

振幅耦合动态网络中相邻结点间的相同步^{*}

卢 静 张 荣[†] 徐振源

(江南大学理学院, 无锡 214122)

(2009 年 9 月 4 日收到; 2009 年 12 月 22 日收到修改稿)

研究用适当的量化指标来刻画动态网络的相同步, 为此定义了新的量化指标: 相邻结点的网络平均锁相值和网络平均相频差. 动态网络结点选择的是多旋转中心的 Lorenz 混沌振子, 对 Lorenz 系统进行柱面坐标变换, 用振幅耦合方法构造动态网络. 分别对星形网络和小世界网络进行了仿真计算, 结果表明随着耦合强度的增大, 网络中相邻结点的两个系统之间存在相同步现象, 而且相同步行为与定义的量化指标之间存在较准确的对应关系.

关键词: 动态网络, 相同步, 平均锁相值, 平均相频差

PACC: 0545

1. 引 言

近年来, 在混沌同步问题的研究中, 有越来越多的工作致力于用一种数量指标^[1]来反映同步的状态或强弱程度, 比如文献[2—6]中用到的非线性关联指数, 文献[7]中提出的回归图方法, 还有 Shabunin 等人基于计算不同振子的平均相干性提出的一种同步量化指标^[8,9]. 相同步是一种弱同步形式, 表现为振子间的相位差在某些时间段为一固定值, 而此时其振幅之间却不存在必然的联系. 相对于完全同步要求振子的振幅和相位都趋于一致, 相同步更易实现, 因而各种系统的相同步研究引起了广泛关注^[10—19]. 虽说与完全同步、广义同步等比起来, 相同步的研究结果相对较少, 但近年来还是有一些引人关注的研究成果^[20—23]. 同样用适当的数量化指标来描述相同步也是关注的问题之一. Meinecke 等人就用锁相值^[24]

$$\gamma = |\langle \exp[j\Delta\phi(t)] \rangle_i|$$

作为一种数量指标来度量两个系统信号间的相同步, 其中 j 是复数单位, $\Delta\phi(t) = \phi_2(t) - \phi_1(t)$ 是通常用来度量相同步的瞬时相位差. Li 和 Chen 用网络平均频率差^[25]

$$\Delta\Omega = \frac{1}{N-1} \sum_{j=2}^{N-1} |\langle \dot{\phi}_j(t) - \dot{\phi}_1(t) \rangle_i|$$

研究了混沌振子构成的小世界网络的相同步.

然而 Meinecke 定义的锁相值 γ 只适用于两个系统, 文献[25]研究了小世界网络的相同步, 但其网络的结点为单个旋转中心的 Rössler 系统, 本文研究用适当的量化指标来刻画具有一般结构的动态网络的相同步, 其中网络的结点为多旋转中心的 Lorenz 系统, 网络的结构不仅涉及小世界网络, 还包括规则网络如星形网络, 提出了新的量化指标: 相邻结点的网络平均锁相值和网络平均相频差, 并将其用于研究振幅耦合动态网络中相邻结点间的相同步, 数值仿真表明新提出的相同步量化指标与振幅耦合动态网络中相邻结点间的相同步现象存在较好的对应关系.

2. 动态网络模型描述

考虑如下动力系统:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= f(u), \\ u^T &= (x, y, z), \end{aligned} \quad (1)$$

对单个旋转中心的 Rössler 系统, 相位和振幅可以方便地定义为 $\phi(t) = \arctan(y/x)$, $A(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$. 但对具有多个旋转中心比如 Lorenz 系统, 相位定义比较困难, 至今没有一个普遍的定义, 为此采用文献[26]的方法作柱面坐标变换, 将系统(1)用柱面坐标 (A, ϕ, z) 表示为

$$\dot{s} = F(s),$$

* 国家自然科学基金(批准号:60875036), 江南大学创新团队发展计划资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: ronia62@yahoo.com

$$\begin{aligned} s^T &= (A, \phi, z), \\ F^T &= (F_1, F_2, F_3). \end{aligned} \quad (2)$$

本文研究的动态网络是以系统(2)为网络结点再耦合振幅形成的, 方程为

$$\begin{aligned} \dot{A}_i &= F_1(A_i, \phi_i, z_i, \alpha_i) + k \sum_{j=1}^N c_{ij} A_j, \\ \dot{\phi}_i &= F_2(A_i, \phi_i, z_i, \alpha_i), \\ \dot{z}_i &= F_3(A_i, \phi_i, z_i, \alpha_i), \\ i &= 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (3)$$

其中 (A_i, ϕ_i, z_i) 是网络中第 i 个结点的状态变量 (x_i, y_i, z_i) 的柱面坐标, $\alpha_i = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{id})$ 为系统参数, $k > 0$ 表示耦合强度, 网络中各结点之间关系由耗散耦合矩阵 $C = (c_{ij})_{N \times N}$ 给出, C 满足对所有的 i

$$\neq j, c_{ij} \geq 0, \text{ 且 } c_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N c_{ij}.$$

定义(相邻结点)网络平均锁相值

$$\begin{aligned} R_{ad} &= \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} | \langle \exp\{j[\phi_{i+1}(t) - \phi_i(t)]\} \rangle_i |, \end{aligned} \quad (4)$$

(相邻结点)网络平均相频差

$$\Delta\Omega_{ad} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} | \langle \dot{\phi}_{i+1}(t) - \dot{\phi}_i(t) \rangle_i |, \quad (5)$$

其中 j 为复数单位, $\phi_i(t)$ 和 $\phi_{i+1}(t)$ 分别是网络(3)中结点 i 和 $i+1$ 处的振子的相变量, $\langle \cdot \rangle_i$ 表示对时间的平均值. R_{ad} 的取值范围从 0 (结点 i 和 $i+1$ 之间没有相同步, 即相位差 $\phi_{i+1}(t) - \phi_i(t)$ 呈均匀分布) 到 1 (结点 i 和 $i+1$ 之间达到完美相同步, 即 $\phi_{i+1}(t) - \phi_i(t)$ 是常数); 当结点 i 和 $i+1$ 之间达到完美相同步时, $\Delta\Omega_{ad}$ 取值为 0.

3. 数值仿真例子

设网络(3)中的结点为 Lorenz 系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= \rho x - y - xz, \\ \dot{z} &= -bz + xy, \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $\sigma = 10, \rho = 39, b = 8/3$, 此时 Lorenz 系统呈现混沌态, 相应动态网络的状态方程为

$$\begin{aligned} \dot{A}_i &= \sigma_i A_i \sin\phi_i \cos\phi_i - \sigma_i A_i \cos^2\phi_i \\ &+ \rho_i A_i \sin\phi_i \cos\phi_i - A_i \sin^2\phi_i \\ &- A_i z_i \sin\phi_i \cos\phi_i + k \sum_{j=1}^N c_{ij} A_j, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_i &= \rho_i \cos^2\phi_i - \sin\phi_i \cos\phi_i - z_i \cos^2\phi_i \\ &- \sigma_i \sin^2\phi_i + \sigma_i \sin\phi_i \cos\phi_i, \\ \dot{z}_i &= -b_i z_i + A_i^2 \sin\phi_i \cos\phi_i, \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $\sigma_i = 10 + \xi_i, \rho_i = 39 + \eta_i, b_i = 8/3, \xi_i, \eta_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 为 $(0, 1)$ 间的随机数, 表示系统参数失匹配.

3.1. 星形网络模型

首先仿真计算的是星形网络, 即网络(7)中的耦合矩阵为

$$C = (c_{ij})_{N \times N} = \begin{pmatrix} -N+1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix},$$

其中 $N = 50$.

采用四阶龙格-库塔方法, 借助 MatLab 软件编程数值求解方程(7), 计算步长固定为 0.01. 图 1 给出了振幅耦合的星形网络(7)中的网络平均锁相值 R_{ad} 和网络平均相频差 $\Delta\Omega_{ad}$ 随着耦合强度 k 的变化情况. 从图 1 可以看到, 随着耦合强度的增大, 网络中相邻结点的两个系统之间出现相同步. 当耦合强度 $k > 3.3$ 时, 有 $\Delta\Omega_{ad} < 0.1$ 几乎为常数(此时 $R_{ad} > 0.6$), 耦合网络相邻结点之间达到相同步, 为此选取耦合强度 k 分别取值 1, 3, 3.3, 7.3 时, 给出了耦合网络(7)中相邻结点 31 与 30 之间的相位差 $\phi_{31}(t) - \phi_{30}(t)$ 随时间的变化情况, 见图 2, 相同步情况与图 1 给出的结果一致. 要说明的是, 仿真表明耦合网络(7)中任意两个相邻结点间有类似的结果, 这表明耦合网络(7)中相邻结点间的相同步与数量指标 $R_{ad}, \Delta\Omega_{ad}$ 之间存在较好的对应关系. 此时网络中任意两个不相邻的结点之间没有相同步现

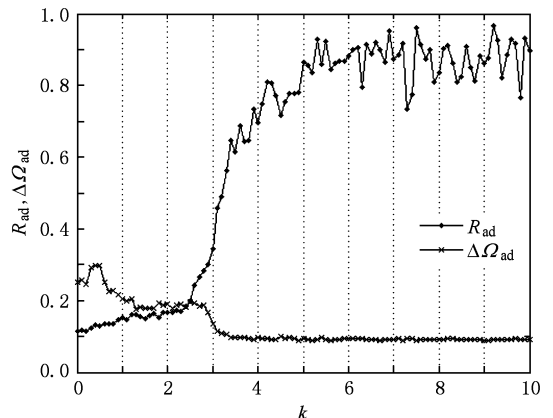


图 1 星形网络 $R_{ad}, \Delta\Omega_{ad}$ 随耦合强度 k 的变化曲线

象存在,图 3 给出了结点 1 与 31 之间的相位差 $\phi_{31}(t) - \phi_1(t)$ 随时间的变化情况.

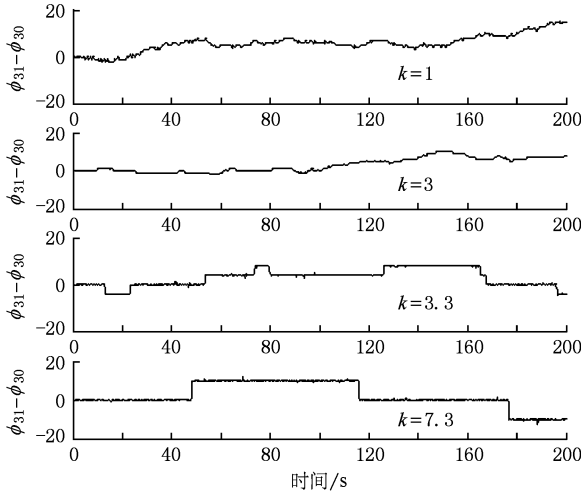


图 2 星形网络中 $\phi_{31}(t) - \phi_{30}(t)$ 随时间的变化情况 ($k=1, 3, 3.3, 7.3$)

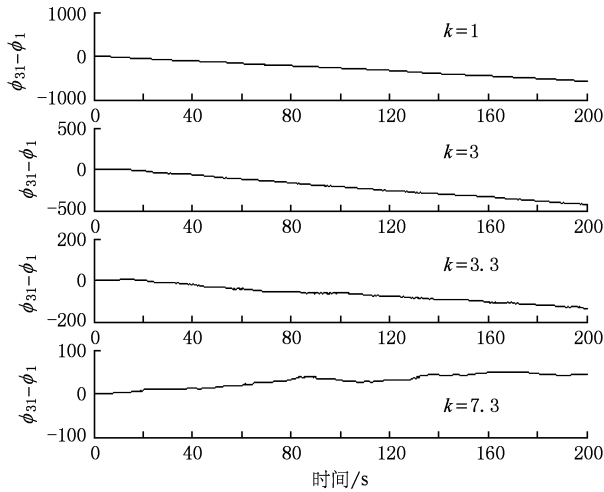


图 3 星形网络中 $\phi_{31}(t) - \phi_1(t)$ 随时间的变化情况 ($k=1, 3, 3.3, 7.3$)

3.2. 小世界网络模型

网络的状态方程如下:

$$\begin{aligned} \dot{A}_i &= \sigma_i A_i \sin\phi_i \cos\phi_i - \sigma_i A_i \cos^2\phi_i \\ &\quad + \rho_i A_i \sin\phi_i \cos\phi_i - A_i \sin^2\phi_i \\ &\quad - A_i z_i \sin\phi_i \cos\phi_i + k \sum_{j=1}^N c_{ij} (A_j - A_i), \\ \dot{\phi}_i &= \rho_i \cos^2\phi_i - \sin\phi_i \cos\phi_i - z_i \cos^2\phi_i \\ &\quad - \sigma_i \sin^2\phi_i + \sigma_i \sin\phi_i \cos\phi_i, \\ \dot{z}_i &= -b_i z_i + A_i^2 \sin\phi_i \cos\phi_i, \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $\sigma_i = 10 + \xi_i, \rho_i = 39 + \eta_i, b_i = 8/3 + \zeta_i, \xi_i, \eta_i, \zeta_i$ ($i=1, 2, \dots, N$) 为 $(0, 1)$ 间的随机数, 表示系统参数的失匹配. 小世界网络 (8) 是按文献 [17] 中的规则构造的, 即在最近邻耦合矩阵 $C = (c_{ij})_{N \times N}$ 中, 若 $c_{ij} = 0$, 则以概率 p 换成 $c_{ij} = 1$, 这里取 $p = 0.01$.

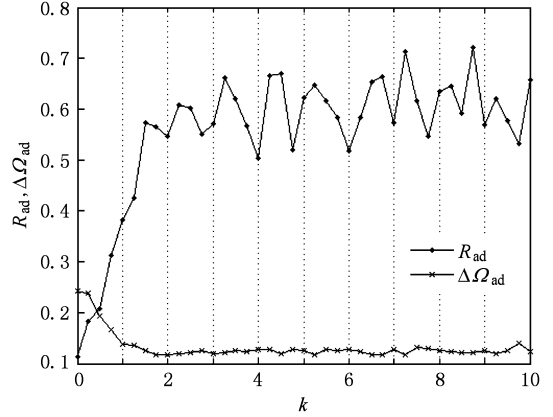


图 4 小世界网络中 $R_{ad}, \Delta\Omega_{ad}$ 随耦合强度 k 的变化

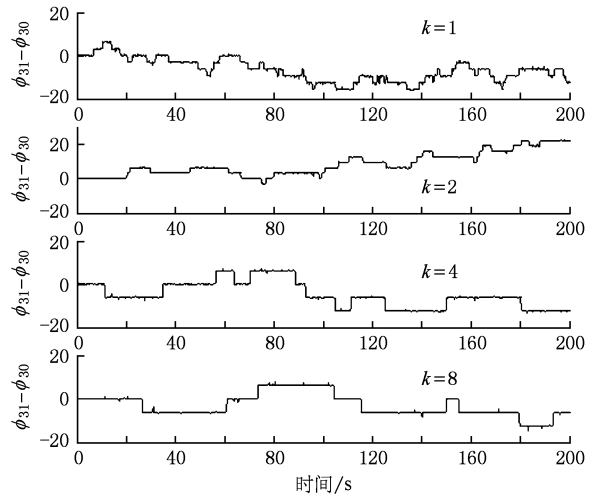


图 5 小世界网络中 $\phi_{31}(t) - \phi_{30}(t)$ 随时间的变化情况 ($k=1, 2, 4, 8$)

类似地, 借助 MatLab 软件, 用四阶龙格-库塔法求解方程 (8), 计算步长为 0.01, 仿真时取 $N = 50$. 图 4 给出的是振幅耦合的小世界网络 (8) 中的网络平均锁相值 R_{ad} 和网络平均相频差 $\Delta\Omega_{ad}$ 随着耦合强度 k 的变化情况, 从中可以看出, 当耦合强度 $k > 3.5$ 时, 有 $\Delta\Omega_{ad} \approx 0.1$ 近似为常数 (此时 $R_{ad} > 0.5$), 耦合网络相邻结点之间达到相同步. 在图 5 中给出了耦合强度 k 分别取值 1, 2, 4, 8 时, 耦合网络 (8) 中相邻结点 31 与 30 之间的相位差 $\phi_{31}(t) - \phi_{30}(t)$ 随

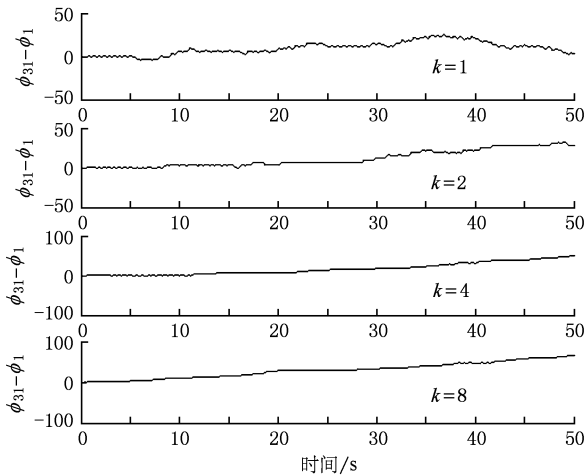


图 6 小世界网络中 $\phi_{31}(t) - \phi_1(t)$ 随时间的变化情况 ($k = 1, 2, 4, 8$)

时间的变化情况,仿真结果与图 4 给出的结果一致,同样小世界耦合网络中任意两个相邻结点间有类似的仿真结果,表明计算得到的 R_{ad} , $\Delta\Omega_{ad}$ 的数值结果和对应的耦合强度 k 的仿真结果之间存在较好的对应关系. 同样此时网络中不相邻的结点之间没有相同步现象存在,图 6 给出的是网络结点 1 与 31 之间的相位差 $\phi_{31}(t) - \phi_1(t)$ 随时间的变化情况.

4. 结 论

本文受到 Meinecke, Li 和 Chen 研究工作的启发, Meinecke 定义锁相值作为一种数量指标来度量系统间的相同步,然而 Meinecke 定义的锁相值 γ 只适用于两个系统; Li 和 Chen 研究了的小世界网络的相同步,但其网络的结点为单个旋转中心的 Rössler 系统. 为此,本文定义了相邻结点的网络平均锁相值 R_{ad} 和网络平均相频差 $\Delta\Omega_{ad}$, 研究了具有一般结构的动态网络的相同步,其中网络的结点为多旋转中心的 Lorenz 系统,网络的结构不仅涉及小世界网络,还包括规则网络如星形网络. 采用振幅耦合方法构造动态网络,研究发现这种网络中相邻结点的两个系统之间存在相同步现象,而且相同步行为与我们定义的量化指标 R_{ad} 和 $\Delta\Omega_{ad}$ 之间存在较准确的对应关系. 仿真计算还发现无论对星形网络还是小世界网络,网络中任意两个不相邻的结点之间没有相同步现象存在,正是基于此,我们改变了文献[25]中关于网络平均频率差的定义,定义相邻结点的网络平均频率差,描述了这种网络相邻结点间的相同步现象.

[1] Shabunin A, Astakhov V, Kurths J 2005 *Phys. Rev. E* **72** 016218
 [2] Quiroga R Q, Kraskov A, Kreuz T, Grassberger P 2002 *Phys. Rev. E* **65** 041903
 [3] Schiff S J, So P, Chang T 1996 *Phys. Rev. E* **54** 708
 [4] Arnold J, Grassberger P, Lehnertz K, Elger C E 1999 *Physica D* **134** 419
 [5] Schmitz A 2000 *Phys. Rev. E* **62** 7508
 [6] Kramer M A, Edwards E, Soltani M, Berger M, Knight R, Szeri A J 2004 *Phys. Rev. E* **70** 011914
 [7] Romano M C, Thiel M, Kurths J, Bloh V W 2004 *Phys. Lett. A* **330** 214
 [8] Anishchenko V S, Astakhov A A, Nikolaev V V, Shabunin A V 2000 *J. Commun. Technol. & Electron.* **45** 179
 [9] Shabunin A, Astakhov V, Anishchenko V S 2002 *Int. J. Bifurc. Chaos* **12** 1895
 [10] Schäfer C, Rosenblum M G, Kurths J, Abel H H 1998 *Nature (London)* **392** 239
 [11] Schäfer C, Rosenblum M G, Abel H H, Kurths J 1999 *Phys. Rev. E* **60** 857
 [12] Tass P, Rosenblum M G, Weule J, Kurths J, Pikovsky A, Volkman J, Schnitzler A, Freund A 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 3291

[13] Lian J, Shuai J, Durand D 2004 *J. Neural. Eng.* **1** 46
 [14] Stefanovska A, Haken H, McClintock P V E, Hozic M, Bajrovic F, Ribaric S 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 4831
 [15] McClintock P V E, Stefanovska A 2002 *Physica A* **314** 69
 [16] Meng J, Wang X Y 2007 *Acta. Phys. Sin.* **56** 5142 (in Chinese) [孟娟, 王兴元 2007 物理学报 **56** 5142]
 [17] Hao J H, Li W 2005 *Acta. Phys. Sin.* **54** 3491 (in Chinese) [郝建红, 李伟 2005 物理学报 **54** 3491]
 [18] Hu G, Hu B B, Zheng, Z G, Zhou C S 2000 *Acta. Phys. Sin.* **49** 2320 (in Chinese) [胡岗, 胡斑斑, 郑志刚, 周昌松 2000 物理学报 **49** 2320]
 [19] Hao J H, Li W 2005 *Acta. Phys. Sin.* **54** 3491 (in Chinese) [郝建红, 李伟 2005 物理学报 **54** 3491]
 [20] Han F, Lu Q S, Wiercigroch M, Ji Q B 2009 *Chin. Phys. B* **18** 482
 [21] Luo X S, Qin Y H, Wei D Q, 2009 *Chin. Phys. B* **18** 2184
 [22] Liu Y 2009 *Acta. Phys. Sin.* **58** 749 (in Chinese) [刘勇 2009 物理学报 **58** 749]
 [23] Xu W, Tang X L 2008 *Chin. Phys. B* **17** 2004
 [24] Meinecke F C, Ziehe A, Kurths J, Müller K R 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 084102

[25] Li C G, Chen G R 2004 *Physica A* **341** 73

Chinese) [莫晓华、唐国宁 2004 物理学报 **53** 2080]

[26] Mo X H, Tang G N 2004 *Acta. Phys. Sin.* **53** 2080 (in

Phase synchronization between two adjacent nodes in amplitude coupled dynamical networks *

Lu Jing Zhang Rong[†] Xu Zhen-Yuan

(*School of Scienc, Jiangnan University, Wuxi 214122, China*)

(Received 4 September 2009; revised manuscript received 22 December 2009)

Abstract

The present paper aims to investigate the phase synchronization in chaotic oscillator networks by using quantitative indexes. We define two new quantitative indexes, namely the mean phase locking value and mean frequency difference of two adjacent nodes of the network. Lorenz chaotic oscillators with several rotational centers are chosen as networks nodes. We convert the original Lorenz system into the dynamics of amplitude and phase. The chaotic oscillator networks are formed via amplitude coupling. We find that for star-coupled network and small-world network the adjacent oscillation phases are locked. Moreover, phase synchronization definitely comes along with the transition of the mean phase locking value and mean frequency difference by increasing the coupling strength.

Keywords: dynamical network, phase synchronization, mean phase locking value, mean frequency difference

PACC: 0545

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60875036), the Program for Innovative Research Team of Jiangnan University.

[†] Corresponding author. E-mail: ronia62@yahoo.com