

不确定混沌系统的反同步与参数辨识

李 农¹⁾ 李建芬^{2)†} 刘宇平¹⁾

1)(空军工程大学工程学院,西安 710038)

2)(空军工程大学理学院,西安 710051)

(2009 年 9 月 15 日收到;2009 年 12 月 22 日收到修改稿)

针对一类混沌系统,提出了一种系统的混沌反同步设计方案,基于该方案,设计一种自适应控制方法,实现了参数不确定系统的混沌反同步和未知参数的辨识.数值模拟结果表明了提出方法的有效性.

关键词: 反同步, 不确定混沌系统, 参数辨识

PACC: 0545

1. 引 言

针对混沌系统的同步研究,已经提出的主要方法有完全同步^[1]、广义同步^[2-6]、相位同步^[7,8]、延迟同步^[9]和投影同步^[10]等.具有不同初始值的两个混沌系统,当其轨道变化随时间增长趋于一致时为混沌系统的完全同步;混沌系统的广义同步是在两个混沌系统的轨道之间构造一个适当的函数关系;如果两个混沌系统的振幅互不相关,但其轨道的相位差锁定在 2π 以内,为混沌系统的相位同步;两个混沌系统的轨道,在具有固定时间延迟时保持一致,构成混沌系统的延迟同步;当两个混沌系统的轨道振幅构成比例关系,且相位相同时,是混沌系统的投影同步.最近,人们研究了混沌系统的反同步^[11-17],即两个混沌系统同步时,其状态变量的绝对值相同但符号相反.

文献[12]基于 Lyapunov 稳定性理论,通过线性反馈和自适应反馈方法实现了一类混沌系统的反同步;文献[13,14]基于适当的系统分解方法结合 Lyapunov 稳定性理论和矩阵测量理论研究了混沌系统的反同步;文献[15]基于主动控制法,研究了两个不同的混沌系统的反同步;王兴元等人^[16,17]分别利用状态观测器、主动控制和全局控制以及变量替换等方法实现了混沌系统的反同步.然而,上述混沌系统的反同步控制方法,对于未知参数的不确定混沌系统无效.因此,研究未知参数的不确定混

沌系统的反同步问题更具有实际意义.本文首先基于单变量单向耦合控制方法,通过构造一个合适的响应系统,提出一种混沌反同步方法,然后基于 Lyapunov 稳定性理论,设计了参数自适应控制律,实现了参数不确定混沌系统的反同步和未知参数的辨识.最后给出了数值模拟的仿真实例.

2. 反同步方案设计

考虑混沌系统由以下状态方程描述:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (1)$$

式中 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ 为系统的状态向量.本文构造的响应系统为

$$\dot{\mathbf{y}} = -\mathbf{f}(-\mathbf{y}) - \mathbf{K}(\mathbf{x} + \mathbf{y}), \quad (2)$$

这里,矩阵 $\mathbf{K} = k\mathbf{I}_n$ 为反馈增益矩阵, $k > 0$ 用于控制反同步速度, \mathbf{I}_n 单位矩阵.任取初始值,若 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = 0$ 成立,则系统(1)和系统(2)可达到反同步.

定义系统(1)与系统(2)的反同步状态误差为 $\mathbf{e} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$,则由(1)式和(2)式可知,误差系统为

$$\dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(-\mathbf{y}) - \mathbf{Ke}. \quad (3)$$

选择 Lyapunov 函数

$$V(t) = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{e},$$

对上式求导,可得

$$\dot{V}(t) = \mathbf{e}^T \dot{\mathbf{e}} = \mathbf{e}^T (\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(-\mathbf{y})) - \mathbf{e}^T \mathbf{Ke}. \quad (4)$$

根据范数不等式,有

† 通讯联系人. E-mail: ln2807@163.com

$$\begin{aligned} & \mathbf{e}^T(\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(-\mathbf{y})) \\ &= \sum_{i=1}^n e_i(f_i(\mathbf{x}) - f_i(-\mathbf{y})) \\ &\leq \|\mathbf{e}\| \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(-\mathbf{y})\|, \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq \|\mathbf{e}\| \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(-\mathbf{y})\| - \mathbf{e}^T \mathbf{k} \mathbf{I}_n \mathbf{e} \\ &= \|\mathbf{e}\| \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(-\mathbf{y})\| - k \mathbf{e}^T \mathbf{e} \\ &= \|\mathbf{e}\| \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(-\mathbf{y})\| - k \|\mathbf{e}\|^2 \\ &= (\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(-\mathbf{y})\| - k \|\mathbf{e}\|) \|\mathbf{e}\|. \end{aligned}$$

对混沌系统, 函数 $f(\cdot)$ 满足 Lipchitz 条件, 则存在一个正数 L , 使 $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(-\mathbf{y})\| \leq L \|\mathbf{e}\|$ 成立. 因此, 有

$$\dot{V}(t) \leq (L - k) \|\mathbf{e}\|^2.$$

当 $\|\mathbf{e}\| = 0$, 有 $\dot{V}(t) = 0$; 若选择合适的 k , 使 $k > L$, 则有 $\dot{V}(t) < 0$, 根据 Lyapunov 稳定性理论, 误差系统(3)在原点渐近稳定, 从而驱动系统(1)和响应系统(2)的状态变量达到渐近反同步.

3. 参数不确定混沌系统的反同步

在上述反同步方案设计的基础上, 考虑如下形式的驱动系统和具有不确定参数的响应系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= F_i(\mathbf{x}, \alpha_i) = f_i(\mathbf{x}) \\ &+ \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij} g_{ij}(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= -F_i(-\mathbf{y}, \alpha'_i) = -f_i(-\mathbf{y}) \\ &- \sum_{j=1}^{m_i} \alpha'_{ij} g_{ij}(-\mathbf{y}) - k(x_i - y_i), \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $i = 1, 2, \dots, n$, α_{ij} 为驱动系统的定常参数, α'_{ij} 是在驱动系统(5)与响应系统(6)反同步过程中需要辨识的未知参数, m_i 为第 i 个方程所含的参数个数, $f_i(\cdot)$, $g_{ij}(\cdot)$ 是光滑函数.

令驱动系统(5)式和响应系统(6)式之间的反相误差变量为 $\mathbf{e} = \mathbf{x} + \mathbf{y} = (e_1, e_2, \dots, e_n)^T$, 参数误差为 $\varepsilon_{ij} = \alpha_{ij} - \alpha'_{ij}$, 故由(5)式和(6)式, 可得到误差系统如下:

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= f_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij} g_{ij}(\mathbf{x}) \\ &- f_i(-\mathbf{y}) - \sum_{j=1}^{m_i} \alpha'_{ij} g_{ij}(-\mathbf{y}) - k(x_i - y_i) \\ &= f_i(\mathbf{x}) - f_i(-\mathbf{y}) + \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij} g_{ij}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij} g_{ij}(-\mathbf{y}) + \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij} g_{ij}(-\mathbf{y}) \\ & - \sum_{j=1}^{m_i} \alpha'_{ij} g_{ij}(-\mathbf{y}) - k e_i \\ &= F_i(\mathbf{x}, \alpha_i) - F_i(-\mathbf{y}, \alpha_i) - k e_i \\ &+ \sum_{j=1}^{m_i} \varepsilon_{ij} g_{ij}(-\mathbf{y}). \end{aligned}$$

针对响应系统的不确定参数, 设计参数的更新规则, 使驱动系统(5)和具有未知参数 α'_{ij} 的响应系统(6)渐进地达到反同步, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}\| = 0$.

选择 Lyapunov 函数

$$V(t) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} e_i^2 + \frac{1}{2\mu} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{m_i} \varepsilon_{ij}^2 \right) \geq 0,$$

μ 为自适应增益常数, 对上式求导, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \sum_{i=1}^n e_i \dot{e}_i + \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{m_i} \varepsilon_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left[e_i \left[F_i(\mathbf{x}, \alpha_i) - F_i(-\mathbf{y}, \alpha_i) - k e_i \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{j=1}^{m_i} \varepsilon_{ij} g_{ij}(-\mathbf{y}) \right] \right] + \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{m_i} (\varepsilon_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}) \right). \end{aligned}$$

当

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \left(e_i \cdot \sum_{j=1}^{m_i} \varepsilon_{ij} g_{ij}(-\mathbf{y}) \right) \\ &+ \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{m_i} (\varepsilon_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}) \right) = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

有

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \sum_{i=1}^n e_i [F_i(\mathbf{x}, \alpha_i) - F_i(-\mathbf{y}, \alpha_i) - k e_i] \\ &= \mathbf{e}^T [\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(-\mathbf{y})] - \mathbf{e}^T \mathbf{K} \mathbf{e}. \end{aligned} \quad (8)$$

(8)式与(4)式具有相同的形式, 由第2节的结论, 可知当(7)式成立时, 驱动系统(5)和响应系统(6)达到渐近反同步.

又由(7)式, 得

$$e_1 g_{1j}(-\mathbf{y}) + \frac{1}{\mu} \dot{\varepsilon}_{1j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m_1,$$

$$e_2 g_{2j}(-\mathbf{y}) + \frac{1}{\mu} \dot{\varepsilon}_{2j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m_2,$$

...

$$e_n g_{nj}(-\mathbf{y}) + \frac{1}{\mu} \dot{\varepsilon}_{nj} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m_n.$$

由于 $\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\alpha}_{ij} - \dot{\alpha}'_{ij} = -\dot{\alpha}'_{ij}$, 可得响应系统未知参数的更新规则为

$$\dot{\alpha}'_{ij} = \mu e_i g_{ij}(-y),$$

$$(i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m_i). \quad (9)$$

4. 数值模拟

下面分别以复数的洛伦兹-哈肯系统(CLHE)^[18]四维混沌系统和参数不确定的 Chua's 电路为例说明上述方法.

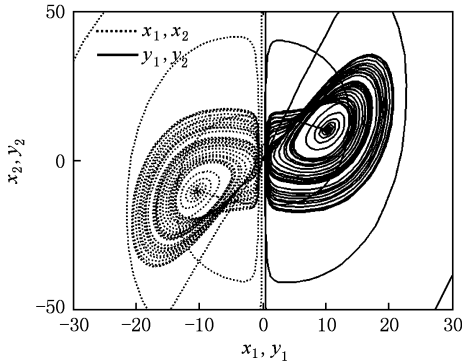
4.1. CLHE 四维混沌系统的反同步

CLHE 混沌系统的状态方程如下:

$$\dot{x}_1 = -\sigma(x_1 - x_2),$$

$$\dot{x}_2 = r_1 x_1 - x_2 - ex_3 + \sigma x_3^2/x_1 - x_1 x_4,$$

$$\dot{x}_3 = r_2 x_1 + ex_2 - x_3 - \sigma x_2 x_3/x_1,$$



$$\dot{x}_4 = -bx_4 + x_1 x_2. \quad (10)$$

当系统参数选取 $\sigma = 6, r_1 = 91.0, e = 2.5, r_2 = -1.5, b = 1.2$ 时, Lyapunov 指数分别为 $\lambda_1 = 0.029, \lambda_2 = 0.002, \lambda_3 = -0.0071, \lambda_4 = -0.032$. 此时, CLHE 系统处于超混沌状态. 将(10)式作为混沌反同步的驱动系统, 响应系统构造为

$$\dot{y}_1 = -[-\sigma(-y_1 + y_2)] - k(x_1 + y_1),$$

$$\dot{y}_2 = -(-r_1 y_1 + y_2 + ey_3 - \sigma y_3^2/y_1 - y_1 y_4),$$

$$\dot{y}_3 = -(-r_2 y_1 - ey_2 + y_3 + \sigma y_2 y_3/y_1),$$

$$\dot{y}_4 = -(by_4 + y_1 y_2), \quad (11)$$

式中, 仅选取一个耦合项 $k(x_1 - y_1)$, 即可使系统达到反同步. 取 $k = 20$, 同步模拟结果见图 1. 可见, 系统(10)和(11)的相空间中轨迹在二维平面的投影是反对称的, 这说明此时两者已达到了反同步.

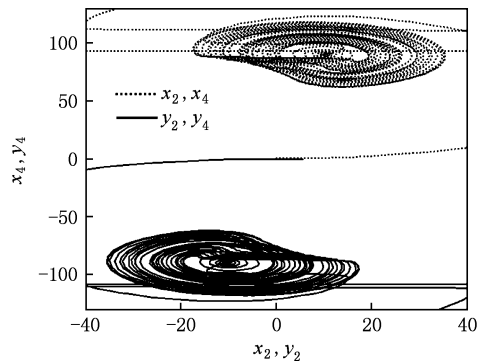


图1 系统(10)和(11)的相轨迹在二维平面的投影

4.2. 参数不确定的 Chua's 电路的反同步

蔡氏电路的归一化状态方程为

$$\dot{x}_1 = \alpha[(x_2 - x_1) - f(x_1)],$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_3,$$

$$\dot{x}_3 = -\beta x_2 - \gamma x_3, \quad (12)$$

这里, $f(x_1) = bx + 0.5(a - b)[|x_1 + 1| - |x_1 - 1|]$, 其中 a, b 为分段线性电阻的归一化斜率. 为使系统处于混沌状态, 可选参数 $\alpha = 10, \beta = 14.31, \gamma = 0.12, a = -0.75, b = -1.39$.

将混沌系统(12)作为驱动系统, 响应系统构造为

$$\dot{y}_1 = -\alpha'[-y_2 + y_1 - f(-y_1)] - k(x_1 + y_1),$$

$$\dot{y}_2 = -(-y_1 + y_2 - y_3),$$

$$\dot{y}_3 = -(\beta' y_2 + \gamma' y_3), \quad (13)$$

式中 α', β' 和 γ' 是在驱动系统(12)与响应系统(13)反同步过程中需要辨识的未知参数. 则据(9)式, 未知参数的更新规则为

$$\dot{\alpha}' = \mu[(-y_2 + y_1) - f(-y_1)](x_1 + y_1),$$

$$\dot{\beta}' = \mu y_2(x_3 + y_3),$$

$$\dot{\gamma}' = \mu y_3(x_3 + y_3).$$

选择系数 $k = 30, \mu = 60$. 驱动与响应系统状态变量的初始值分别选取为 $\mathbf{x}(0) = [-0.05 \ 0 \ 0]$, $\mathbf{y}(0) = [0 \ 0.1 \ 0]$, 选取响应系统(13)的初始参数 $[\alpha'(0) \ \beta'(0) \ \gamma'(0)] = [0.1 \ 0.1 \ 0.1]$, 模拟结果如图 2 和图 3 所示, 由图可见, 随着 t 的增加, 驱动系统(12)与响应系统(13)的反同步误差渐近趋于零, 同时, 未知 α', β', γ' 的值渐近地稳定在 10, 14.31 和 0.12. 可见, 利用(9)式给出的参数更新规则, 能够在实现混沌系统反同步的同时辨识出响应系统的未知参数.

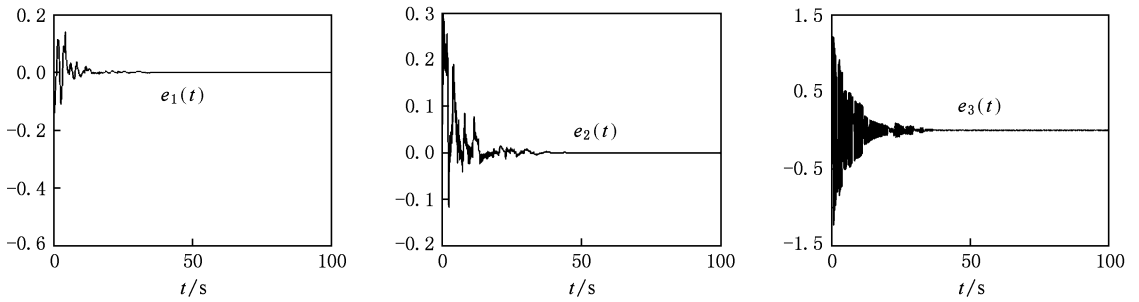
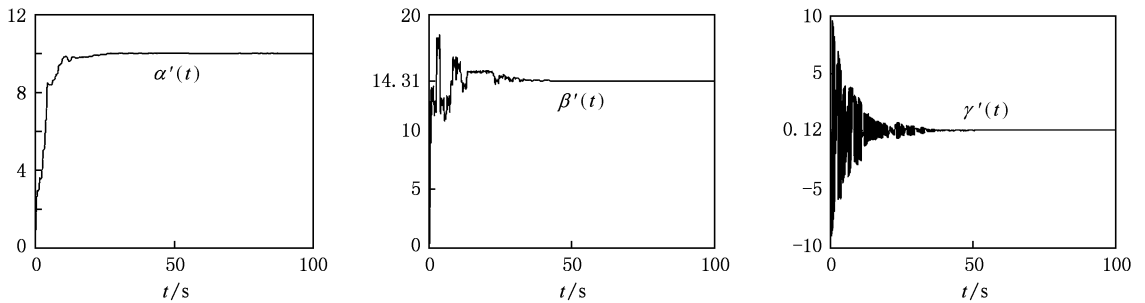


图2 系统(12)和(13)的反同步误差曲线

图3 响应系统(13)的参数 α' 、 β' 和 γ' 的辨识过程

5. 结 论

针对一类混沌系统,通过设计一个合适的响应系统,提出一种混沌反同步方法,比起已有的方法,本文的设计方法简单,具有一定的规律性,适用于

可通过单向耦合同步的混沌系统.在上述方法的基础上,研究了参数不确定混沌系统的反同步与参数辨识问题,利用线性系统理论和 Lyapunov 稳定性理论对反同步方法进行了相应的证明,并给出了参数更新规则.两个实例的数值仿真结果进一步表明了提出方法的有效性.

-
- [1] Pecora L M, Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [2] Kocarev L, Parlitz U 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 1816
- [3] Yang S S, Duan K 1998 *Chaos, Solitons & Fractals* **10** 1703
- [4] Li G H 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 999 (in Chinese) [李国辉 2004 物理学报 **53** 999]
- [5] Wang X Y, Meng J 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 726 (in Chinese) [王兴元、孟 娟 2008 物理学报 **57** 726]
- [6] Li J F, Li N, Liu Y P, Gan Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 779 (in Chinese) [李建芬、李 农、刘宇平、甘 轶 2009 物理学报 **58** 779]
- [7] Rosenblum M G, Pikovsky A S 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 1804
- [8] Hao J H, Li W 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3491 (in Chinese) [郝建红、李 伟 2005 物理学报 **54** 3491]
- [9] Taherionl S, Lai Y C 1999 *Phys. Rev. E* **59** 6247
- [10] Wang X Y, Wang Y 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 2498 (in Chinese) [王兴元、王 勇 2007 物理学报 **56** 2498]
- [11] Liu J B, Ye C F 2000 *Phys. Lett. A* **274** 27
- [12] Li C D, Liao X F 2006 *International Journal of Bifurcation and Chaos* **16** 1041
- [13] Zhang Y P, Sun J T 2004 *Phys. Lett. A* **330** 442
- [14] Song Q K, Cao J D 2007 *Chaos, Solitons and Fractals* **33** 929
- [15] Li G H, Zhou S P 2007 *Chaos, Solitons and Fractals* **32** 516
- [16] Wang X Y, Wu X J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1988 (in Chinese) [王兴元、武相军 2007 物理学报 **56** 1988]
- [17] Wang X Y, Wang M J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6843 (in Chinese) [王兴元、王明军 2007 物理学报 **56** 6843]
- [18] Fang J Q 1995 *Chinese Science Bulletin* **40** 988

Anti-synchronization of uncertain chaotic system and parameters identification

Li Nong¹⁾ Li Jian-Fen^{2)†} Liu Yu Ping¹⁾

1) (*The Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an 710038, China*)

2) (*The Science Institute, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China*)

(Received 15 September 2009; revised manuscript received 22 December 2009)

Abstract

We present a systematic design procedure to anti-synchronize a class of chaotic systems. An adaptive control method for anti-synchronization of uncertain chaotic system is proposed based on the scheme, by which the uncertain parameters of response system are identified. Numerical simulations show the effectiveness of the developed approach.

Keywords: anti-synchronization, uncertain chaotic system, parameters identification

PACC: 0545

† Corresponding author. E-mail: ln2807@163.com