第 59 卷 第 9 期 2010 年 9 月
1000-3290/2010/59(09)/5930-04
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol. 59, No. 9, September, 2010

广义 Birkhoff 方程的积分方法*

李彦敏[1)†] 梅凤翔[2)]

1)(商丘师范学院物理与信息工程系,商丘 476000)

2)(北京理工大学宇航学院力学系,北京 100081)

(2009 年 11 月 28 日收到;2009 年 12 月 12 日收到修改稿)

场方法和最终乘子法是求解运动微分方程的基本方法. 本文将这两种方法应用于广义 Birkhoff 系统,求出了场方法的基本偏微分方程和该方程的完全积分;根据 Jacobi 最终乘子定理求出了广义 Birkhoff 方程的解. 并举例说明结果的应用.

关键词: 广义 Birkhoff 系统, 场方法, 最终乘子法, 积分

PACC: 0320

1. 引 言

Birkhoff 提出了 Birkhoff 系统的概念[1]. Santilli 进一步研究了 Birkhoff 方程、Birkhoff 方程的变换理论以及 Galilei 相对论的推广等[2,3]. 文献[4]构造了 Birkhoff 系统动力学的基本框架. 近年来,Birkhoff 系统动力学领域内的研究已取得了一系列重要结果[5—18]. Birkhoff 系统动力学是 Hamilton 力学的自然推广,可在原子与分子物理,强子物理中找到应用[2,3]. 我们进一步研究了 Birkhoff 方程增加一个附加项的情形,并称之为广义 Birkhoff 方程[19]. 有关广义 Birkhoff 系统的研究已有初步进展,涉及基本框架[20],动力学逆问题[21],积分不变量[22],时间积分定理[23],共形不变性[24]以及对称性[19]等.

约束力学系统微分方程的积分问题是研究系统动力学行为的关键问题. 场积分方法可用于积分完整非保守系统和非完整系统的运动微分方程[25—27]以及 Birkhoff 系统的运动方程等[4]. Jacobi 最终乘子定理也是一种重要的求解方法. 最终乘子定理指出,对 n 个一阶方程组,当已知 $n-1$ 个积分时,可求得最终解[28]. 文献[29]研究了广义 Hamilton 系统的最终乘子理论. 本文将场积分方法和最终乘子方法应用于求解广义 Birkhoff 系统的微分方程.

2. 广义 Birkhoff 方程

广义 Birkhoff 方程有形式[19,20]

$$\Omega_{\mu\nu}\dot{a}^{\nu}-\frac{\partial B}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial R_{\mu}}{\partial t}=-\Lambda_{\mu}$$

$$(\mu,\nu=1,2,\cdots,2n),\tag{1}$$

其中 $B=B(t,\boldsymbol{a})$ 称为 Birkhoff 函数,$R_{\mu}=R_{\mu}(t,\boldsymbol{a})$ 称为 Birkhoff 函数组,$\Lambda_{\mu}=\Lambda_{\mu}(t,\boldsymbol{a})$ 为附加项,而

$$(\Omega_{\mu\nu})=\left(\frac{\partial R_{\nu}}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial R_{\mu}}{\partial a^{\nu}}\right).\tag{2}$$

当 $\Lambda_{\mu}=0$ $(\mu=1,2,\cdots,2n)$ 时,方程(1)成为 Birkhoff 方程.

假设系统非奇异,即设

$$\det(\Omega_{\mu\nu})\neq 0,$$

则由方程(1)可求出所有 $\dot{a}^{\mu}$,有

$$\dot{a}^{\mu}=F_{\mu}(t,\boldsymbol{a}),\tag{3}$$

其中

$$F_{\mu}=\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}+\frac{\partial R_{\nu}}{\partial t}-\Lambda_{\mu}\right),$$

$$\Omega^{\mu\nu}\Omega_{\nu\rho}=\delta^{\mu}_{\rho}.\tag{4}$$

3. 积分广义 Birkhoff 方程的场方法

令

* 国家自然科学基金(批准号:10772025,10932002,10972127)和河南省自然科学基金(批准号:082300410330,082300410370)资助的课题.

† E-mail: ynmnl@ yahoo. com. cn

$$x_\mu = a^\mu,$$

则方程(3)表示为

$$\dot{x}_\mu = F_\mu(t, x_\nu) \quad (\mu, \nu = 1, 2, \cdots, 2n). \tag{5}$$

令

$$x_1 = u(t, x_m) \quad (m = 2, 3, \cdots, 2n),$$

则有

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x_m} F_m(t, u, x_R) - F_1(t, u, x_R) = 0. \tag{6}$$

称方程(6)为基本偏微分方程. 令其完全积分为

$$x_1 = u(t, x_m, C_\mu). \tag{7}$$

设初始条件为

$$t = 0, \quad x_\mu(0) = x_{\mu0}, \tag{8}$$

将(8)式代入(7)式，则可将一个常数，例如 C_1，用 $x_{\mu0}$ 和其余 C_m 表示出，这样，(7)式可表示为

$$x_1 = u(t, x_m, C_m). \tag{9}$$

根据场方法的基本思想，可以证明，方程(5)相应初始条件(8)的解，可用(9)式以及下述 $2n-1$ 个代数方程：

$$\frac{\partial u}{\partial C_m} = 0 \quad (m = 2, 3, \cdots, 2n) \tag{10}$$

来确定.

场方法的主要困难在于求出基本偏微分方程(6)的完全积分. 只要能找到完全积分，就可用代数运算求得问题的解.

4. 积分广义 Birkhoff 方程的最终乘子法

假设已知方程(5)的 $2n-1$ 个积分

$$f_s(t, x_\mu) = C_s \quad (s = 1, 2, \cdots, 2n-1). \tag{11}$$

根据 Jacobi 最终乘子定理知，方程(5)的最后一个积分有形式

$$\int \frac{M'}{\Delta'}(\mathrm{d}x_{2n} - F'_{2n}(t, x_\mu)\mathrm{d}t) = C_{2n}, \tag{12}$$

式中“′”的项表示其中的 $x_s(s=1,2,\cdots,2n-1)$ 已借助(11)式表示为 x_{2n} 和 t 的函数. M 为 Jacobi 最终乘子，它满足偏微分方程

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial (M F_\mu)}{\partial x_\mu} = 0, \tag{13}$$

Δ 为 Jacobi 行列式

$$\Delta = \frac{\partial(f_1, f_2, \cdots, f_{2n-1})}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_{2n-1})}. \tag{14}$$

利用最终乘子法的主要困难在于求积分式(12).

5. 算　　例

为说明场积分方法和最终乘子法对广义 Birkhoff 系统的应用，下面给出一个算例.

4 阶广义 Birkhoff 系统为

$$\begin{aligned} &R_1 = a^3, \quad R_2 = a^4, \\ &R_3 = R_4 = 0, \quad B = 0, \\ &\Lambda_1 = -a^4, \quad \Lambda_2 = -a^2, \\ &\Lambda_3 = -a^3, \quad \Lambda_4 = -a^4. \end{aligned} \tag{15}$$

广义 Birkhoff 方程(1)给出

$$-\dot{a}^3 = a^4, \; -\dot{a}^4 = a^2, \; \dot{a}^1 = a^3, \; \dot{a}^2 = a^4.$$

令

$$x_1 = a^1, \; x_2 = a^2, \; x_3 = a^3, \; x_4 = a^4,$$

则方程表示为

$$\dot{x}_1 = x_3, \; \dot{x}_2 = x_4, \; \dot{x}_3 = -x_4, \; \dot{x}_4 = -x_2. \tag{16}$$

首先，用场方法求解.

令

$$x_1 = u(t, x_2, x_3, x_4),$$

则基本偏微分方程(6)给出

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x_2} x_4 + \frac{\partial u}{\partial x_3}(-x_4) \\ &+ \frac{\partial u}{\partial x_4}(-x_2) - x_3 = 0. \end{aligned}$$

令其完全积分有形式

$$x_1 = u = f_0(t) + f_2(t)x_2 + f_3(t)x_3 + f_4(t)x_4,$$

其中 f_0, f_2, f_3, f_4 为待定函数，将其代入基本偏微分方程，分出自由项，含 x_2, x_3，和 x_4 的项，并取为零，得

$$\dot{f}_0 = 0, \quad \dot{f}_2 - f_4 = 0,$$

$$\dot{f}_3 - 1 = 0, \quad \dot{f}_4 + f_2 - f_3 = 0,$$

积分得

$$\begin{aligned} &f_0 = C_0, \quad f_3 = t + C_3, \\ &f_2 = C_2\cos t + C_4\sin t + t + C_3, \\ &f_4 = -C_2\sin t + C_4\cos t + 1. \end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned} x_1 = u = {} & C_0 + (C_2\cos t + C_4\sin t + t + C_3)x_2 \\ & + (t + C_3)x_3 + (-C_2\sin t + C_4\cos t + 1)x_4. \end{aligned}$$

假设初始条件为

$$t = 0, x_\mu(0) = x_{\mu0} \quad (\mu = 1, 2, 3, 4),$$

将其代入 u 中并解出常数 C_0，有

$$C_0 = x_{10} - (C_2 + C_3)x_{20} - C_3 x_{30} - (C_4 + 1)x_{40},$$

于是有

$$x_1 = u = x_{10} - (C_2 + C_3)x_{20} - C_3 x_{30} - (C_4 + 1)x_{40} + (C_2\cos t + C_4\sin t + t + C_3)x_2 + (t + C_3)x_3 + (-C_2\sin t + C_4\cos t + 1)x_4.$$

(10)式给出

$$0 = \frac{\partial u}{\partial C_2} = -x_{20} + x_2\cos t - x_4\sin t,$$

$$0 = \frac{\partial u}{\partial C_3} = -x_{20} - x_{30} + x_2 + x_3,$$

$$0 = \frac{\partial u}{\partial C_4} = -x_{40} + x_2\sin t + x_4\cos t.$$

由此以及 u 的表达式,得到问题的解

$$\begin{aligned} x_1 &= (x_{20} + x_{30})t - x_{20}\sin t + x_{40}\cos t + x_{10} - x_{40},\\ x_2 &= x_{20}\cos t + x_{40}\sin t,\\ x_3 &= x_{20} + x_{30} - x_{20}\cos t - x_{40}\sin t,\\ x_4 &= x_{40}\cos t - x_{20}\sin t. \end{aligned} \tag{17}$$

其次,用最终乘子法求解.

由方程(16)可找到以下 3 个积分:

$$\begin{aligned} f_1 &= x_1 - x_4 - (x_2 + x_4)t = C_1,\\ f_2 &= x_2^2 + x_4^2 = C_2,\\ f_3 &= x_2 + x_3 = C_3. \end{aligned} \tag{18}$$

注意,这里的 $f_1, f_2, f_3, C_1, C_2, C_3$ 与前面出现的无关. Jacobi 行列式(14)给出

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -t & -t \\ 0 & 2x_2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

注意到,$M = 1$ 是问题的 Jacobi 最终乘子.(12)式给出

$$\int \frac{1}{2x_2}(\mathrm{d}x_4 + x_2\mathrm{d}t) = C_4,$$

即

$$\pm\int \frac{\mathrm{d}x_4}{\sqrt{C_2 - x_4^2}} + t = 2C_4,$$

第 4 个积分为

$$\pm\arcsin\left(\frac{x_4}{C_2}\right) + t = 2C_4. \tag{19}$$

这样,(18),(19)式就构成问题的解.

6. 结　论

广义 Birkhoff 系统是一类更具广泛性的经典约束力学系统,场方法和最终乘子法是更具普遍性的积分方法. 本文将这两种积分方法应用于广义 Birkhoff 系统,求出了场方法的基本偏微分方程和该方程的完全积分,根据 Jacobi 最终乘子定理求出了广义 Birkhoff 方程的解. 场方法和最终乘子法是求解广义 Birkhoff 方程的有效方法.

[1] Birkhoff G D 1927 *Dynamical Systems* (Providence: AMS College Publisher)

[2] Santilli R M 1978 *Foundations of theoretical mechanics* Ⅰ (New York: Springer Verlag)

[3] Santilli R M 1983 *Foundations of Theoretical Mechanics* Ⅱ (New York: Springer Verlag)

[4] Mei F X, Shi R C, Zhang Y F and Wu H B 1996 *Dynamics of Birkhoff Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔、史荣昌、张永发、吴惠彬 1996 Birkhoff 系统动力学(北京:北京理工大学出版社)]

[5] Zhang H B 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1837 (in Chinese) [张宏彬 2001 物理学报 **50** 1837]

[6] Guo Y X, Luo S K, Shang M 2001 *Rep. Math. Phys.* **47** 313

[7] Luo S K, Lu Y B, Zhou Q, Wang Y D, Ou Y S 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1913 (in Chinese) [罗绍凯、卢一兵、周　强、王应德、欧阳实 2002 物理学报 **51** 1913]

[8] Shang M, Guo Y X, Mei F X 2007 *Chin. Phys.* **16** 292

[9] Ge W K, Mei F X 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 2476 (in Chinese) [葛伟宽、梅凤翔 2007 物理学报 **56** 2479]

[10] Mei F X, Gang T Q, Xie J F 2006 *Chin. Phys.* **15** 1678

[11] Fu J L, Chen L Q, Luo S K, Chen X W, Wang X M 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2289 (in Chinese) [傅景礼、陈立群、罗绍凯、陈向炜、王新民 2001 物理学报 **50** 2289]

[12] Zhang Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 5374 (in Chinese) [张　毅 2008 物理学报 **57** 5374]

[13] Gu S L, Zhang H B 2004 *Chin. Phys.* **13** 979

[14] Ding N, Fang J H, Chen X X 2008 *Chin. Phys.* B **17** 1967

[15] Chen X W, Zhang R C, Mei F X 2000 *Acta Mech. Sin.* **16** 282

[16] Chen X W, Mei F X 2000 *Mechanics Research Communications* **27** 365

[17] Chen X W 2002 *Chin. Phys.* **11** 441

[18] Li Y M 2008 *J. of Henan Normal University* **36** 52 (in Chinese) [李彦敏 2008 河南师范大学学报(自然科学版) **36** 52]

[19] Mei F X 1993 *Science in China Serie* A **36** 1456

[20] Mei F X, Zhang Y F, He G 2007 *J. of Beijing Institute of Technology* **27** 1035 (in Chinese) [梅凤翔、张永发、何　光 2007 北京理工大学学报 **27** 1035]

[21] Mei F X, Xie J F, Gang T Q 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4649 (in Chinese) [梅凤翔、谢加芳、江铁强 2008 物理学报 **57** 4649]

[22] Mei F X, Cai J L 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4657 (in Chinese) [梅凤翔、蔡建乐 2008 物理学报 **57** 4657]

[23] Ge W K, Mei F X 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 699 (in Chinese) [葛伟宽、梅凤翔 2009 物理学报 **58** 699]

[24] Mei F X, Xie J F, Gang T Q 2008 *Acta Mech. Sin.* **24** 583

[25] Vujanović B 1984 *Int. J. Non-Linear Mech.* **19** 383

[26] Mei F X 1989 *Acta Mech. Sin.* **5** 260

[27] Mei F X 1990 *Acta Mech. Sin.* **6** 160

[28] Whittaker E T 1952 *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies* (Cambridge: Vniv Press)

[29] Mei F X, Shang M 2008 *Chin. Phys. Lett.* **25** 3837

Integral methods for the generalized Birkhoff equations*

Li Yan-Min[1)†] Mei Feng-Xiang[2)]

1) (*Department of Physics and Information Engineering, Shangqiu Normal University, Shangqiu* 476000, *China*)

2) (*Department of Applied Mechanics, School of Aerospace, Beijing Institute of Technology, Beijing* 100081, *China*)

(Received 28 November 2009; revised manuscript received 12 December 2009)

Abstract

The field method and the last multiplier method are general integral methods for solving the differential equations of motion. The two methods are applied to the generalized Birkhoff system, and the complete integrals of the basic partial differential equation are given. Furthermore, the solutions of the generalized Birkhoff equations are obtained by Jacobi last multiplier theorem. An example is given to illustrate the application of the results.

Keywords: generalized Birkhoff system, field method, last multiplier method, integral

PACC: 0320

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10772025, 10932002, 10972127) and the Natural Science Foundation of Henan Province, China (Grant Nos. 082300410330, 082300410370).

† E-mail: ynmnl@yahoo.com.cn