

标量控制下的二次自治混沌系统不确定 参数估计和自适应反同步*

刘 迪[†] 徐 伟 郭培荣 倪 菲

(西北工业大学应用数学系, 西安 710072)

(2009 年 6 月 30 日收到; 2010 年 1 月 7 日收到修改稿)

基于 Lyapunov 稳定性理论, 设计了一个简单的标量自适应控制器分别使具有确定和不确定参数的三维(3D)二次自治混沌系统实现反同步. 此外, 从驱动和响应系统间的时序列动态估计出所有不确定参数. 数值仿真表明该方法的有效性和实用性.

关键词: 反同步, 3D 二次自治混沌系统, 标量控制器, Lyapunov 函数

PACC: 0545

1. 引 言

1990 年, Pecora 和 Carroll 介绍了“混沌同步”的概念^[1]. 在随后的 20 年时间里, 混沌同步在物理, 化学和生命科学, 信号处理, 保密通信等众多领域都表现出广阔的应用前景^[2]. 以往的研究大多集中于混沌系统的自同步和不同混沌系统的同步问题^[3-6]. 近年来, 反同步作为对称振荡器的一个常见现象, 受到了很多学者的关注^[7]. 所谓反同步, 是指达到同步的两个混沌系统的状态向量的绝对值相同但符号相反^[8]. 早在 17 世纪, Huygens 首先观察到两个单摆时钟之间的反同步现象^[9]. 随后, 一些学者在自同步的实验过程中也观测到了反同步现象, 如 Bennett 等重新研究了 Huygens 的试验并发现改变初值可能使耦合的单摆发生同步或反同步现象^[10], Kim 等在对生物系统产生非混沌信号实验的研究中发现了反同步现象等^[11]. 此外, Cao 等的研究表明, 反同步也能够对称的超混沌系统的子混沌系统中发生^[12]. 尽管反同步现象如此普遍, 但是关于它的研究目前还很少见. 王兴元和王明军以超混沌 Chen 系统为例分别用主动控制法、全局控制法和变量替换法研究了反同步^[13]. Liu 等运用自适应控制的方法对两个双线性耦合的统一混沌系统

实现了完全反同步^[14]. Li 等通过自适应反馈控制使自治和非自治系统实现反同步^[15]. Al-Sawalha 等运用非线性控制器使混沌系统达到反同步^[16]. 然而这些控制方法通常都是矢量的, 从而比标量方法难于应用到实际应用中. 因此考虑用标量方法控制反同步更具有实际意义. 本文提出了新颖的标量控制方法使一个新的具有四翼混沌吸引子的二次自治混沌系统实现反同步. 该方法对具有确定参数和不确定参数的 3D 二次自治混沌系统都是有效的, 数值仿真也验证了该方法的有效性.

2. 二次自治混沌系统的反同步

最近, Wang 发现了一个新的 3D 二次自治混沌系统^[17], 其混沌吸引子具有奇特的四个翼. 该系统数学模型为

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 2.4x_1 - x_2x_3, \\ \dot{x}_2 &= -ax_2 + x_1x_3, \\ \dot{x}_3 &= -bx_3 - cx_1 + x_1x_2,\end{aligned}\quad (1)$$

这里的 x_1, x_2 和 x_3 表示状态变量. 当 $a=6, b=4$ 和 $c=2.8$ 时, 系统(1)是混沌的, 其吸引子见图 1. 下面我们利用简单的标量控制器分别使具有确定参数和具有不确定参数的 3D 二次自治混沌系统实现反同步, 并通过驱动和响应系统之间的时序列准确估

* 国家自然科学基金(批准号:10872165)资助的课题.

[†] E-mail: liudi@mail.nwpu.edu.cn

计具有不确定参数的 3D 二次自治混沌系统的不确定参数.

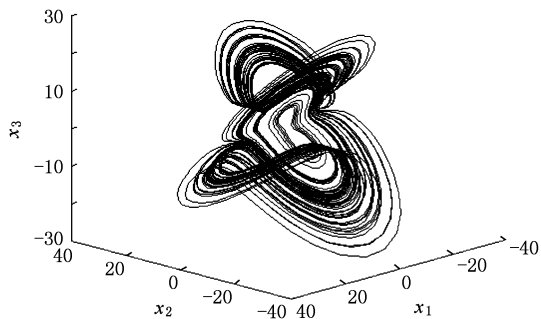


图 1 当 $a=6, b=4$ 和 $c=2.8$ 时系统(1)的四翼形混沌吸引子

2.1. 具有确定参数系统的自适应反同步

令驱动系统为系统(1), 响应系统为

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= 2.4y_1 + y_2y_3 + u, \\ \dot{y}_2 &= -ay_2 - y_1y_3, \\ \dot{y}_3 &= -by_3 - cy_1 - y_1y_2,\end{aligned}\quad (2)$$

这里的 a, b 和 c 是给定参数, u 是一个标量控制器. 设

$$\begin{aligned}e_1 &= x_1 + y_1, \\ e_2 &= x_2 + y_2, \\ e_3 &= x_3 + y_3,\end{aligned}$$

则方程(1)和方程(2)的反同步误差系统为

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= 2.4e_1 + y_2e_3 - x_3e_2 + u, \\ \dot{e}_2 &= -ae_2 + x_3e_1 - y_1e_3, \\ \dot{e}_3 &= -be_3 - ce_1 + x_1e_2 - y_2e_1.\end{aligned}\quad (3)$$

我们的目标就是设计一个标量控制器 u 和一个参数估计校正律, 使得从不同初始条件出发的驱动和响应系统实现全局渐近反同步, 即状态向量满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$, 这里 $e(t) = (e_1, e_2, e_3)^T$. 因此, 驱动和响应系统的全局渐近反同步问题转变为设计一个控制器使误差系统(3)实现渐近稳定.

根据标量控制的思想, 我们设计控制器为

$$u = -\varepsilon(x_1 + y_1), \quad (4)$$

这里的 ε 满足自校正律

$$\dot{\varepsilon} = k\varepsilon^2, \quad \varepsilon(0) = 0, \quad k > 0, \quad (5)$$

其中 k 用于控制达到反同步的速度. 由于系统(1)是一个混沌系统, 所以其变量 x_1, x_2, x_3 是有界的. 这里不妨假设它们的上界为 δ , 即 $|x_i| \leq \delta (i=1, 2, 3)$. 同理, 设不确定参数 a, b, c 的界为 $|a| \leq A, |b| \leq$

$B, |c| \leq C$, 这里的 A, B, C 是正常数.

定理 1 假设 $a > 0$ 和 $b > 0$, 从任意初始条件出发的驱动系统(1)和响应系统(2)在控制器(4)和自校正律(5)下实现全局反同步.

证明 考虑 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{2} \left[e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + \frac{1}{k}(\varepsilon - \varepsilon_c)^2 \right], \quad (6)$$

这里的 ε_c 是足够大的常数.

对(6)求导得

$$\begin{aligned}\dot{V} &= e_1\dot{e}_1 + e_2\dot{e}_2 + e_3\dot{e}_3 + \frac{1}{k}(\varepsilon - \varepsilon_c)\dot{\varepsilon} \\ &= -(\varepsilon_c - 2.4)e_1^2 - ae_2^2 - be_3^2 \\ &\quad - ce_1e_3 - (y_1 - x_1)e_1e_2 \\ &= -e^T M e,\end{aligned}\quad (7)$$

这里

$$M = \begin{pmatrix} \varepsilon_c - 2.4 & \frac{y_1 - x_1}{2} & \frac{c}{2} \\ \frac{y_1 - x_1}{2} & a & 0 \\ \frac{c}{2} & 0 & b \end{pmatrix}. \quad (8)$$

根据 Lyapunov 稳定性理论可以知道, 当 M 为正定矩阵时, \dot{V} 为负定, 即误差系统(3)是渐近稳定的. 如果 M 的所有顺序主子式均大于零, 则 M 为正定, 即

$$\varepsilon_c - 2.4 > 0, \quad (9)$$

$$a(\varepsilon_c - 2.4) - \frac{(y_1 - x_1)^2}{4} > 0, \quad (10)$$

$$b \left[a(\varepsilon_c - 2.4) - \frac{(y_1 - x_1)^2}{4} \right] - \frac{ac^2}{4} > 0. \quad (11)$$

由于 $a > 0$ 和 $b > 0$, 只要选择 ε_c 为 $\varepsilon_c > \frac{AC^2}{4B} + \frac{\delta^2}{A} +$

2.4 就能满足 V 为正定 \dot{V} 为负定. 由(7)式可知 $\dot{V} = 0$ 当且仅当 $e_i = 0 (i=1, 2, 3)$. 根据 Lasalle 不变原理, 从误差系统(3)任意初值出发的轨线, 当 $t \rightarrow \infty$ 时趋向于包含在 $\dot{V} = 0$ 中的最大不变集 $E = \{(e, \varepsilon) \in R^{3 \times 1} : e = 0, \varepsilon = \varepsilon_0 \in R^1\}$ 上, 即当 $t \rightarrow \infty$ 时, $y \rightarrow -x, \varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$.

在给定参数的情况下, 为了说明所设计的标量控制器的有效性, 采用四阶龙格-库塔法进行数值仿真. 驱动系统(1)和响应系统(2)的初始点分别选取为 $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (2, 2.5, 3)$ 和 $(y_1(0), y_2(0), y_3(0)) = (3.5, 4, 4.5)$ 时, 两个二次自治混沌系统的反同步曲线如图 2 所示, 反同步误

差曲线如图3所示. 从图3可见, $e_1(t), e_2(t), e_3(t)$ 最终稳定在零点附近, 即在控制器(4)式作用下, 驱动系统(1)和响应系统(2)达到了反同步.

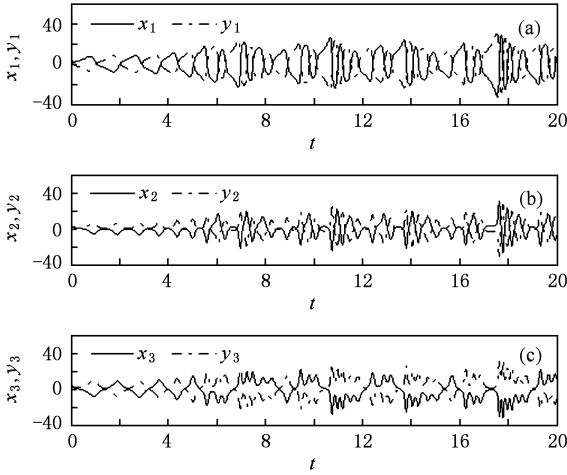


图2 给定参数的系统(1)和系统(2)的反同步曲线 (a) x_1 和 y_1 的反同步曲线; (b) x_2 和 y_2 的反同步曲线; (c) x_3 和 y_3 的反同步曲线

2.2. 具有不确定参数系统的自适应反同步

当驱动系统(1)的参数 a, b 和 c 为不确定参

数时, 响应系统为

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= 2.4y_1 + y_2y_3 + u, \\ \dot{y}_2 &= -\alpha y_2 - y_1y_3, \\ \dot{y}_3 &= -\beta y_3 - \gamma y_1 - y_1y_2, \end{aligned} \quad (12)$$

这里的 α, β 和 γ 是对不确定参数 a, b 和 c 的估计. 方程(1)和方程(12)的反同步误差系统为

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= 2.4e_1 + y_2e_3 - x_3e_2 + u, \\ \dot{e}_2 &= -ae_2 + x_3e_1 - y_1e_3 + (a - \alpha)y_2, \\ \dot{e}_3 &= -be_3 - ce_1 + x_1e_2 - y_2e_1 \\ &\quad + (c - \gamma)y_1 + (b - \beta)y_3. \end{aligned} \quad (13)$$

定理2 假设 $a > 0$ 和 $b > 0$, 从任意初始条件出发的驱动系统(1)和响应系统(12)在如下控制器和参数校正律下实现全局反同步:

$$u = -\varepsilon(x_1 + y_1), \quad \dot{\varepsilon} = ke_1^2,$$

$$\dot{\alpha} = \theta_a y_2 e_2, \quad \dot{\beta} = \theta_b y_3 e_3, \quad \dot{\gamma} = \theta_c y_1 e_3. \quad (14)$$

并且可以用 α, β 和 γ 估计出 a, b 和 c 的值.

证明 考虑 Lyapunov 函数

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \left[e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + \frac{1}{k}(\varepsilon - \varepsilon_c)^2 + \frac{1}{\theta_a}(\alpha - a)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\theta_b}(\beta - b)^2 + \frac{1}{\theta_c}(\gamma - c)^2 \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

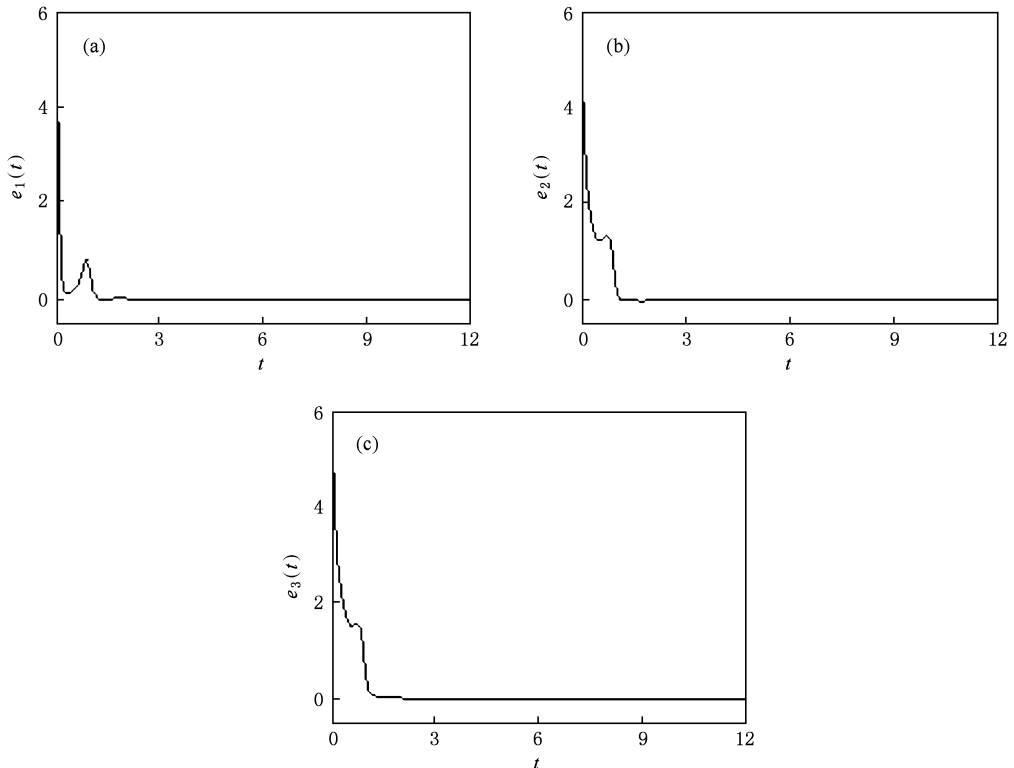


图3 给定参数的系统(1)和系统(2)的反同步误差曲线 (a) $e_1(t)$; (b) $e_2(t)$; (c) $e_3(t)$

对 (15) 求导得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 + e_3 \dot{e}_3 + \frac{1}{k}(\varepsilon - \varepsilon_c) \dot{\varepsilon} \\ &+ \frac{1}{\theta_\alpha}(\alpha - a) \dot{\alpha} + \frac{1}{\theta_\beta}(\beta - b) \dot{\beta} + \frac{1}{\theta_\gamma}(\gamma - c) \dot{\gamma} \\ &= -(\varepsilon_c - 2.4)e_1^2 - ae_2^2 - be_3^2 \\ &- ce_1e_3 - (\gamma_1 - x_1)e_1e_2 \\ &= -e^T Me. \end{aligned} \tag{16}$$

通过定理 1 证明可知 V 为正定 \dot{V} 为负定. 因此, 误差系统 (13) 渐进稳定, 即具有不确定参数的驱动系统 (1) 与响应系统 (12) 达到反同步.

为了说明上述分析结果的正确性, 下面采用四阶龙格-库塔法进行数值仿真, 初始状态为 $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (2, 2.5, 3)$, $(y_1(0), y_2(0), y_3(0)) = (3.5, 4, 4.5)$, 和 $\varepsilon(0) = 0$. 图 4 和图 5 分别为当 $\theta_j = 2(j = \alpha, \beta, \gamma)$ 且系统 (1) 中参数 a, b 和 c 不确定时, 系统 (1) 和系统 (12) 的反同步曲线和反同步误差曲线. 可见在标量控制器和校正律 (14) 作用下, 含有不确定参数的驱动系统 (1) 和响应系统 (12) 达到了反同步. 图 6 和图 8 分别展示了当 $\theta_j = 2(j = \alpha, \beta, \gamma)$ 和 $\theta_j = 5(j = \alpha, \beta, \gamma)$ 时, 驱动系统 (1)

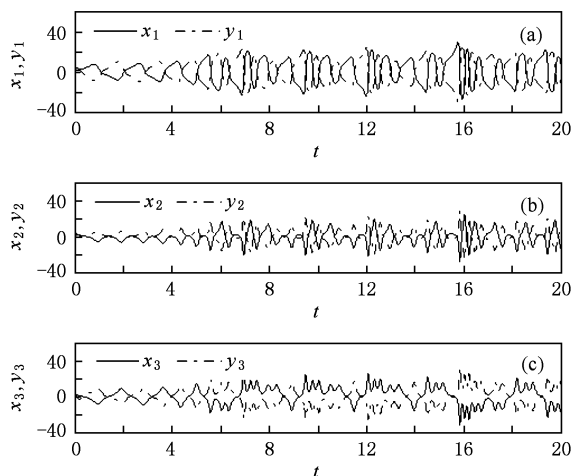


图 4 当 $\theta_j = 2(j = \alpha, \beta, \gamma)$, 参数 a, b 和 c 为不确定参数时, 系统 (1) 和系统 (12) 的反同步曲线 (a) x_1 和 y_1 的反同步曲线; (b) x_2 和 y_2 的反同步曲线; (c) x_3 和 y_3 的反同步曲线

的不确定参数被固定为 $a = 6, b = 4$ 和 $c = 2.8$ 时, 其估计值 α, β 和 γ 的时间演化曲线. 可以看出随着时间的演化, (α, β, γ) 收敛到 $(a, b, c) = (6, 4, 2.8)$. 由图 4—图 8, 可以看到从不同的初值出发的反同步误差将收敛到 0 同时系统所具有的不确定参数在我

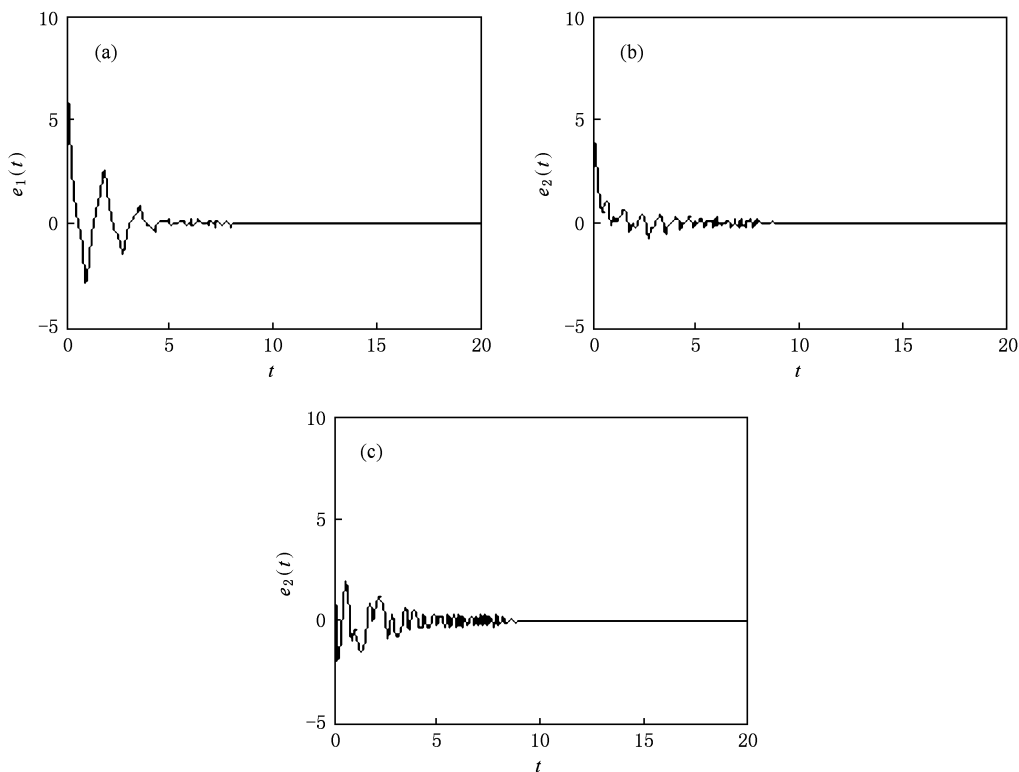


图 5 当 $\theta_j = 2(j = \alpha, \beta, \gamma)$, 参数 a, b 和 c 为不确定参数时, 系统 (1) 和系统 (12) 的反同步误差曲线 (a) $e_1(t)$; (b) $e_2(t)$; (c) $e_3(t)$

们所提出的这种简单标量控制方法下得到准确估计. 此外, 分别比较图 5 和图 7, 图 6 和图 8, 可以看到对于不同的 $\theta_j (j = \alpha, \beta, \gamma)$, 驱动系统 (1) 和响应系统 (12) 达到反同步所需要的时间也不同. $\theta_j (j = \alpha, \beta, \gamma)$ 的值越大, 达到反同步所需要的时间也就越短, 准确的估值出 α, β 和 γ 的值所需要的时间也就越短.

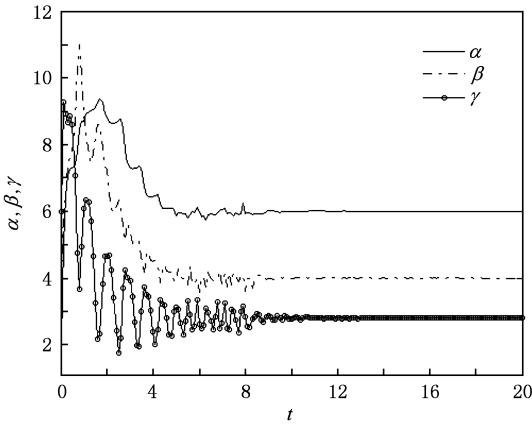


图 6 当 $\theta_j = 2 (j = \alpha, \beta, \gamma)$, 参数 $a = 6, b = 4$ 和 $c = 2.8$ 时, 估值 α, β 和 γ 的时间演化曲线

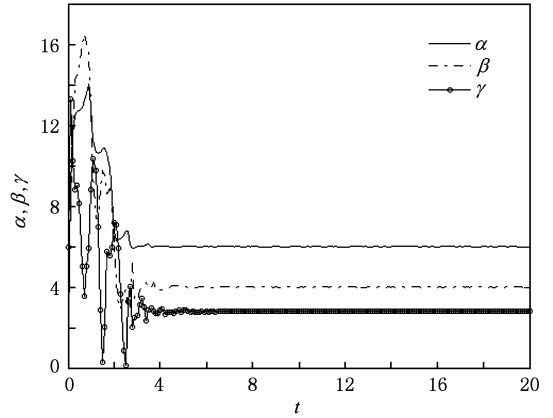


图 8 当 $\theta_j = 5 (j = \alpha, \beta, \gamma)$, 参数 $a = 6, b = 4$ 和 $c = 2.8$ 时, 估值 α, β 和 γ 的时间演化曲线

3. 结 论

本文以二次自治混沌系统为例, 研究了利用简单的标量控制器使从任意初始条件出发的二次自治混沌系统实现反同步. 基于 Lapunov 稳定性理论和 Lasalle 不变原理, 给出了标量自适应反馈控制器和参数自适应律. 对于具有不确定参数的二次自治

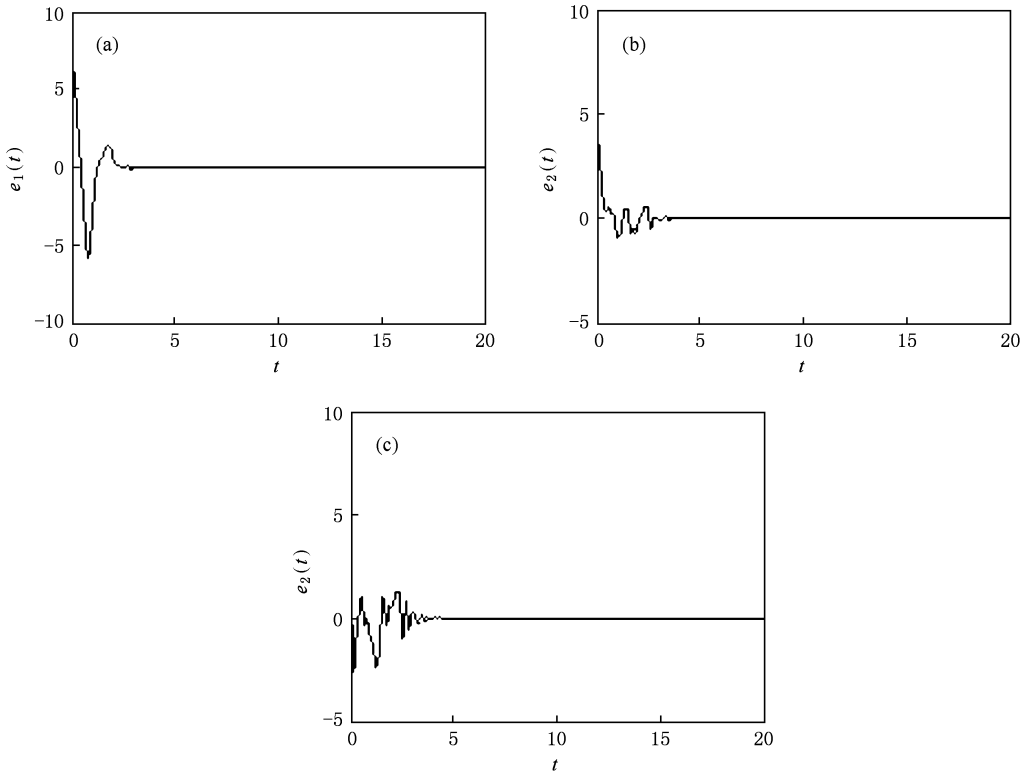


图 7 当 $\theta_j = 5 (j = \alpha, \beta, \gamma)$, 参数 a, b 和 c 为不确定参数时, 系统 (1) 和系统 (12) 的反同步误差曲线 (a) $e_1(t)$; (b) $e_2(t)$; (c) $e_3(t)$

混沌系统,能非常容易的利用标量自适应反馈控制器和参数自适应律,使其实现反同步,并准确估计

出不确定参数的值. 数值仿真证明了方法的可行性和有效性.

-
- [1] Pecora L M, Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [2] Chen G R, Dong X 1998 *From Chaos to Order: Methodologies, Perspectives, and Applications*, (Singapore: World Scientific Pub. Co.)
- [3] Li S, Xu W, Li R H, Li Y P 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5681 (in Chinese) [李 爽、徐 伟、李瑞红、李玉鹏 2006 物理学报 **55** 5681]
- [4] Li F, Hu A H, Xu Z Y 2006 *Chin. Phys.* **15** 507
- [5] Li R H, Xu W, Li S 2007 *Chin. Phys.* **16** 1591
- [6] Li X C, Xu W, Xiao Y Z 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1457 (in Chinese) [李秀春、徐 伟、肖玉柱 2008 物理学报 **57** 1457]
- [7] Liu W Q, Xiao J H, Qiao X L, Yang J Z 2006 *Phys. Rev. E* **73** 057203
- [8] Belykh V N, Chua L O 1992 *Int. J. Bifur. Chaos* **2** 697
- [9] Huygens C 1669 *Philos. R. Soc. London* **4** 937
- [10] Bennett M, Schatz M F, Rockwood H, Wiesenfeld K 2002 *Proc. R. Soc. A* **458** 563
- [11] Kim C M, Rim S H, Key W 2003 *Phys. Lett. A* **320** 39
- [12] Cao L Y, Lai Y C 1998 *Phys. Rev. E* **58** 382
- [13] Wang X Y, Wang M J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6843 (in Chinese) [王兴元、王明军 2007 物理学报 **56** 6843]
- [14] Liu F C, Zang X F, Song J Q 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3765 (in Chinese) [刘福才、臧秀凤、宋佳秋 2009 物理学报 **58** 3765]
- [15] Li R H, Xu W, Li S 2009 *Chaos, Solitons & Fractals* **40** 1288
- [16] Al-Sawalha M M, Noorani M S M 2008 *Chaos, Solitons & Fractals* **42** 170
- [17] Wang L 2009 *Chaos* **19** 013107

Estimation of unknown parameters and adaptive anti-synchronization of quadratic autonomous chaos systems via a scale controller *

Liu Di[†] Xu Wei Guo Pei-Rong Ni Fei

(Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

(Received 30 June 2009; revised manuscript received 7 January 2010)

Abstract

Based on Lyapunov stability theory, a simple adaptive scalar controller was designed to realize the anti-synchronization of 3-D quadratic autonomous systems with known or unknown parameters. Furthermore, all the unknown parameters can be estimated dynamically from the time series of the drive and response systems. Numerical simulations show the effectiveness and feasibility of the proposed method.

Keywords: anti-synchronization, 3-D quadratic autonomous chaos systems, scalar controller, Lyapunov function

PACC: 0545

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10872165).

[†] E-mail: liudi@mail.nwpu.edu.cn