

可激发介质中环形异质介质导致自维持靶波^{*}

唐冬妮 张旭 任卫 唐国宁[†]

(广西师范大学物理科学与技术学院, 桂林 541004)

(2009 年 10 月 21 日收到; 2009 年 12 月 17 日收到修改稿)

在二维可激发介质中引入环形异质可激发介质, 研究了可激发介质中自维持靶波的形成, 数值模拟结果表明: 当介质的激发性和环的尺寸适当选取时, 初始的扰动可在可激发介质中产生自维持靶波, 对产生自维持靶波的物理机理作了讨论.

关键词: 可激发介质, 非均匀介质, 靶波

PACC: 0545, 0547

1. 引言

介质的非均匀性在许多系统中是普遍存在的, 如具有惰性和活性物质的混合催化面^[1], 在某些催化 BZ 反应扩散系统中二氧化碳产物在介质产生气泡^[2], 生物系统和生态系统这类反应扩散介质中的非均匀性更为突出. 近十年来, 人们的研究热情逐渐转向通过各种方式产生非均匀介质探索介质的非均匀性对非线性波动力学行为的影响^[3-5]. 研究表明: 介质的非均匀性对非线性波有重要的影响, 这些影响包括使螺旋波漂移^[6]、稳定和破碎^[7,8], 螺旋波被缺陷(不同性质的介质)吸引和排斥^[9,10], 使不同频率的螺旋波共存^[11], 改变波速^[12], 产生各种螺旋波^[13], 发生非线性波的反射、折射和反常折射现象^[14,15], 利用局部不均匀性在可激发介质处于螺旋波湍流态时诱导出有序的斑图, 如单臂或多臂螺旋波和靶波, 其中靶波是局部的振荡介质产生的^[16], 利用介质的局域不均匀性提高控制螺旋波和湍流的效率^[17]等. 研究介质的非均匀性对非线性波动力学的影响是重要的, 尽管目前已经取得一些结果, 但是一些问题仍然不清楚, 需要进一步研究, 例如在可激发介质中是否能出现自维持靶波? 本文在可激发介质中, 引入环形的异质可激发介质, 在适当选取异质可激发介质参数时观察到了自维持靶波, 并对产生这一现象的物理机理进行了分析和

讨论.

2. 模型

采用 Bär 模型作为研究对象, 它由以下方程组描述^[18]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon(x, y)} u(1-u) \times \left(u - \frac{v+b}{a} \right) + \nabla^2 u, \quad (1a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = f(u) - v, \quad (1b)$$

其中 $f(u)$ 满足如下条件:

$$f(u) = \begin{cases} 0, & (U < 1/3), \\ 1 - 6.75u(u-1)^2, & (1/3 \leq u \leq 1), \\ 1, & (1 < u). \end{cases} \quad (1c)$$

由文献[18]可知, 在 $a = 0.84, b = 0.07$ 参数下, 方程(1)描述的是可激发介质, ε 的大小反映了介质的激发性, ε 越大, 系统的激发性越低. 当 $0.01 < \varepsilon < 0.06$ 时, 在适当的初始条件下, 可在系统中产生稳定的螺旋波; 当 $0.06 < \varepsilon < 0.069$ 时, 产生的螺旋波因不稳定而漫游; 当 $0.069 \leq \varepsilon < 0.104$ 时, 螺旋波将因多普勒不稳定而破碎, 使系统出现时空混沌, 这个参数区称 T_1 湍流区域; 当 $0.104 \leq \varepsilon < 0.18$ 时, 任何波在向前传播的过程中都会产生向后传播的波, 这种现象称为回火, 这种回火行为导致任何规则的

* 国家自然科学基金(批准号:10765002)资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: tangguoning@sohu.com

波形都无法长距离传播,使系统处于时空混沌态,因此该区域称为 T_2 湍流区.

本文采用欧拉法和二阶精度的有限差分方法来数值解方程(1),固定取 $a = 0.84$, $b = 0.07$,采用无流边界条件,空间步长取 $\Delta = \Delta x = \Delta y = 0.4$,时间步长取 $\Delta t = 0.02$,系统尺寸为 $l_x \times l_y = 120 \times 120$,即空间被离散成 300×300 个格点.

为了研究在可激发介质中能否出现自维持靶波,在激发性为 ε_1 的均匀介质(记为介质1)中间引入环形异质可激发介质(记为介质2),具体来说就是使方程(1a)中的 ε 按如下规律变化:

$$\varepsilon(x_i, y_j) = \begin{cases} \varepsilon_2, & r_1 < r \leq r_2, \\ \varepsilon_1, & \text{其他,} \end{cases} \quad (2)$$

式中 $r = \sqrt{(x_i - x_{150})^2 + (y_j - y_{150})^2}$, i, j 为格点的坐标指数, $(x_i, y_j) = (i\Delta, j\Delta)$. 环的内、外半径分别为 r_1 和 r_2 ,参数 ε_1 在 $(0.02, 0.104)$ 变化, ε_2 在 $[0.104, 0.18]$ 范围内变化,使介质2处于回火区. 环形异质介质的引入,将整个介质划分成3个区域,介质2包围的介质1所在区记为区域3,环形异质介质所在区记为区域2,其它介质所在区记为区域1. 在区域3的中间半径为 R 范围内施加大小可以改变的恒定驱动力 F , F 具体形式为

$$F = \begin{cases} f, & 0 < R \leq r_1 \text{ 和 } t \leq 4, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad (3)$$

其中 f 为常数,大小随驱动力作用半径 R 的改变而改变, t 为驱动力作用时间. 下面我们从静息态出发,驱动力作用时间固定为 $t = 4$ 时间单位,使介质1产生初始激发,研究这个激发能否形成自维持靶波.

3. 数值模拟结果

通常外部扰动在可激发介质中能产生一个可以传播的孤波,扰动的宽度和幅度必须满足一定的条件^[19],增加扰动的宽度,扰动的幅度可以减少,反之,减少扰动的宽度,就必须增大扰动的幅度. 下面我们适当选择扰动宽度 (R) 和幅度 (f) 以便产生初始的孤立波.

首先,考虑介质1为高激发性介质,取 $\varepsilon_1 = 0.03$,外部扰动参数为 $R = 3\Delta = 1.2$, $f = 0.164$,当 $0.104 \leq \varepsilon_2 < 0.138$ 时,无论怎样改变 r_1 和 r_2 的半径,始终没能观察到自持的靶波. 图1给出了在 $r_1 = 3.2$ 和 $r_2 = 10.4$ 以及 $\varepsilon_2 = 0.13$ 情况下外力作用区

和介质2中各一点 u 变量随时间的变化,从图可以看出靶波不能够长时间维持(选其他点也有类似的结果). 而当 ε_2 处于 $0.138 \leq \varepsilon_2 < 0.18$ 范围,只要适当选择 r_1 和 r_2 的大小就可以观察到自维持靶波. 图2给出了在 $r_1 = 3.2$ 和 $r_2 = 10.4$ 以及 $\varepsilon_2 = 0.16$ 情况下外力作用区和介质2中各一点 u 变量随时间的变化,从图可以看出靶波能够自维持.

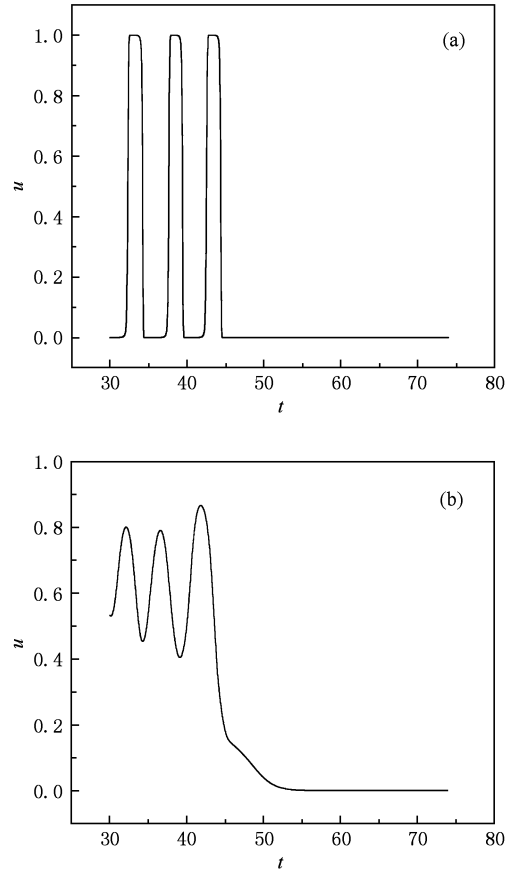


图1 空间不同点的 u 变量值随时间变化 (a)外力作用中心处;(b)介质2中一点

为了更明确的知道 r_1 和 r_2 的大小应满足什么关系时才能产生自维持靶波,在 $\varepsilon_1 = 0.03$, $\varepsilon_2 = 0.16$, $R = 1.2$, $f = 0.164$ 参数下,对产生自维持靶波 r_1 和 r_2 满足的条件进行了详细的数值模拟研究,结果表明:固定 $\Delta r = r_2 - r_1$,当 $R \leq r_1 \leq 8.6$ 和 $7.0 \leq \Delta r \leq 8.8$ 时,都可以观察到自维持靶波. 图3给出了在 $\varepsilon_1 = 0.03$, $\varepsilon_2 = 0.16$, $r_1 = 3.2$, $r_2 = 10.4$, $R = 1.2$, $f = 0.164$ 情况下不同时刻靶波的 u 变量斑图,由此可以看出靶波产生和自维持的过程. 如果 r_1, r_2 的大小选择不合适,即 $\Delta r < 7.0$ 或 $\Delta r > 8.8$ 时,就会出现靶波不能自维持. 对于不同的 ε_2 ,产生自维持靶波所

需要的 Δr 是不相同的,在相同 ε_1 和驱动半径 R 下,

随着 ε_2 的不断增大, Δr 的范围也会增大.

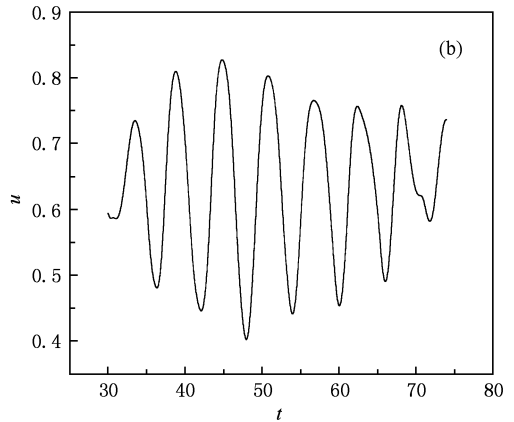
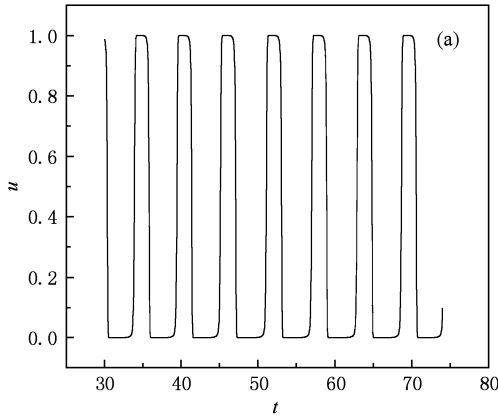


图2 空间不同点的 u 变量值随时间变化 (a)外力作用中心处;(b)介质2中一点

数值模拟还发现,只要环的宽度在 $7.0 \leq \Delta r \leq 8.8$ 范围内,在固定取 $\varepsilon_2 = 0.16, R = 1.2, f = 0.164$ 的情况下,适当选取 $r_1 \geq R$ 和 $\varepsilon_1 \leq 0.09$,都可观察到自维持靶波;随着 ε_1 的增大,在固定驱动力的情况下,需要的 R 值也增大,并且观察到的靶波的波臂会变细;靶波的平均周期随着 ε_1 的增大而单调减

少. 如果固定取 $\varepsilon_2 = 0.16, R = 1.2, f = 0.164, r_2 = 10.4$,改变 r_1 ,发现靶波的平均周期随 r_1 的减小 (Δr 变大)而单调减小.

在驱动时间仍然固定为 $t = 4$ 时间单位时,我们还研究了产生初始临界激发下驱动力作用半径 R 与驱动力大小 f 的关系,研究表明:驱动半径越小所

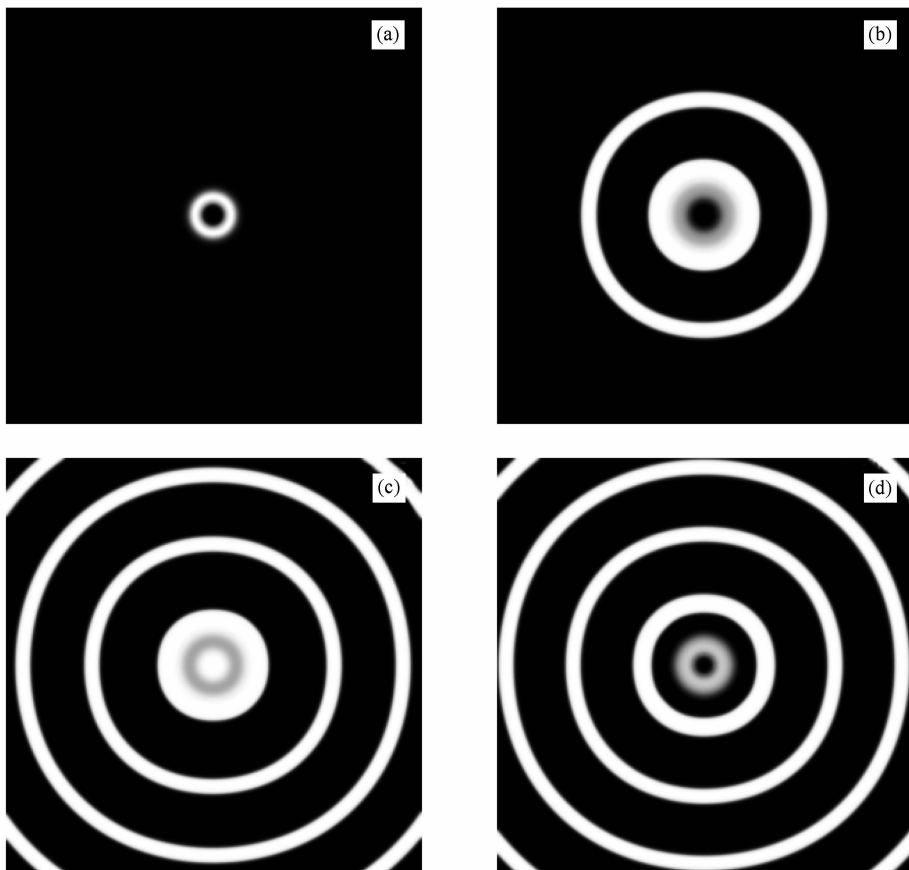


图3 不同时刻 u 变量的斑图 (a) $t = 9$; (b) $t = 20$; (c) $t = 200$; (d) $t = 800$

需要的驱动力就应越大,图4给出了在 $\varepsilon_1 = 0.03, \varepsilon_2 = 0.16, r_1 = 3.0, r_2 = 10.2$ 情况下,所需要最小驱动力 f 随 R 的变化关系曲线,从图明显可以看出驱动半径越小所需要的驱动力就越大. 应当指出,驱动力作用半径 R 的最小距离应不少于 1 个单位长度,否则不能产生自维持靶波,而产生的靶波的频率不随驱动半径的变化而变化.

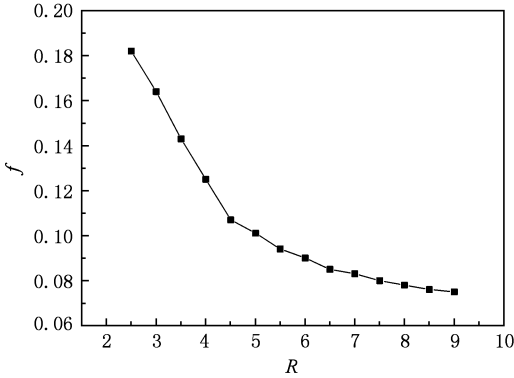


图4 最小驱动力 f 随驱动半径 R 的变化图

4. 物理机理

现在分析出现靶波自持的物理机理. 对比图1和图2我们可以看出两点:1)在区域3内 u 变量随时间变化比在区域2内(回火区) u 变量随时间变化陡峭. 从图1得到在区域3内介质从激发态(u 取最大值的态)回到静息态的平均时间为 $t \approx 2.25$,在区域2内介质的 u 值从取最大值到取最小值平均经历时间为 $t \approx 2.5$,特别是介质2从激发态回到静息态

的时间需要近 11 个单位时间. 2)在回火区内的介质不需要回到静息态也可以再次被激发,说明回火区内的介质特别容易被激发. 所以我们可以得出:靶波自维持的原因是回火区内的介质始终不会回到静息态,由于区域3的介质回到静息态的时间很短,而区域2的介质回到静息态的时间很长,导致区域3的介质不断被区域2内的波激发,因而形成稳定的靶波.

为了进一步分析靶波自持的物理机理,监测 $y = 150\Delta$ 直线上格点的 u 变量在同一时刻的值,发现靶波不能维持和能维持这两种情况下 $u(x(t), y_{150}(t))$ 随 x 变化是不同的,由此可以更清楚看出靶波自持的物理机理. 图5给出在图1参数下不同时刻 $u(x(t), y_{150}(t))$ 变量随空间坐标变化的曲线,图中两条虚线将介质分成3个区,即区域1,2,3. 从图可以看出:初始扰动在区域3产生一个孤波,如图5(a)所示,该波传入区域2后,区域3的介质回到静息态,如图5(b)所示. 由于区域2的介质接近于激发态(u 接近于最大值),导致区域3的介质再次被激发,如图5(c)所示,当波峰传入区域1时,恰好区域1和3的介质状态处于波峰时刻,而区域2的介质转入回到静息态的过程(见图5(d)),由于介质1从波峰回到静息态的时间短于介质2从波峰回到静息态的时间,正是这种时间差导致区域2中间区域回到静息态慢于两边,形成一个驻波峰如图5(e)和(f)所示,由于它不产生子波且最终回到静息态,导致区域3不再被激发使靶波消失,所以靶波不能自持.

图6给出了在图2参数下不同时刻 $u(x(t),$

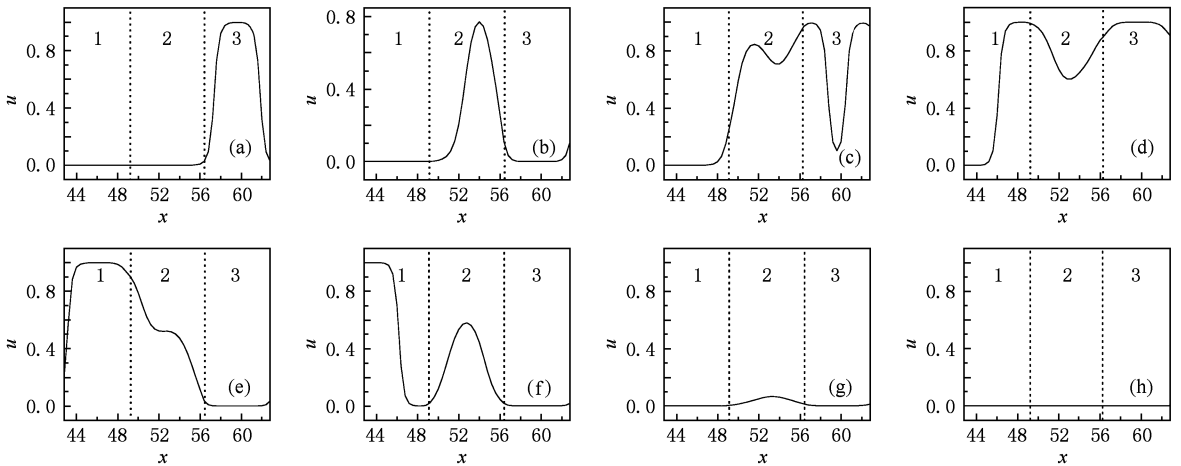


图5 靶波不自持时不同时刻 $u(x(t), y_{150}(t))$ 随 x 变化曲线 (a) $t = 5.8$; (b) $t = 9$; (c) $t = 11.1$; (d) $t = 12.2$; (e) $t = 13.2$; (f) $t = 14.1$; (g) $t = 49$; (h) $t = 55$

$y_{150}(t)$ 变量随空间坐标变化的曲线,从图可以看出:初始靶波的产生过程(即图 6(a)到(c)的过程)与图 5(a)至(c)描述的情形相同,之后的情形发生了较大的变化.从图 6 可以看出:当波峰完全进入区域 1 前,区域 3 的介质又回到静息态,这与图 5(d)

的情形完全不同(见图 6(d)),该波在区域 2 形成一个向后传的子波如图 6(e)和(f),因而可继续激发区域 3 的介质,之后图 6(c)至图 6(f)过程被不断重复,导致靶波的自维持.

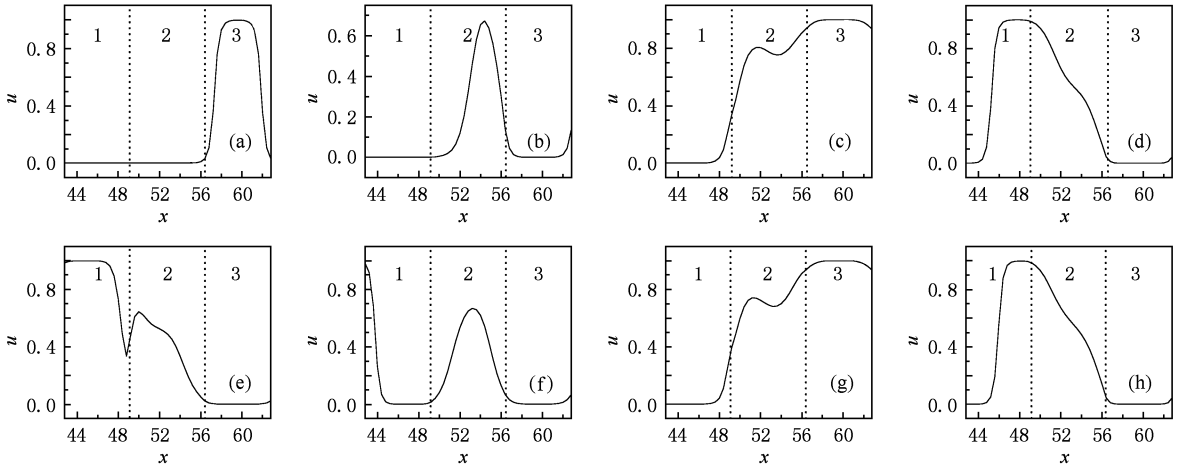


图 6 靶波自持时不同时刻 $u(x(t), y_{150}(t))$ 随 x 变化曲线 (a) $t=5.8$; (b) $t=9$; (c) $t=11.8$; (d) $t=13.1$; (e) $t=14.3$; (f) $t=15.4$; (g) $t=18.1$; (h) $t=19.2$

5. 结 论

本文研究了在具有一定结构的可激发介质中自维持靶波的产生,发现当介质 1 的激发性较高而

介质 2 的参数处于回火区时,适当选择参数,可以在可激发介质中产生自维持靶波.这个结果使我们对介质的非均匀性对波传播有了新的认识:可以通过设计介质的结构,获得所需要的目标态,并更好地理解在一些生物系统、生态系统中发生的现象.

- [1] Bar M, Bangia A K, Kevrekidis I G, Haas G, Rotermund H H, Ertl G 1996 *J. Phys. Chem.* **100** 19106
- [2] Csorgei K K, Zhabotinsky A M, Orban M, Epstein I R 1997 *J. Phys. Chem. A* **101** 6827
- [3] Ma J, Jin W Y, Yi M, Li Y L 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2832 (in Chinese) [马 军、靳伍银、易 鸣、李廷龙 2008 物理学报 **57** 2832]
- [4] Ma J, Jin W Y, Li Y L, Chen Y 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 2456 (in Chinese) [马 军、靳伍银、李廷龙、陈 勇 2007 物理学报 **56** 2456]
- [5] Zhang G Y, Ma J, Gan Z N, Chen Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6815 (in Chinese) [张国勇、马 军、甘正宁、陈 勇 2008 物理学报 **57** 6815]
- [6] Zhang H, Wu N, Ying H, Hu G, Hu B 2004 *J. Chem. Phys.* **121** 7276
- [7] Ten Tusscher K H W J, Panfilov A V 2003 *Phys. Rev. E* **68** 062902
- [8] Ma J, Wang C N, Jin W Y, Li Y L, Pu Z S 2008 *Chin. Phys.*

B **17** 2844

- [9] Ginn B T, Steinbock O 2005 *Phys. Rev. E* **72** 46109
- [10] Shajahan T K, Sinha S, Pandit R 2007 *Phys. Rev. E* **75** 11929
- [11] Xie F, Qu Z, Weiss J N, Garfinkel A 2004 *Phys. Rev. E* **63** 31905
- [12] Schebesch I, Engel H 1998 *Phys. Rev. E* **57** 3905
- [13] Park J S, Lee K J 2006 *Phys. Rev. E* **73** 66219
- [14] Lv Y P, Gu G F, Lu H C, Dai Y, Tang G N 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2996 (in Chinese) [吕耀平、顾国峰、陆华春、戴 瑜、唐国宁 2009 物理学报 **58** 2996]
- [15] Brazhnik P K, Tyson J J 1996 *Phys. Rev. E* **54** 1958
- [16] Li B W, Zhang H, Ying H P, Hu G 2009 *Phys. Rev. E* **79** 026220
- [17] Chen J X, Mao J W, Hu B, Xu J R, He Y F, Li Y, Yuan X P 2009 *Phys. Rev. E* **79** 066209
- [18] Bär M, Eiswirth M 1993 *Phys. Rev. E* **48** R1635
- [19] Neu J C, Preissig R S, Krassowska W 1997 *Phys. D* **102** 285

A ring-like heterogeneous medium-induced self-sustained target waves in excitable media^{*}

Tang Dong-Ni Zhang Xu Ren Wei Tang Guo-Ning[†]

(*College of Physics and Technology, Guangxi Normal University, Guilin 541004, China*)

(Received 21 October 2009; revised manuscript received 17 December 2009)

Abstract

The formation of self-sustained target wave in a two-dimensional excitable medium into which a ring-like heterogeneous excitable medium is introduced is investigated. The numerical results show that the initial perturbation can produce a self-sustained target wave in an excitable medium when the excitabilities of two media and the size of the ring are appropriately chosen. The physical mechanism responsible for the formation of self-sustained target wave is analyzed.

Keywords: excitable medium, heterogeneous medium, target wave

PACC: 0545, 0547

^{*} Project Supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10765002).

[†] Corresponding author. E-mail: tangguoning@sohu.com