

含一个非线性项混沌系统的线性 控制及反控制*

吴然超[†] 郭玉祥

(安徽大学数学科学学院, 合肥 230039)

(2009 年 11 月 12 日收到; 2009 年 12 月 10 日收到修改稿)

研究了一类仅含一个非线性项混沌系统的线性控制与反控制, 根据 Routh-Hurwitz 稳定性条件, 先对这类混沌系统进行控制, 使其达到稳定的状态, 然后改变控制系数, 使其再次产生混沌, 得到一个新的混沌系统, 并对这个新的混沌系统的基本动力学行为进行了分析, 数值仿真也验证了新系统的混沌性态.

关键词: 混沌系统, 线性控制, 分岔, Lyapunov 指数

PACC: 0545

1. 引 言

近年来, 随着混沌理论的不断发展与完善, 混沌已经被证实在生物工程, 电子工程、信息工程、应用数学和物理学等领域有着广泛的应用. 自 1963 年 Lorenz 发现第一个数学和物理模型 Lorenz 系统^[1]以来, 人们就不断地探索寻找新的混沌系统. 上世纪 70 至 80 年代 Rössler 构造了简单的具有丰富的混沌动力学行为的 Rössler 系统. 到了 90 年代, Chen 利用反控制的方法^[2]强迫 Lorenz 系统在非混沌区域内产生混沌, 得到了 chen 系统, 随后又有 Lü 系统^[3]、统一混沌系统^[4]等. 类似地, 文献[5—8]也讨论了系统的混沌行为.

最近, 文献[9, 10]分别在 Lorenz 系统的第一和第二个方程中增加一个非线性乘积项, 构成一个新的混沌系统. 文献[11]通过改变 Lorenz 系统第二个方程的线性部分, 构成新混沌系统. 文献[12]在 Lorenz 系统的第二个方程中添加一个线性控制器, 构成一个超混沌系统. 这些新系统都是以 Lorenz 系统为基点提出来的, 并且具有不同于 Lorenz 系统的复杂动力学行为.

本文采用线性控制的方法, 在系统的每个方程

中添加一个线性控制器, 首先将系统镇定至其原来的奇点处, 使其达到稳定状态, 然后改变控制系数 (并不是对系数进行微小的扰动), 使系统再次产生混沌现象. 以文献[13]表 1 中的 I 系统为例, 结合 Routh-Hurwitz 准则, 当控制系数满足某条件时, 就得到一个新的混沌系统. 通过理论分析、数值仿真对这个新的混沌系统的分岔行为、奇怪吸引子, Lyapunov 指数, 分维数, 连续功率谱等基本动力学特性进行研究, 验证了系统的混沌性. 这种方法对文献[13]表 1 中的另外 13 种仅含有一个非线性二次项的简单系统也是适用的.

2. 基于线性控制生成的混沌系统

考虑如下的系统^[13]

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -0.2y_2, \\ \dot{y}_2 &= y_1 + y_3, \\ \dot{y}_3 &= y_1 + y_2^2 - y_3. \end{aligned} \quad (1)$$

当初值取 (0.01, 0.5, 0.02) 时, 其混沌吸引子图可参见图 1.

该系统仅含有一个非线性乘积项 y_2^2 , 且只有一个平衡点 $O(0, 0, 0)$. 在系统(1)的每个方程中添加一个线性控制器, 得受控系统

* 国家自然科学基金 (批准号: 10471059), 安徽省自然科学基金 (批准号: 070416225), 安徽省高校省级自然科学基金重点项目 (批准号: KJ2010A035, KJ2008A025), 高等学校博士学科点专项科研基金 (批准号: 20093401120001) 资助的课题.

[†] E-mail: wuranchao@yahoo.com.cn

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -0.2y_2 - qy_1, \\ \dot{y}_2 &= y_1 + y_3 - ry_2, \\ \dot{y}_3 &= y_1 + y_2^2 - y_3 - sy_3. \end{aligned} \quad (2)$$

其中 q, r, s 为待定的控制系数. 受控系统在点 (y_1^*, y_2^*, y_3^*) 的 Jacobian 矩阵为

$$J_{(y_1^*, y_2^*, y_3^*)} = \begin{bmatrix} -q & -0.2 & 0 \\ 1 & -r & 1 \\ 1 & 2y_2^* & -s-1 \end{bmatrix}.$$

显然, 原点 O 是系统(2)的平凡平衡点, 另一个平衡点是 $P([0.2(1+s)(qr+0.2)+0.04]/(-q^2), [(1+s)(qr+0.2)+0.2]/q, [(1+s)(qr+0.2)^2+0.2(qr+0.2)]/q^2)$. 根据 Routh-Hurwitz 稳定性条件, 当

$$\begin{aligned} q+r+s &> -1, \\ qr(1+s)+0.2s &> -0.4, \\ (q+r+s+1)(qr+(q+r)(1+s)+0.2) &> qr(1+s)+0.2s+0.4 \end{aligned}$$

成立时, 系统(2)将收敛到平衡点 $O(0,0,0)$, 见图 2 所示.

为使受控系统(2)能够产生混沌, 即在平衡点 O 和 P 处至少要有一个是不稳定的. 为了便于分析, 固定控制系数 q , 取值为 -0.2 , 并假定 s 和 r 具有某种函数关系 $s=f(r)$, 则系统(2)化为

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= 0.2(y_1 - y_2), \\ \dot{y}_2 &= y_1 + y_3 - ry_2, \\ \dot{y}_3 &= y_1 + y_2^2 - y_3 - f(r)y_3. \end{aligned}$$

通过变化 r , 确定受控系统(2)的参数取值时会出现混沌行为. 在平衡点 O 和 P 处分别线性化受控系统(2), 并取 $q = -0.2, s = 4r - 1$, 得对应的特征多项式为

$$\begin{aligned} f_1(\lambda) &= \lambda^3 + (5r - 0.2)\lambda^2 \\ &\quad + (4r^2 - r + 0.2)\lambda + 0.8r \\ &\quad - 0.8r^2 + 0.2 = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} f_2(\lambda) &= \lambda^3 + (5r - 0.2)\lambda^2 \\ &\quad + (-4r^2 + 7r + 2.2)\lambda + 0.8r^2 \\ &\quad - 0.8r - 0.2 = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

根据微分方程定性理论及稳定性方法^[14,15], 当 $r > 0.04$ 时, 系统有可能出现混沌吸引子. 借助数值仿真实验, 可以判断当 $r \in (0.13, 0.21)$ 时系统出现混沌现象, 而且吸引子的形状与系统(1)是完全不一样的. 当 $r \in (0.21, +\infty)$ 时, 系统会出现同宿轨, 极限环等特殊轨线.

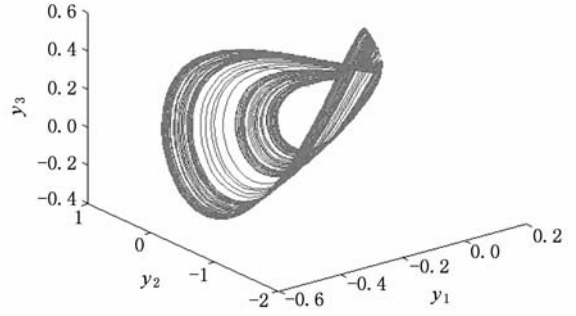


图 1 系统(1)的混沌吸引子

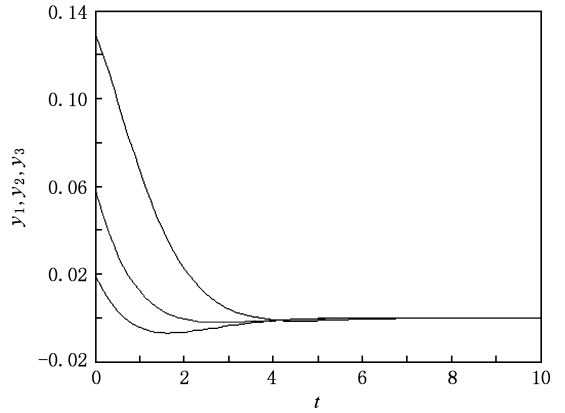


图 2 状态变量 y_1, y_2, y_3 的时序图

根据上述的分析, 将系统(2)变为如下新的系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -0.2x_2 + k_1x_1, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_3 - k_2x_2, \\ \dot{x}_3 &= x_1 + x_2^2 - k_3x_3. \end{aligned} \quad (5)$$

当参数取 $k_1 = 0.2, k_2 = 0.15, k_3 = 0.6$ 初值取 $(0.02, 0.13, 0.06)$ 时系统(5)的确产生如图 3 所示的混沌吸引子.

3. 基本动力学行为

下面主要研究系统(5)基本的动力学特性, 包括耗散性、吸引子的存在性、平衡点的稳定性、系统的分岔分析.

3.1. 耗散性和吸引子的存在性

由系统(5)可得

$$\begin{aligned} \nabla V &= \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_3} \\ &= 0.2 - 0.15 - 0.6 = -0.55 < 0, \end{aligned}$$

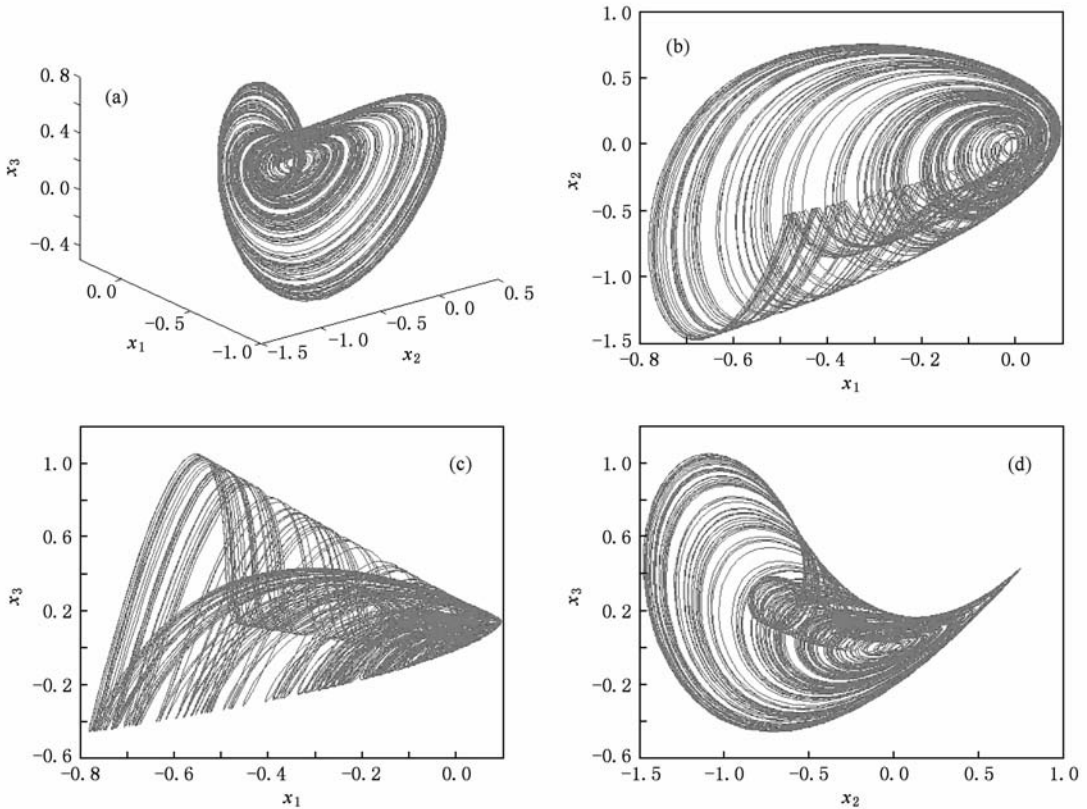


图3 系统(5)的混沌吸引子 (a) x_1, x_2, x_3 三维空间相图; (b) x_1, x_2 平面相图; (c) x_1, x_3 平面相图; (d) x_2, x_3 平面相图

所以, 系统(5)是耗散的, 并以指数形式 $dV/dt = e^{-0.55t}$ 收敛. 即一个初始体积 $V(0)$ 的体积元在时间 t 时收缩为体积元 $V_0 e^{-0.55t}$. 也就是说, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 系统轨线的每个体积元都以直属速率收缩到 0. 因此, 系统的轨线将最终被限制在一个体积为 0 集合上, 并且它的动力学行为被固定在一个吸引子上, 这说明了吸引子的存在性.

3.2. 系统平衡点的稳定性

令系统(5)右边等于零, 得系统有如下两个平衡点 $E_1(0, 0, 0)$ 和 $E_2(-1.51, -1.51, 0.4335)$. 在平衡点 $E_1(0, 0, 0)$ 处对系统(5)进行线性化, 其矩阵的三个特征值分别为 $\lambda_1 = 0.1372 + 0.5895i, \lambda_2 = 0.1372 - 0.5895i, \lambda_3 = -0.8245$. 因为 λ_1 和 λ_2 是一对具有正实部的共轭复根, 而 λ_3 为负实根, 因此平衡点 $E_1(0, 0, 0)$ 为鞍焦点. 由此可见它是不稳定的. 同理, 在 $E_2(-1.51, -1.51, 0.4335)$ 处, 系统(5)线性化矩阵的特征值为 $\lambda_1 = 0.0938, \lambda_2 = -0.3219 + 1.7654i, \lambda_3 = -0.3219 - 1.7654i$, 也是不稳定的. 值得注意的是, 系统(5)是在 E_1 点处产生单螺旋的混沌吸引子. 显然, 这个新系统与系统

(1)的拓扑结构是完全不同的.

3.3. 系统的分岔分析

当反馈系数 k_1 在区间 $[0.01, 0.2]$ 内变化, 初值取 $(0.02, 0.13, 0.06)$ 时, 计算得到图 4(a) 所示的 k_1 - x_2 分岔图. 从图中可以看出, 分岔参数取不同的值时, 系统首先出现稳定的周期 1 轨道, 随着 k_1 的继续增大, 系统发生倍周期分岔通向混沌. 当 k_1 取 1.0 之后, 系统完全进入混沌, 并且有明显的周期窗口. 图 4(b) 为反馈系数 k_2 - x_2 的分岔图, 随着 k_2 的不断增大系统由混沌状态进入周期 4 的轨道, 经过倍周期分岔达到稳定的周期 1 轨道.

4. 数值仿真

下面给出系统(5)具有混沌现象的一些数值特征, 包括系统对初值的敏感依赖性、Lyapunov 指数及其维数、时域波形、连续功率谱以及 Poincaré 截面图等. 假设系统参数都不变, 仍然取 $k_1 = 0.2, k_2 = 0.15, k_3 = 0.6$.

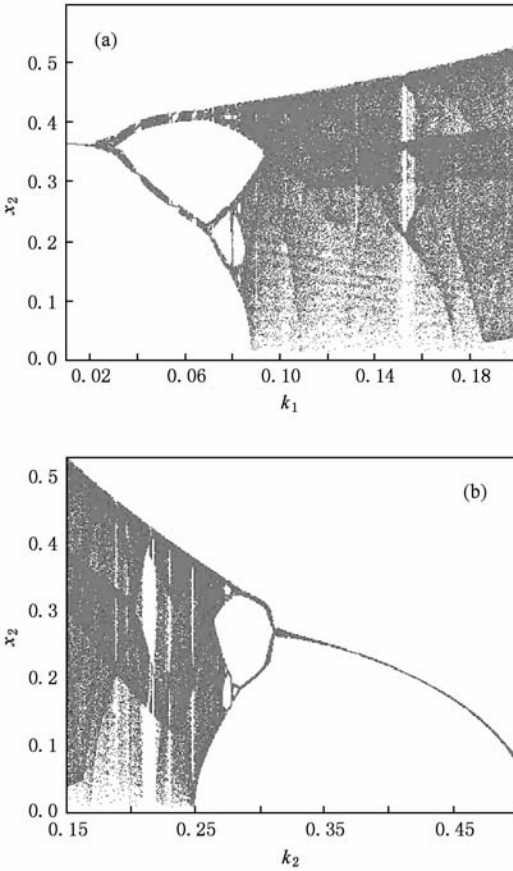


图4 系统(5)的分岔图 (a)以 k_1 为参数的分岔图;(b)以 k_2 为参数的分岔图

4.1. 系统对初值的敏感依赖性

为了验证系统(5)对于初值的敏感依赖性,分别计算初始点 (x_{10}, x_{20}, x_{30}) 和 $(x_{10}, x_{20} + 0.0001, x_{30})$ 的轨线. 从图5中明显地可以看到,起始时这两条轨线密不可分,可经过一段时间迭代后,它们轨线迥然不同.

4.2. Lyapunov 指数和 Lyapunov 维数

混沌系统对初值的敏感依赖性是指相空间中初始距离很近的两条轨迹会以指数速率发散,而 Lyapunov 指数即是根据相轨迹有无扩散运动特征来判断系统的混沌特性^[16],若系统的最大 Lyapunov 指数大于零,则通常认为系统是混沌的.

采用 Jacobian 方法^[17] 计算出系统(5)的 Lyapunov 指数为: $\lambda_{L1} = 0.2031, \lambda_{L2} = -0.0708, \lambda_{L3} = -0.6824$. 图6给出了其 Lyapunov 指数谱. 系统(5)的 Lyapunov 维数是

$$D_L = j + \frac{1}{|\lambda_{Lj}|} \sum_{i=1}^{i=j} \lambda_{Li} = 2 + \frac{(\lambda_{L1} + \lambda_{L2})}{|\lambda_{L3}|}$$

$$= 2 + \frac{0.2031 - 0.0708}{|-0.6824|} = 2.194.$$

由于系统的最大 Lyapunov 指数大于零,而且系统的 Lyapunov 维数不是整数,由此可以确定系统是混沌的.

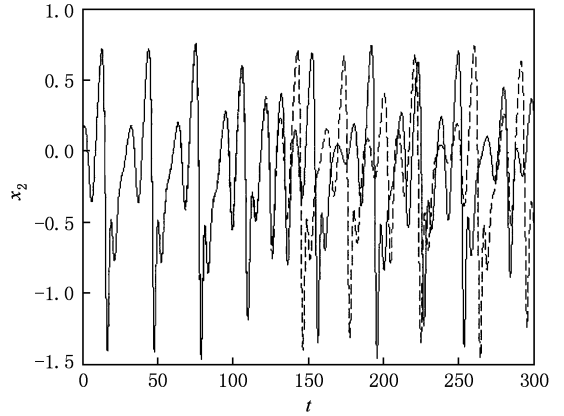


图5 系统(5)对初值的敏感依赖性

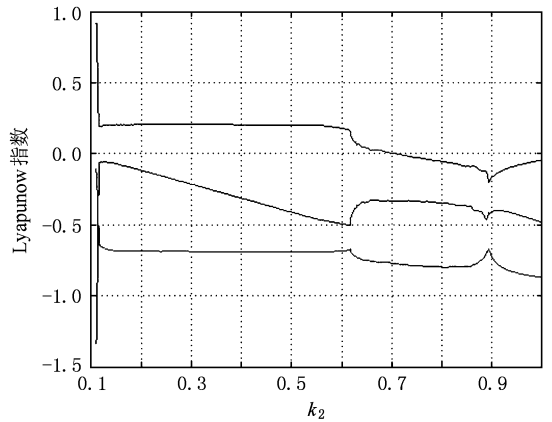


图6 系统(5)的 Lyapunov 指数谱

4.3. 时域波形、连续功率谱以及 Poincaré 截面

混沌系统的时域波形图具有非周期性,且解的流对初值极为敏感. 从图7可以看出系统(5)时域波形图具有这种特点. 另外,混沌吸引子的非周期性还可以通过系统的连续功率谱表现出来. 这里以分量 x_2 为例,首先在时域波形图7中读出周期,然后采样时在一个周期内取5至7个点做出系统(5)的功率谱,如图8所示. 可以看出吸引子是非周期的,且 x_2 的功率谱展现了连续的宽带特征. 由于在混沌区域内存在不稳定的极限环,混沌带的功率谱

除了有明显的噪声外,还有访问周期轨道时出现对应的尖峰.

为了更清晰地观察出系统的动力学行为,选择两个穿过平衡点的平面作为 Poincaré 截面: $x_1 = 0$ 和

$x_3 = 0$,图 9(a)—(b)给出了系统在这两个截面上的 Poincaré 映像.从图中可以看出截面上有一些成片的具有分形结构的密集点,而且吸引子的一些叶片被折叠.这导致了系统(5)具有复杂的动力学行为.

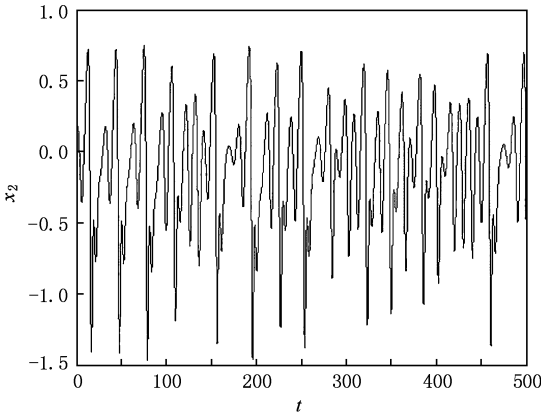


图 7 系统(5)中 $x_2(t)$ 的时域波形图

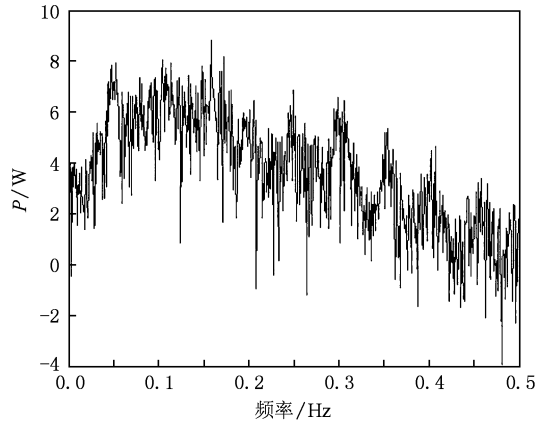


图 8 系统(5)的功率谱图

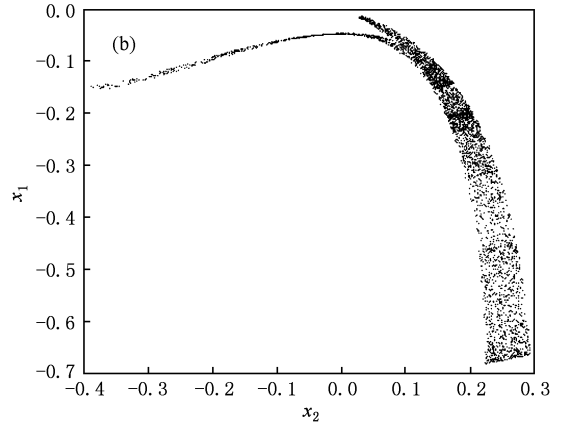
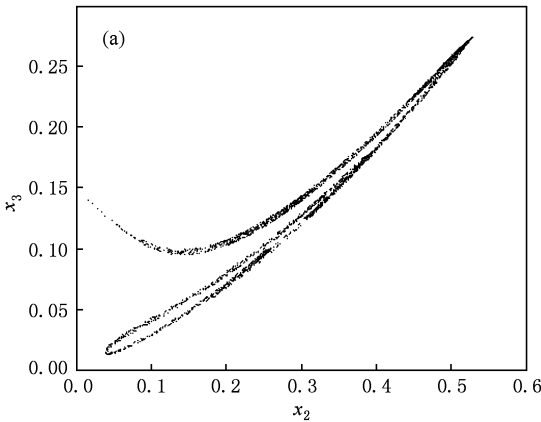


图 9 系统(5)的 Poincaré 截面图 (a) $x_1 = 0$ 时的 Poincaré 截面;(b) $x_3 = 0$ 时的 Poincaré 截面

5. 结 论

本文基于线性控制的方法对一类单奇点简单混沌系统进行了分析,结合 Routh-Hurwitz 稳定性条件,改变控制系数,既能使系统被镇定到某个平衡点,也能使受控系统再次产生混沌,给出受控系统

参数再次产生混沌的变化范围,并且对这个新生成的混沌系统给出了基本动力学分析,包括耗散性、吸引子的存在性、平衡点及其稳定性、Lyapunov 指数及其维数、时域波形图、功率谱等.数值仿真验证了新系统具有混沌性态.此方法对其他单奇点混沌系统也是适用的.

[1] Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 130
 [2] Chen G, Lai D 1998 *Int. J. Bifurcation and chaos* **8** 1585
 [3] Lü J, Chen G 2002 *Int. J. Bifurcation and chaos* **12** 659
 [4] Lü J, Chen G, Cheng D, Celikovsky S 2002 *Int. J. Bifurcation and chaos* **12** 2917
 [5] Wang J Z, Chen Z Q, Yuan Z Z 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3956 (in Chinese) [王杰智、陈增强、袁著社 2006 物理学报 **55** 3956]

- [6] Cai G L, Tan Z M, Zhou W H, Tu W T 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6230 (in Chinese) [蔡国梁、谭振梅、周维怀、涂文桃 2007 物理学报 **56** 6230]
- [7] Liu C X, Liu L 2009 *Chin. Phys. B* **18** 2188
- [8] Zhou P, Wei J L, Chen X F 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 5201 (in Chinese) [周 平、危丽佳、程雪峰 2009 物理学报 **58** 5201]
- [9] Qi G, Chen G, Du S, Chen Z, Yuan Z 2005 *Physica A* **352** 295
- [10] Zhang L, Yu J N, Li Y 2007 *Journal of Lanzhou Jiaotong University (Natural Sciences)* **26** 154 (in Chinese) [张 莉、俞建宁、李 阳 2007 兰州交通大学学报(自然科学版) **26** 154]
- [11] Tigan Gh 2005 *Sci. Bull. Politehnica University of Timisoara, Tomul* **50**, Fascicola **1** 61
- [12] Yang Q, Zhang M, Chen G 2009 *Nonlinear Anal.* **10** 1601
- [13] Sprott J C 1994 *Phys. Rev. E* **50** 647
- [14] Zhang Z F, Ding T R, Huang W D 1985 *Qualitative Theory of Differential Equations* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [张芷芬、丁同仁、黄文灶 1985 微分方程定性理论(北京:科学出版社)]
- [15] Ma Z E, Zhou Y C 2001 *Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations and Stability Methods* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [马知恩、周义仓 2001 常微分方程定性理论与稳定性方法(北京:科学出版社)]
- [16] Han M 2007 *Prediction Theory and Method of Chaotic Time Series* (Beijing: China Waterpower Press) (in Chinese) [韩 敏 2007 混沌时间序列预测理论与方法(北京:中国水利水电出版社)]
- [17] Lü J H, Zhang S C 2001 *Journal of Nonlinear Dynamics in Science and Technology* **1** 84 (in Chinese) [吕金虎、张锁春 2001 非线性动力学学报 **1** 84]

Linear control and anti-control of chaotic systems with only one nonlinear term *

Wu Ran-Chao[†] Guo Yu-Xiang

(School of Mathematics, Anhui University, Hefei 230039, China)

(Received 12 November 2009; revised manuscript received 10 December 2009)

Abstract

The linear control and the anti-control of a class of chaotic systems with only one nonlinear term are studied. Based on the Routh-Hurwitz stability condition, the chaotic system is controlled and the stable state is reached. Then, the chaotic state is recovered through changing controlled coefficient and a new chaotic system follows. The basic dynamical behavior of the new chaotic system is investigated and numerical simulation shows the chaotic nature of this new system.

Keywords: chaotic system, chaos control, bifurcation, Lyapunov exponents

PACC: 0545

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10471059), the Natural Science Foundation of Anhui Province, China (Grant No. 070416225), the Anhui Higher Education Institutions of China (Grant Nos. KJ2010A035, KJ2008A025), the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (Grant No. 20093401120001).

[†] E-mail: wuranchao@yahoo.com.cn