

热应力双折射介质中的光传输研究*

岑兆丰 李晓彤[†]

(浙江大学现代光学仪器国家重点实验室, 杭州 310027)

(2009 年 10 月 21 日收到; 2009 年 12 月 16 日收到修改稿)

计算了简化的平行平板中的温度和热应力分布, 根据光弹性理论得到了介质内部折射率的改变, 采用矢量微分算法模拟光线在介质中传输的情况, 预测了接收面上的光强分布和条纹形状, 程序输出图形和作为对照的光弹性实验的结果符合良好, 证明了上述分析方法和光传输计算的正确性, 为进一步完善光学系统成像质量提供参考.

关键词: 光弹性, 应力双折射, 光线追迹

PACC: 7820H, 4225L, 4215D

1. 引 言

目前在应力双折射方面的研究多集中在光波导领域, 主要涉及传播特性的研究^[1,2], 以及采用应力释放槽^[3]、改变结构参数和调整热膨胀系数等方法控制双折射^[4,5], 高双折射光纤还常被用于高灵敏传感器件^[6,7]; 而大的温度梯度所致双折射的研究, 多集中在对激光器的工作介质和出射窗口影响的探讨^[8,9]和光学薄膜牢固性方面的讨论^[10,11], 对传统意义上的光学成像方面的研究相对较少. 意大利学者用几何方法研究了应力双折射并进行了模拟, 算法适用于负晶体(指 $n_x \geq n_y > n_z$ 的晶体), 证明弯曲载荷导致的应力梯度引起了等色线畸变, 文章采用了钨酸铅单轴晶体为计算实例^[12]. 文献[13]简要介绍了有关应力双折射是应力作用下材料折射率变化的主要表现, 分别分析了热光效应和弹光效应对介质折射率的影响, 得出热光效应对折射率的影响大于弹光效应的结果, 因此主要分析了不同入射角的光通过窗口时由于热光效应而产生的波面畸变, 分析结论对本文很有意义. 由于热光效应显著时, 弹光效应也会相应增大, 目前通用的光学系统设计和分析软件都没有关于热应力双折射的分析功能, 开展热应力双折射介质中光传输的研究, 对恶劣环境下使用的光学系统的设计和成像

质量的控制具有实际意义.

本文讨论的光传输问题是一个采用光线光学的方法计算光线在各向异性非均匀介质中传输的复杂问题, 光线光学的基本出发点在于光线的走向和介质折射率之间的关系问题, 因此, 本文要解决的关键问题是: 热应力对介质折射率的作用; 热应力双折射介质的描述和光线计算; 计算结果的实验验证.

本文采用有限元软件计算了平板窗口材料的瞬态热分布, 求解了各网格节点上的应力大小和主轴方向, 编制了光线传输的计算程序, 算法适用于各类双折射介质. 利用上述应力数据, 模拟光线在各个网格之间的折射行为, 最终得到出射面各条光线偏振态、振幅和附加相移等信息, 从而预测在系统接收屏上干涉条纹的形状和强度, 并得出了和实验一致的结果.

2. 应力双折射分析

各向同性均匀透光介质中的折射率椭球可以写为 $x^2 + y^2 + z^2 = n_0^2$, 而当介质中存在应力时, 该方程变为如下形式^[14]:

$$\begin{aligned} \frac{x'^2}{n_1^2} + \frac{y'^2}{n_2^2} + \frac{z'^2}{n_3^2} &= 1, \\ n_i - n_0 &= A\sigma_i + B(\sigma_j + \sigma_k), \\ (i, j, k &= 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (1)$$

* 国家自然科学基金(批准号: 10875105, 60977010), 国家高技术研究发展计划(批准号: 2009AA12Z108), 航空科学基金(批准号: 20060112111, 20090176001)资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: lixt@zju.edu.cn

其中 n_i 是 i 方向的折射率改变值, σ_i 为 i 方向的主应力, 应力主轴方向与原来的坐标系方向通常不重合, 上式是在主轴坐标系中的表达式. 于是

$$n_i - n_j = C(\sigma_i - \sigma_j), \quad (2)$$

其中 $C = A - B$ 为弹光系数. (2) 式表明, 两个相互垂直的主轴方向上折射率之差正比于主应力之差.

设介质与空气分界面为 $x = 0$, 其内部主应力分别沿坐标轴方向, 一束平行自然光沿 x 方向正入射, 在介质中将分解为两束偏振光, 其波矢方向不变而电位移矢量 \mathbf{D} 的振动方向分别沿 y 和 z 轴, 由于两个方向对应的折射率不同, 当光线传播的距离为 d 时, 对应的光程差和附加相移分别为

$$L = Cd(\sigma_y - \sigma_z),$$

$$\alpha = \frac{2\pi L}{\lambda} = \frac{2\pi Cd}{\lambda}(\sigma_y - \sigma_z). \quad (3)$$

若介质应力主轴方向与原坐标轴方向不重合, 且光线倾斜入射, 其方向余弦为 $\mathbf{k} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, 如图 1 所示, 设 \mathbf{k} 在 xoy 面的投影为 \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_1 与 \mathbf{k} 的夹角为 θ , x 正半轴到 \mathbf{k}_1 的角度为 φ , 经过两次旋转变换, 可以将 x 轴转到 \mathbf{k} 上来, 使得新 x' 与 \mathbf{k} 重合. 根据坐标变换关系^[15], 设 \mathbf{R}_1 为两坐标系之间的变换矩阵, 它是正交矩阵, 即 $\mathbf{R}_1^{-1} = \mathbf{R}_1^T$,

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_x & m_x & n_x \\ l_y & m_y & n_y \\ l_z & m_z & n_z \end{bmatrix}. \quad (4)$$

$$\text{应力张量 } \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}, \text{ 其变换公式}^{[16]}$$

$$\text{为 } \mathbf{T}' = \mathbf{R}_1 \mathbf{T} \mathbf{R}_1^T, \text{ 由此得 } \mathbf{T}' = \begin{bmatrix} \sigma'_x & \tau'_{xy} & \tau'_{xz} \\ \tau'_{xy} & \sigma'_y & \tau'_{yz} \\ \tau'_{xz} & \tau'_{yz} & \sigma'_z \end{bmatrix}, \text{ 于是}$$

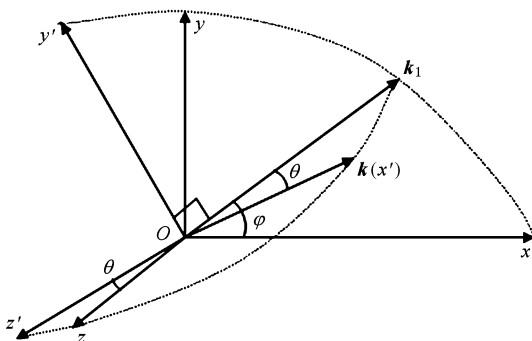


图 1 坐标变换

得到新坐标系中 $\sigma'_y, \sigma'_z, \tau'_{yz}$ 的表达式, 如果将 $x'y'z'$ 坐标系绕 x' 轴转动角度 ζ , 这里 $\tan 2\zeta = \frac{2\tau'_{yz}}{\sigma'_y - \sigma'_z}$, 可以使新坐标系 $x''y''z''$ 中切应力 $\tau''_{yz} = 0$, 并且 yoz 平面上的的正应力 σ''_y 和 σ''_z 即为次主应力, 有^[17]

$$\sigma''_y, \sigma''_z = \frac{1}{2}(\sigma'_y + \sigma'_z) \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma'_y - \sigma'_z}{2}\right)^2 + (\tau'_{yz})^2}. \quad (5)$$

理论和实验都可证明, 当偏振光沿 x'' 轴入射时, 与波矢方向平行的主应力 σ''_x 以及与波矢处于同一个平面内的剪切应力 τ''_{xy} 和 τ''_{xz} 都不引起光学效应, 只有 σ''_y, σ''_z 和 τ''_{yz} 才产生光学效应, 并与它们确定的次主应力差成正比.

对光传输介质作热应力双折射分析是为了得到存在热应力时的折射率值, 为光传输计算提供数据.

3. 光传输模拟原理与算法

对于各向同性的非均匀介质, 可以采用将介质划分网格, 利用光线方程式计算^[18]

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \nabla n, \quad (6)$$

其中 ds 是沿光线方向的微小弧长, \mathbf{r} 为光线路径上当前点的位置矢量, n 为该点处的折射率. 利用一些标准的数值计算方法可以求解该方程, 如泰勒级数法或龙格-库塔法^[19]. 如果各网格的折射率只有微小的变化, 也可以直接用差商代导数的方法求解.

将热应力数据转化为折射率数据之后, 每个格点都存储了三个主方向的折射率 (n_1, n_2, n_3), 原来的各向同性介质成为各向异性介质. 此时折射率与光传播的方向有关, 波矢量和光矢量也具有不同的方向. 根据光线在折射前的波法线矢量 \mathbf{k} , 利用菲涅耳公式可以计算得到新的格点内两个折射率的数值解以及相应的电矢量 \mathbf{E} 的方向, 根据电场、磁场和能流 \mathbf{S} 的关系可得能流的方向, 即光线的方向, 再沿光线方向追迹到下一步. 反复以上步骤直至光线射出该介质.

以上矢量微分算法直接采用电场与能流的矢量表示与矢量形式的光线方程, 样品的折射率分布无论按单轴晶体还是双轴晶体都适用, 也不要求样品是负晶体, 并且编程中不存在因采用几何作图法遇到的变量正负判断等困扰程序员的问题, 易于实现.

4. 热应力的计算

常用光学窗口的厚度为数毫米至数十毫米不等. 根据文献[13]对 ZnS 窗口的分析, 热光效应使折射率增大, 弹光效应产生各向异性, 使各方向的折射率之差增大, 以该文给定条件下第 10 s 的折射率为例: “热光效应引起的折射率变化为 0.0061, 而弹光效应引起的折射率变化为 0.0007, 为热光效应作用的 11.5%”. 弹光效应的作用远小于热光效应, 同我们先前的实验结果比较符合. 因此, 为了保证在较为精确和稳定的温差环境下以足够长的光路验证光传输计算结果的准确性, 并且便于观察, 我们采用了比较厚的可见光介质材料, 将上下表面温差设置在比较容易控制的范围之内. 分析模型和实验验证方案如下.

介质模型为国产 K9 玻璃, 其尺寸为 $30\text{ mm} \times 40\text{ mm} \times 100\text{ mm}$, 光线沿最长方向正入射, 采用有限元软件 ANSYS 来计算热应力. K9 玻璃的各项物理参量为: 杨氏模量 $E = 82\text{ GPa}$, 泊松比 $\nu = 0.206$, 线膨胀系数 $\alpha = 8.3 \times 10^{-6}$, 密度 $\rho = 2510\text{ kg/m}^3$, 传热系数 $\lambda = 1.114\text{ W/m}\cdot\text{K}$, 比热 $C = 858\text{ J/kg}\cdot\text{K}$. 分别计算了三维实体模型和简化的平面模型两种情况下的热应力, 二者计算结果相差并不大. 这里主要对平面简化模型进行详细讨论. 计算中的典型参量设置为: 模型尺寸为 $30\text{ mm} \times 40\text{ mm}$, 其中 x 方向为 30 mm , 坐标已由软件自动标注在各图的左下角. 稳态计算时下表面温度为 $80\text{ }^\circ\text{C}$, 上表面 $18\text{ }^\circ\text{C}$, 左右两表面保持与空气的对流接触, 空气温度为 $20\text{ }^\circ\text{C}$; 瞬态计算中总时间为 600 s , 时间步长为 30 s , 上下两个表面撤去温度约束, 改为对流条件. 冷却 300 s 后的部分计算结果如图 2 所示.

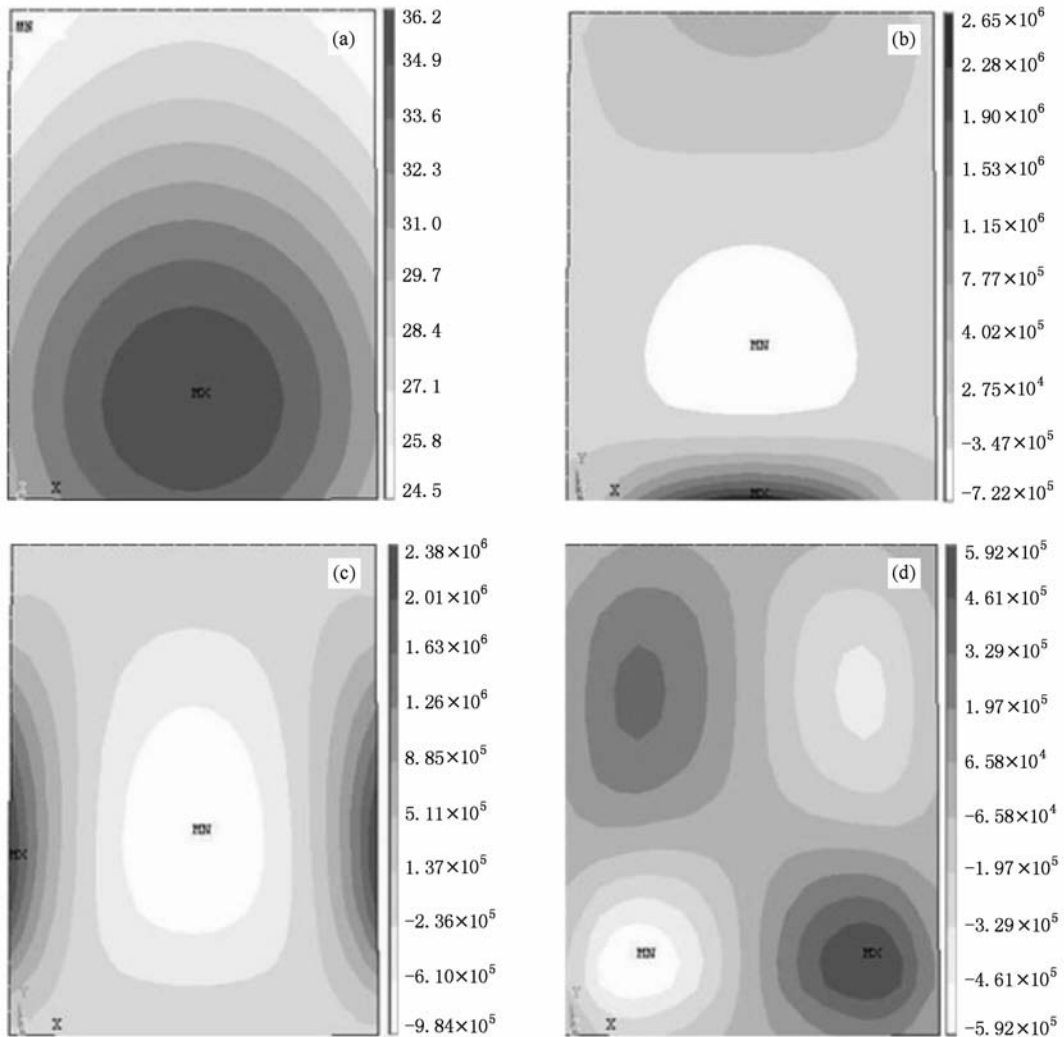


图 2 空气中冷却 300 s 后的计算结果 (a) 温度分布; (b) x 方向正应力 σ_x ; (c) y 方向正应力 σ_y ; (d) 切应力 τ_{xy}

对该样品的稳态计算和瞬态计算表明,当撤去温度约束之后,热流的方向是自下而上的,由于空气温度略大于上表面温度而大大小于下表面温度,周围均与空气接触,特别是下部与空气接触逐渐冷却,样品中温度最高的区域作为热源逐渐向内移动,温度随时间逐渐下降,样品下面由对流开始的膨胀状态逐渐复原,样品内等温区环绕热源分布.图 2(a)即为其中的一个瞬态,此时下部尺度小于对流之前但大于上部,同时样品内部与外围的温差逐渐变小,温度梯度下降,直至达到热平衡.

与此同时样品内部的应力也相应变化, σ_x 和 σ_y 变化最快的方向分别与热传导的两个独立方向相同, σ_x 主要沿 y 方向有较大梯度, σ_y 主要沿 x 方向有较大梯度,这与样品各区域的热胀冷缩效应相关,如图 2(b)和(c)所示.由于稳态时上部温度与参考温度接近,样品受下部加热的影响显著,随着时间推移样品上部的温度是先升后降,下部逐渐冷却,左右两边与空气接触降温,因此在对流过程中内部升温区域为压应力,外围大部区域为拉应力.图 2(d)中切应力与正应力相比小一个数量级,有一个呈十字形分布的非扭曲区域,对应于热传导的两个独立方向,由此十字分开的样品四个区域各对角方向的扭曲应变决定了它们的切应力正负相同,而上下对称或左右对称的区域切应力正负相反.

对于只有温度约束而无外部形状约束的样品,尽管温差比较大,产生的内应力并不大.按照本例计算结果,将样品中最大应力和最小应力的瞬态数据绘成图 3,发现当对流开始后 50 至 73 s 左右应力和应力差均达最大值,说明影响应力大小的原因在

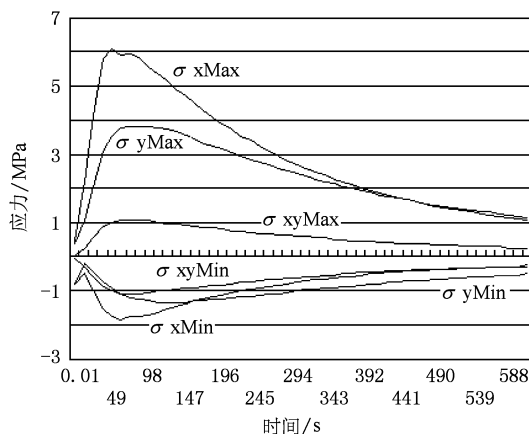


图 3 空气中冷却 600 s 过程中应力变化曲线

于温度梯度的变化率.

将计算结果输入模拟程序,结合相同条件下的实验,可验证上述光传输计算方法的正确性.

5. 光传输的实验和程序模拟

实验装置如图 4 所示,光源采用氦氖激光器,波长 632.8 nm,光线经扩束、准直后通过水平方向偏振的起偏器,然后垂直入射处于不均匀热场中的 K9 玻璃样品,热流方向自下而上,再经过竖直方向偏振的检偏器后透射在毛玻璃屏上,并利用 CCD 相机拍摄出现的条纹.记录完一幅图像后将起偏器和检偏器均按逆时针方向旋转 10° (始终保持两者相互垂直)再接着拍摄屏上的条纹,重复该过程直到起偏器一共转过 90° .

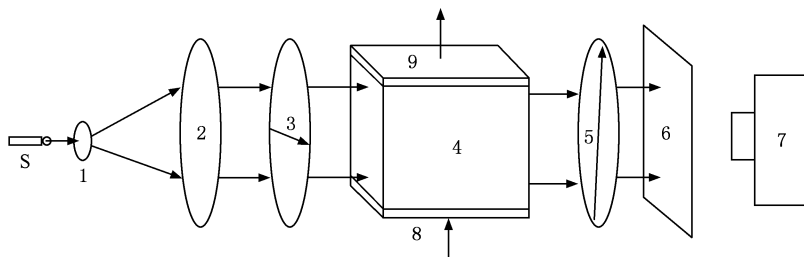


图 4 实验装置:S 为光源,1 为扩束镜,2 为准直镜,3 为起偏器,4 为样品,5 为检偏器,6 为屏,7 为 CCD 相机,8 为加热装置,9 为冷却装置

根据第 2 节和第 3 节的方法,我们编制了对光传输过程进行模拟的程序.上节中计算得到的平面应力数据作为该程序的输入,包括图 2 中 x, y 方向的正应力 σ_x 和 σ_y , 以及切应力 τ_{xy} , 一共计算了正入

射到介质表面的 21×21 条光线.在介质表面每条光线沿主应力方向分解为两条振动方向互相垂直的线偏振光,由于折射率不同,在介质中产生附加相移,在出射面上再将这两束偏振光沿检偏方向的分

量叠加起来,就得到了屏上各对应点的光强度分布.最后通过线性插值方法将屏上的图像模拟出来并输出,程序结果和实验图像如图 5 所示.

应当指出,图 5 是按一定时间顺序拍摄的,具体做法是每隔 20 s 同步转动起偏器和检偏器 10° .也就是说图 5 中的图片对应 180 s 的时间跨度.随着

时间的推移图片的整体亮度减弱.在另一个实验中取了更大的时间跨度,从 50 s 开始每隔 50 s 拍摄一次,图 6 是其中的部分结果,由于时间差大,亮度变化更为明显.这是由于随着温度的变化速率减慢,应力变小,主应力差相应减小,两个振动方向的光程差也逐渐减小之故.

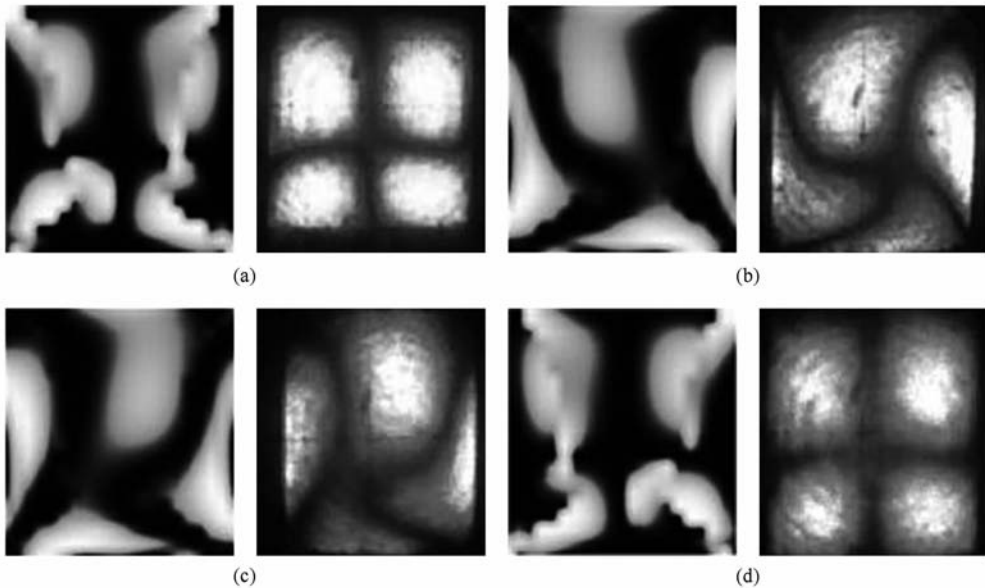


图 5 程序结果和实验图像对照,每组小图左边为程序模拟结果,右边为实验对照,起偏器转过的角度值分别为 (a) 0° ; (b) 30° ; (c) 60° ; (d) 90°

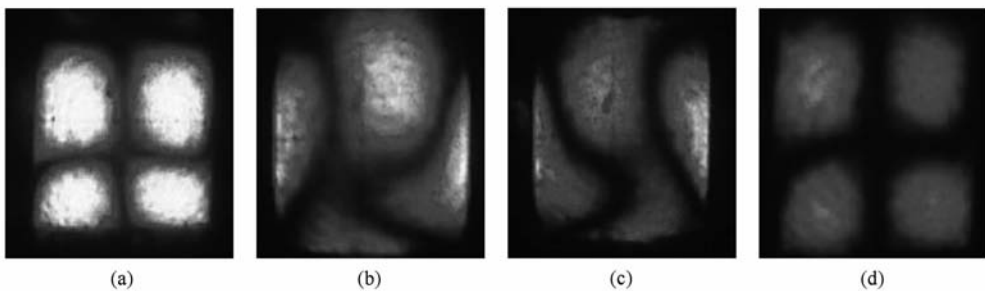


图 6 另一实验结果,拍摄时间分别为(a)50 s; (b)350 s; (c)650 s; (d)950 s

6. 结 论

从图 5 可以看出,程序模拟结果和实验图片在形状上基本是符合的,两者主要的区别在于实验所得条纹比较细,黑白过渡也相当平滑,而程序预测的条纹较粗,在黑白过渡区域常出现一些不规则的锯齿形状;当起偏器方向接近水平和竖直时,程序预测图片的边缘有大片的暗斑,而实验对照图虽然边缘也有变暗的趋势,但暗区面积较小,且反差也

不大.产生上述差别的原因有:1) 计算热应力时所用的参量(例如温度和对流系数)和实际的略有差别;2) 根据文献[17],如果正应力值 σ_x 和 σ_y 相差比较小,那么得出的应力主轴方向就将产生较大误差;3) 如果计算中网格取得不够密,同一网格内部实际的物理量有较大的变化而不再是假设的恒定值,导致程序结果和现实的偏差.但是总的来说,程序与实验的结果基本是一致的,反映的变化趋势也相同,证明了所用方法的正确性.

光传输计算是光学系统质量评价的基础工作,

将本文生成的光路计算模块加入光学设计软件, 以不同工作环境下的光学窗口等热应力分析结果作

为输入, 可以实现存在热应力双折射时的光传输仿真与光学系统质量评价.

- [1] Tian H D, Yu Z Y, Han L H, Liu Y M 2009 *Chin. Phys. B* **18** 1109
- [2] Jia W G, Yang X Y 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1053 (in Chinese) [贾维国、杨性愉 2005 物理学报 **54** 1053]
- [3] Sakamaki Y, Nasu Y, Hashimoto T, Hattori K, Inoue Y, Takahashi H 2009 *IEEE Photonics Technol. Lett.* **21** 938
- [4] Ye W N, Xu D X, Janz S, Cheben P, Picard M J, Lamontagne B, Tarr N G 2005 *J. Lightwave Technol.* **23** 1308
- [5] Fadel M, Bülters M, Niemand M, Voges E, Krummrich P M 2009 *J. Lightwave Technol.* **27** 698
- [6] Guan R F, Li Z T, Hou B, Gan Z Y, Huang D X, Liu S 2005 *J. Infrared Millim. Wave* **24** 45 (in Chinese) [关荣锋、李占涛、侯斌、甘志银、黄德修、刘胜 2005 红外与毫米波学报 **24** 45]
- [7] Zhang X J, Zhao J L, Hou J P 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3065 (in Chinese) [张晓娟、赵建林、侯建平 2007 物理学报 **56** 4668]
- [8] Inon M, Steven J 2002 *Opt. Commun.* **214** 315
- [9] Gu S T, Zhang G X, Huang G S 1991 *Acta Phys. Sin.* **40** 399 (in Chinese) [顾绍庭、张国轩、黄国松 1991 物理学报 **40** 399]
- [10] Chen W L, Gu P F, Wang Y, Zhang Y G, Liu X 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4316 (in Chinese) [陈为兰、顾培夫、王颖、章岳光、刘旭 2008 物理学报 **57** 4316]
- [11] Cen M, Zhang Y G, Chen W L, Gu P F 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 7025 (in Chinese) [岑恣、章岳光、陈为兰、顾培夫 2009 物理学报 **58** 7025]
- [12] Rinaldi D, Pietroni P, Daví F 2009 *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. Sect. A* **603** 294
- [13] Fan Z G, Zhang Y P, Pe Y W, Zhang J, He Y L 2007 *J. Infrared Millim. Waves* **26** 396 (in Chinese) [范志刚、张亚萍、裴扬威、张郡、何艳磊 2007 红外与毫米波学报 **26** 396]
- [14] Theocaris P S, Gdoutos E E 1979 *Matrix Theory of Photoelasticity* (Berlin; New York: Springer-Verlag) p108
- [15] Zhang W Q 1992 *Appl. Opt.* **31** 7328
- [16] Xiao Y Q, Duan Z L 1990 *Principle and method of photoelastic matrix* (1rd edition) (Wuhan: Hust press) p401 (in Chinese) [肖永谦、段自力 1990 光弹性矩阵原理和方法 第1版 (武汉: 华中理工大学出版社 p401)]
- [17] Timoshenko S P, Goodier J N 2004 *Theory of Elasticity* (3rd edition) (Beijing: Tsinghua University Press) p22
- [18] Simon M C 1983 *Appl. Opt.* **22** 354
- [19] Deng S T, Li X T, Cen Z F, Jian S F 2007 *Appl. Opt.* **46** 3102

Light transmission in thermal stress-induced birefringent medium^{*}

Cen Zhao-Feng Li Xiao-Tong[†]

(*State Key Laboratory of Modern Optical Instrumentation, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China*)

(Received 21 October 2009; revised manuscript received 16 December 2009)

Abstract

In this paper the temperature and thermal stress distribution in a simplified-mode transparent slab is calculated and then variation of refractive index is acquired based on the photo-elastic theory. Using the vector differential algorithm the refractive behavior of rays in such media is simulated, and luminous intensity distribution and shape of fringes at the receiving plane is predicted. The output of the program is in coincidence with the check experiment based on photo-elasticity technique, which indicates the correctness of our analysis method and light transmission calculation method. This research provides a practical means for improving the imaging quality of optical instruments.

Keywords: photo-elastic, stress birefringence, ray trace

PACC: 7820H, 4225L, 4215D

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10875105, 60977101), the National High Technology Research and Development Program of China (Grant No. 2009AA12Z108) and the Aero- Science Foundation (Grant Nos. 20060112111, 20090176001).

[†] Corresponding author. E-mail: lixt@zju.edu.cn