} &= xy - \frac{8 + \theta}{3}z, \\ \dot{x}_i &= - (25\theta + 10)x_i + (25\theta + 10)y_i \\ &\quad + \sum_{j=1}^5 c_{ij} A x_j(t - \tau) + u_{i1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= (28 - 35\theta - z)x_i + (29\theta - 1)y_i \\ &\quad + \sum_{j=1}^5 c_{ij} A y_j(t - \tau) + u_{i2}, \end{aligned} \tag{14}$$

其中  $i = 1, 2, \dots, 5$ , 耦合构造矩阵

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

为简单起见, 设  $A = I_2$ , 选择  $\tau(t) = \frac{e^t}{20(1 + e^t)}$ ,

$\dot{\tau}(t) = \frac{e^t}{20(1 + e^t)^2} < \frac{1}{20}$ , 假设 1 成立. 数值模拟中, 选择  $\theta = 0.03$ , 初始值是  $(10, 6, 13, 0.4, 0.03, 2, 0.04, 1, 0.06, 4, 0.02, 2, 0.09)$ ,  $d_i = 15 (1 \leq i \leq 5)$ ,  $k_i = 20$ ,  $B_{i_k} = \text{diag}\{-1.2, -1.2\}$ . 设  $\mu = \sup\{\lambda_{\max}[M^T(z) + M(z)]\}$ , 其中

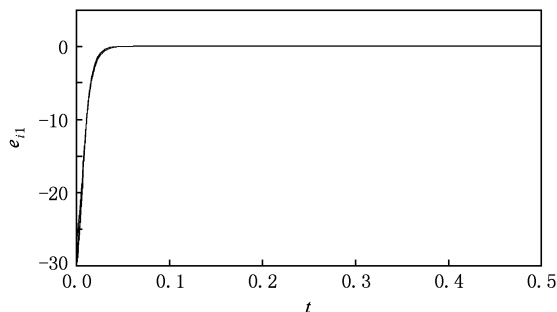
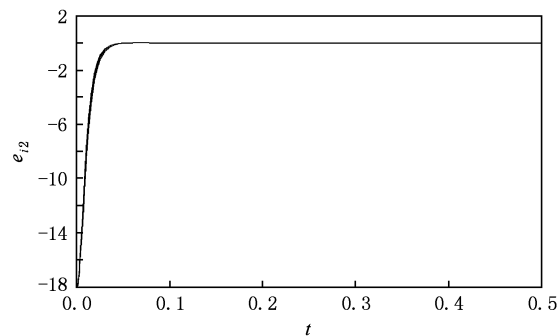
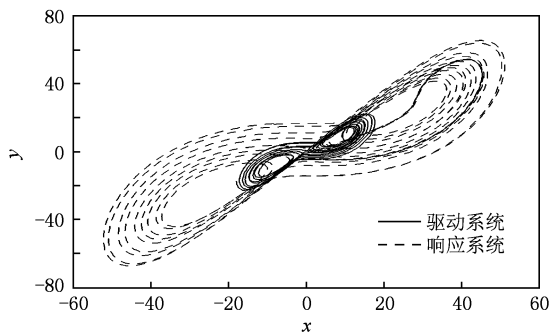
$$M(z) = \begin{pmatrix} - (25\theta + 10) & 25\theta + 10 \\ 28 - 35\theta - z & 29\theta - 1 \end{pmatrix}.$$

通过简单计算,  $\mu = 36.6070$ . 选取  $\gamma = 1.005$ , 根据定理条件 3) 中不等式

$$\begin{aligned} &\left( \mu + \alpha + \frac{1}{1-\delta} - 2d + r \right) l \\ &\quad + \ln\left( \rho_k + \frac{l}{1-\delta} \right) \leq 0, \end{aligned}$$

得脉冲区间  $\Delta = t_{k+1} - t_k$  估计为  $0 < \Delta \leq 0.0834$ .

选择  $\Delta = 0.07$ , 因此  $\tau(t) < \Delta$ . 图 1 和图 2 分别显示当比例因子  $\lambda = 3$  时, 驱动-响应动力网络(14)的同步误差图  $e_{i1} = x_{i1} - 3x_1 (i = 1, 2, \dots, 5)$ ,  $e_{i2} = x_{i2} - 3x_2 (i = 1, 2, \dots, 5)$ . 图 3 显示当  $\lambda = 3$  时, 在  $x-y$  平面中投影同步轨道.

图1 驱动-响应动力网络(14)同步误差  $e_{i1} = x_{i1} - 3x_1$ 图2 驱动-响应动力网络(14)同步误差  $e_{i2} = x_{i2} - 3x_2$ 图3 在  $x-y$  平面中投影同步轨道 ( $\lambda = 3$ )

## 5. 结 论

本文中,结合脉冲控制和自适应控制方法讨论时变耦合部分线性系统驱动-响应复杂网络的投影同步.建立了时变耦合网络自适应-脉冲投影同步准则.并且不需要耦合构造矩阵是不可约的.进而,运用数值模拟证实方案的有效性和正确性.

- [1] Barahona M, Pecora L 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 054101
- [2] Amritkar R, Rangarajan G 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 258102
- [3] Xu D, Li X, Wang X F 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1313 (in Chinese) [许丹, 李翔, 汪小帆 2007 物理学报 **56** 1313]
- [4] Li C, Sun W, Kurths J 2007 *Phys. Rev. E* **76** 046204
- [5] Marr C, Muller-Linow M, Hutt M T 2008 *Phys. Rev. E* **75** 041917
- [6] Landsman A, Schwartz I 2007 *Phys. Rev. E* **75** 026201
- [7] Zhang H G, Ma T D, Yu W, Fu J 2008 *Chin. Phys. B* **17** 3616
- [8] Xu D, Chee C 2002 *Phys. Rev. E* **66** 046218
- [9] Molaei M, Umut O 2008 *Chaos, Soliton. Fract* **37** 227
- [10] Zhou J, Chen T, Xiang L 2006 *Int. J. Bifurcation and Chaos* **16** 2923
- [11] Zhou J, Chen T, Xiang L 2006 *Chaos, Solitons and Fractals* **27** 905
- [12] Ren Q, Zhao J 2007 *Phys. Rev. E* **76** 016207
- [13] Luo Q, Wu W, Li L X, Yang Y X, Peng H P 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1529 (in Chinese) [罗群, 吴薇, 李丽香, 杨义先, 彭海朋 2008 物理学报 **57** 1529]
- [14] Gao M, Cui B T 2009 *Chin. Phys. B* **18** 76
- [15] Guo R Z 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5655 (in Chinese) [罗润梓 2007 物理学报 **56** 5655]
- [16] Li K, Lai C 2008 *Phys. Lett. A* **372** 1601
- [17] Zhao Y, Yang Y 2008 *Phys. Lett. A* **372** 7165
- [18] Zhang X H, Li D 2009 *Chin. Phys. B* **18** 1774
- [19] Zhou J, Wu Q J 2009 *IEEE Trans. Circuits Syst. II - Express Briefs* **56** 744
- [20] Cai S, Zhou J, Xiang L, Liu Z 2008 *Phys. Lett. A* **372** 4990
- [21] Li K, Zhang X, Li Z 2009 *Chaos, Soliton. Fract* **41** 1427
- [22] Yu Y B, Bao J F, Zhang H B, Zhong Q S, Liao X F, Yu J B 2008 *Chin. Phys. B* **17** 2377
- [23] Lu J, Cao J 2007 *Physica A* **382** 672
- [24] Liu X Z, Wang Q 2007 *Nonlinear Analysis* **66** 1465
- [25] Lü J H, Chen G R, Cheng D Z, Celikovskiy S 2002 *Int. J. Bifur. Chaos* **12** 2917

# Adaptive-impulsive control for projective synchronization in the drive-response complex network with time-varying coupling\*

Zeng Chang-Yan Sun Mei<sup>†</sup> Tian Li-Xin

(*Nonlinear Scientific Research Center, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China*)

(Received 23 October 2009; revised manuscript received 9 December 2009)

## Abstract

Recently, most of works had studied the impulsive stabilization of networks with time-varying delays. But there are few results about synchronization criterion of networks with time-varying delays via adaptive-impulsive control. In this paper, by adaptive-impulsive control method, projective synchronization in the drive-response complex network of partially linear systems with time-varying coupling is investigated. An adaptive-feedback controller, updating laws and a linear impulsive controller are proposed. An adaptive-impulsive projective synchronization criterion of network with time-varying coupling is established. And the coupling configuration matrix in network is not required irreducible. Moreover, numerical simulation is used to verify the effectiveness of the scheme.

**Keywords:** complex network, projective synchronization, time-varying coupling, adaptive-impulsive control

**PACC:** 0545

---

\* Project supported by the National Nature Science Foundation of China (Grant No. 90610031), the Ministry of Education Foundation (Grant No. 09YJA90088).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: sunm@ujs.edu.cn (M. Sun).