

最近邻耦合网络的时空混沌同步研究*

吕翎[†] 李钢 商锦玉 沈娜 张新柳 爽 朱佳博

(辽宁师范大学物理与电子技术学院, 大连 116029)

(2009 年 12 月 24 日收到; 2010 年 1 月 11 日收到修改稿)

本文进行了最近邻网络的时空混沌同步研究. 以时空混沌系统作为网络的节点, 基于 Lyapunov 稳定性定理, 通过确定网络的最大 Lyapunov 指数, 得到了实现网络完全同步的条件. 采用 Fisher-Kolmogorov 时空混沌系统作为网络节点实例进行了仿真模拟, 获得了理想的同步效果. 进一步研究了有界噪声影响下网络的同步性能, 结果显示它具有较强的抗干扰能力.

关键词: 同步, 最近邻网络, 时空混沌, Lyapunov 指数

PACC: 0545

1. 引言

自然界中存在着大量的实际网络. 自 Watts 等^[1]和 Barabási 等^[2]相继报道了小世界和无标度这两个实际网络的共同拓扑统计性质, 并建立了相应的模型以阐述这些特性的机理以来, 复杂网络的相关研究激起了国内外众多学者极大的研究兴趣, 使得在复杂网络的建模、网络的特性以及网络动力学研究方面涌现出大量的有价值的成果^[3-12]. 迄今, 网络的建模除了小世界和无标度模型以外, 人们还根据不同领域的大量实际网络建立了完全网络、最近邻网络以及星形网络等规则网络和局域网络. 在复杂网络结构特性研究方面主要集中在节点的度分布、平均路径长度以及聚类系数的研究, 以了解整个网络的统计性质并预测网络的特定行为. 而复杂网络动力学研究则主要集中在传染过程、网络相变以及网络混沌控制与同步等方面, 其中复杂网络的混沌同步研究因其自然界的各种实际网络存在着大量的同步行为而成为网络动力学研究一个热点^[13-19]. 但在以往报道中, 涉及的复杂网络的节点基本都是单个的时间混沌系统, 而对于自然界存在的大量实际系统均应该用时空混沌系统来描述, 它不仅随时间演化而且随空间演化均表现为混沌行为. 这样的网络节点虽然较时间混沌系统繁

杂和难以处理, 但更贴近实际系统从而更具有实用价值. 另外, 无论是实际系统还是人工系统, 总会不可避免地受到若干不确定因素的干扰, 这些干扰可归为某一类或若干类噪声. 因此研究噪声干扰下的网络同步性能的稳定性就显得十分重要和必要. 本文进行了最近邻网络的时空混沌同步研究. 以时空混沌系统作为网络的节点, 基于 Lyapunov 稳定性定理, 通过确定网络的最大 Lyapunov 指数, 得到了实现网络完全同步的条件. 采用 Fisher-Kolmogorov 时空混沌系统作为网络节点实例进行了仿真模拟, 获得了理想的同步效果. 进一步研究了有界噪声影响下网络的同步性能, 结果显示它具有较强的抗干扰能力.

2. 网络同步原理

考虑由 N 个相同的动力系统作为节点构成的复杂网络

$$\frac{\partial \mathbf{x}_i(r, t)}{\partial t} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_i(r, t)) + \sigma \sum_{j=1}^N a_{ij} \mathbf{H}(\mathbf{x}_j(r, t))$$
$$(i = 1, 2, \dots, N), \quad (1)$$

其中作为节点的动力系统 $\mathbf{F}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是采用时空混沌系统, $\mathbf{x}_i(r, t) = (x_{i1}(r, t), x_{i2}(r, t), \dots, x_{in}(r, t)) \in \mathbf{R}^n$ 为第 i 个节点处时空混沌系统的状态变量, r, t 为系统的空间和时间变量. $\mathbf{H}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 为连接网络

* 辽宁省自然科学基金 (批准号: 20082147) 和辽宁省教育厅创新团队计划 (批准号: 2008T108) 资助的课题.

[†] E-mail: luling1960@yahoo.com.cn

各节点的耦合函数, σ 为网络的耦合强度. a_{ij} 是耦合矩阵 A 的矩阵元, 表示网络的拓扑结构. 本文采用典型的最近邻网络, 耦合矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

若在复杂网络状态方程(1)中, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 存在 $x_1(r, t) = x_2(r, t) = \cdots = x_N(r, t) = x_s(r, t)$, 整个网络将达到完全同步. 为了得到同步条件, 我们在同步状态 $x_s(r, t)$ 附近对网络状态方程(1)进行线性化, 可以得到下列变分方程:

$$\frac{\partial \delta x_i(r, t)}{\partial t} = DF(x_s(r, t)) \delta x_i(r, t) + \sigma \sum_{j=1}^N a_{ij} DH(x_s(r, t)) \delta x_j(r, t), \quad (3)$$

这里 $\delta x_i(r, t)$ 是第 i 个节点在同步状态 $x_s(r, t)$ 附近的变分, $DF(x_s)$ 和 $DH(x_s)$ 分别是函数 F 和 H 的 Jacobi 矩阵. 令 $\delta x(r, t) = [\delta x_1(r, t), \delta x_2(r, t), \cdots, \delta x_N(r, t)]$, 则(3)式可以写成矩阵方程

$$\frac{\partial \delta x(r, t)}{\partial t} = DF(x_s(r, t)) \delta x(r, t) + \sigma DH(x_s(r, t)) \delta x(r, t) A^T. \quad (4)$$

将耦合矩阵 A 转换成 Jordan 标准型 \bar{A} . 设 ψ 为可逆矩阵, 作变换 $\bar{A} = \psi^{-1} A \psi$, 并令 $\xi(r, t) = \delta x(r, t) (\psi^{-1})^T$, 当矩阵 A 的本征值为 λ 时, (4)式可以写成

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi(r, t)}{\partial t} &= DF(x_s(r, t)) \xi(r, t) \\ &+ \sigma DH(x_s(r, t)) \delta x(r, t) A^T (\psi^{-1})^T \\ &= [DF(x_s(r, t)) \\ &+ \sigma \lambda DH(x_s(r, t))] \xi(r, t). \end{aligned} \quad (5)$$

经过上述变换后, 使得所处理的问题得到了简化. 根据 Jordan 标准型理论, 此时, 只需要利用(5)式计算网络各节点时空混沌系统的最大 Lyapunov 指数即可决定整个网络同步的稳定性. 在网络规模有限的情况下, 只要这些最大 Lyapunov 指数全部为负值, 整个复杂网络就能够达到完全同步.

3. 仿真模拟分析

采用 Fisher-Kolmogorov 系统作为仿真实例检验上述原理的有效性. Fisher-Kolmogorov 系统的状态

方程为^[20]

$$\frac{\partial x(r, t)}{\partial t} = kx(r, t) \left(1 - \frac{x(r, t)}{a} \right) + D \nabla^2 x(r, t), \quad (6)$$

其中 k 和 a 为系统的参量, D 为扩散系数.

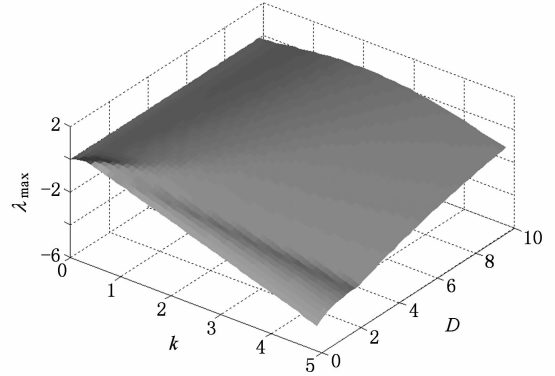


图1 最大 Lyapunov 指数随参量 k 和扩散系数 D 的演化

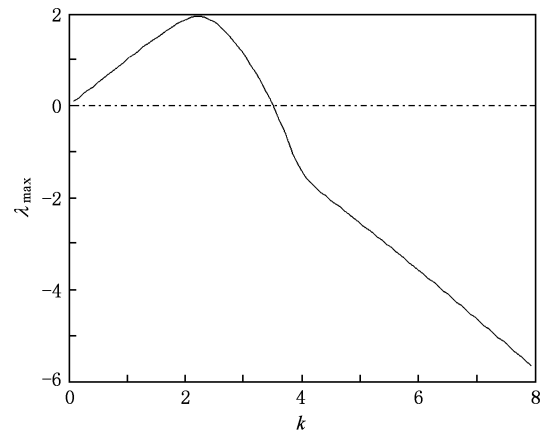


图2 最大 Lyapunov 指数随参量 k 的演化

这个反应扩散系统随着系统参量数值的演化能够呈现极其丰富的时空动力学行为, 这里采用求解系统的 Lyapunov 指数来区分系统的各种复杂行为. 根据 Lyapunov 指数的定义, 取参量 $a = 1$, 作出系统的最大 Lyapunov 指数随参量 k 和扩散系数 D 的演化关系如图 1 所示. 图 1 显示 Fisher-Kolmogorov 系统的最大 Lyapunov 指数存在大于零的区域, 表明参量在该区域时系统处于时空混沌态. 我们进一步固定扩散系数 $D = 5$, 作出系统的最大 Lyapunov 指数随单一参量 k 的演化关系如图 2 所示. 可以看出系统处于时空混沌态时参量 k 的演化范围约为 $(0, 3.5)$. 参量 k 的取值为 0.5 时系统状态变量的时空演化和返回映像如图 3 和图 4 所示.

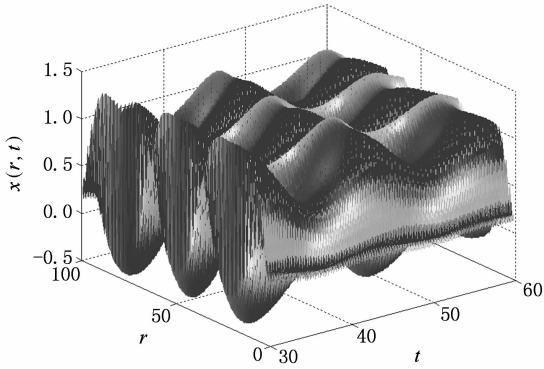


图3 状态变量 $x(r, t)$ 的时空演化

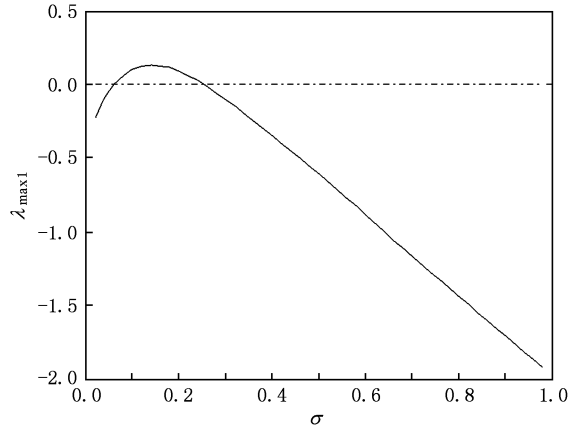


图5 节点1最大 Lyapunov 指数随耦合强度的演化

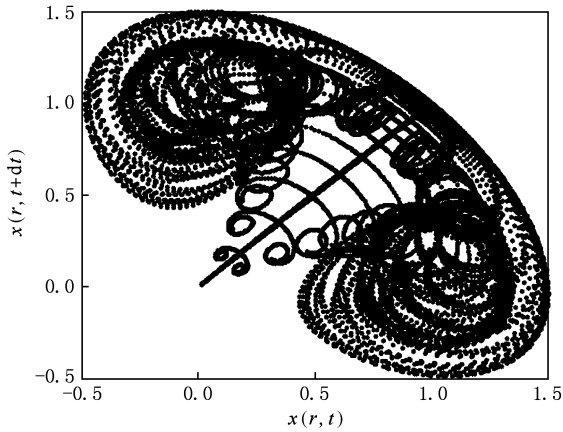


图4 状态变量 $x(r, t)$ 的返回映射

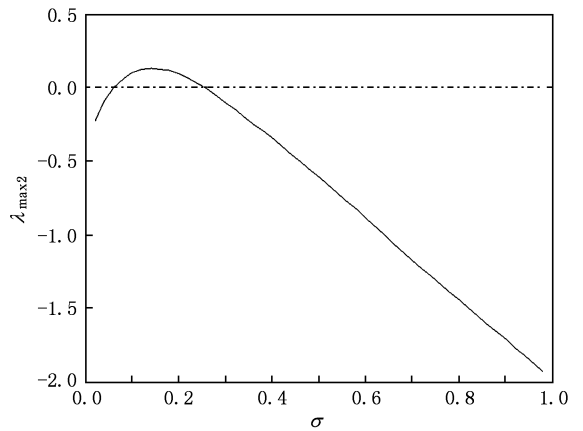


图6 节点2最大 Lyapunov 指数随耦合强度的演化

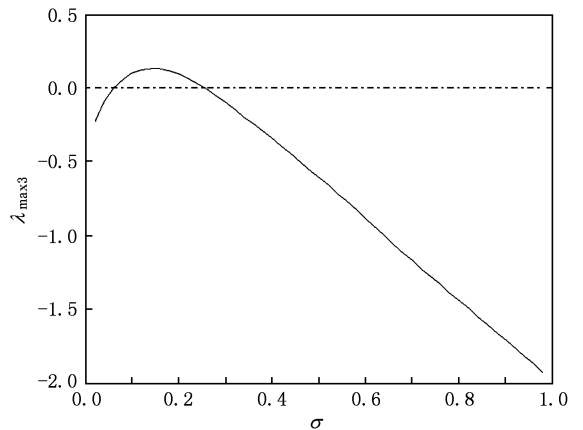


图7 节点3最大 Lyapunov 指数随耦合强度的演化

将 N 个 Fisher-Kolmogorov 系统作为网络的节点,按照(1)式的连接构成最近邻网络.在单变量最近邻连接下, $\mathbf{H}(\mathbf{x}_j(r, t)) = \mathbf{x}_j(r, t)$. 在模拟过程中,网络中各参量值的选择保持不变.图5—7给出 $N = 3$ 时各节点 Fisher-Kolmogorov 系统的最大 Lyapunov 指数随网络耦合强度 σ 的变化关系.在最大 Lyapunov 指数小于零的区域内任取网络耦合强度 $\sigma = 0.5$,定义网络节点之间状态变量的误差信号 $e_1 = x_2 - x_1, e_2 = x_3 - x_2$,仿真模拟这些误差信号随时空的演化结果如图8和图9所示.图中显示,经过一个暂态过程以后网络节点之间状态变量的误差信号均趋于零,整个网络的完全同步得以实现.

4. 噪声的影响

考虑有界噪声对网络同步性能的影响.设 $Q(t)$ 为有界噪声, $Q(t) = A \cos(\Omega t + \xi), \xi = \eta W(t) + R$. 这里, A 为噪声强度, Ω 为噪声的中心频率, $W(t)$ 是

标准的 Wiener 过程, η 表示频率随机扰动强度, R 是 $[0, 2\pi]$ 之间均匀分布的随机变量.在以下的讨论中,取 $\Omega = 1, \eta = 1$.当这种有界噪声作用于网络时,仿真模拟各节点 Fisher-Kolmogorov 系统的最大

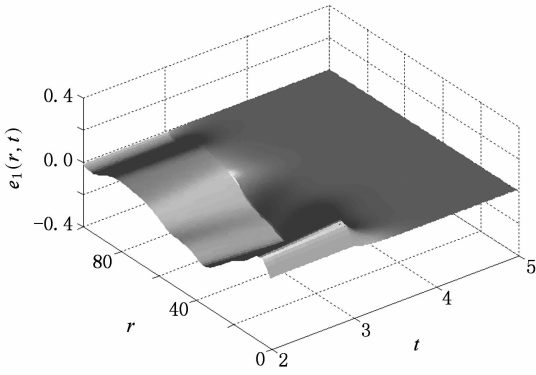


图 8 误差变量 $e_1(r, t)$ 的时空演化

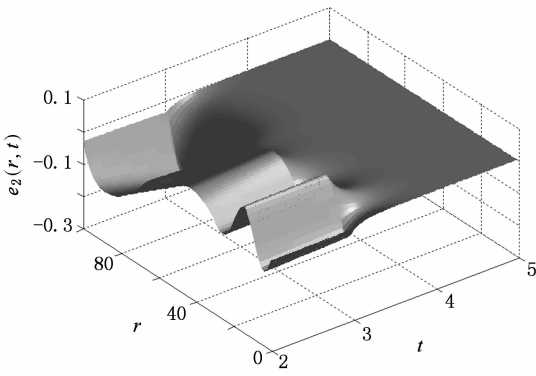


图 9 误差变量 $e_2(r, t)$ 的时空演化

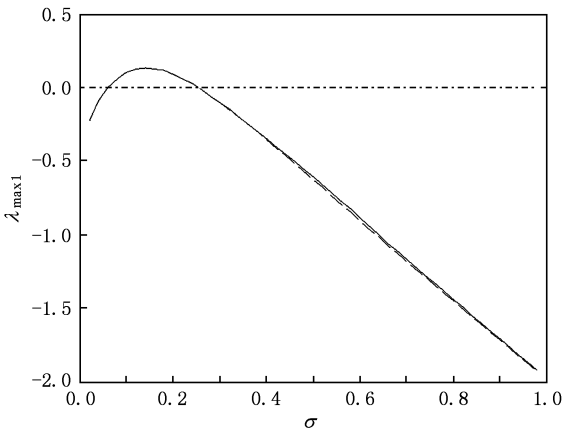


图 10 有噪声时节点 1 最大 Lyapunov 指数随耦合强度的演化 ($A = 0.01$)

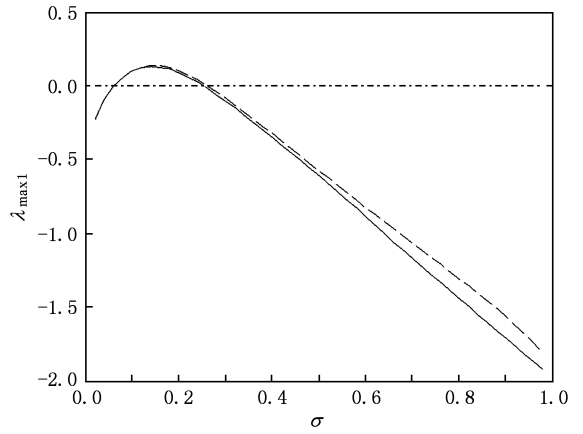


图 11 有噪声时节点 1 最大 Lyapunov 指数随耦合强度的演化 ($A = 0.1$)

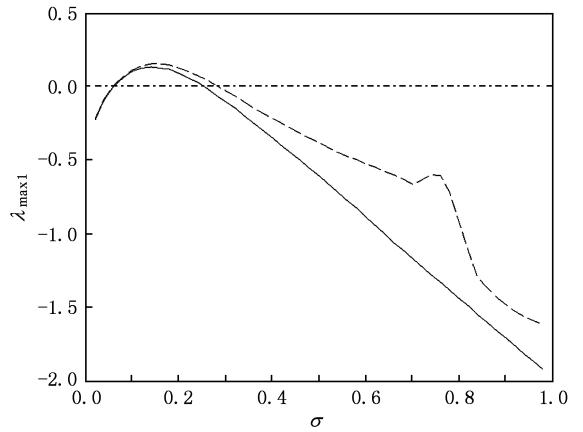


图 12 有噪声时节点 1 最大 Lyapunov 指数随耦合强度的演化 ($A = 1$)

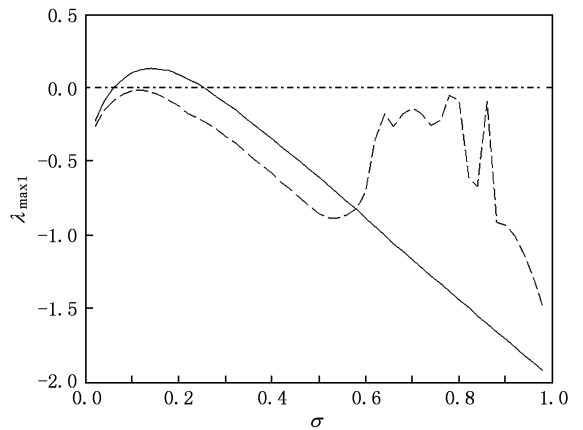


图 13 有噪声时节点 1 最大 Lyapunov 指数随耦合强度的演化 ($A = 1.5$)

Lyapunov 指数随网络耦合强度 σ 的变化关系曲线并与无噪声时的情况相比较. 此时, 网络中所有的参量值与无噪声时相同, 改变的仅仅是噪声强度 A 的数值. 当 A 在 10^{-2} 数量级时, 分别以实线和虚线表示无噪声和有噪声时系统的最大 Lyapunov 指数.

图 10 给出节点 1 的比较情况. 仿真结果显示, 噪声

的存在对整个网络同步性能的影响不大,节点 Fisher-Kolmogorov 系统的最大 Lyapunov 指数随网络耦合强度 σ 的变化关系曲线与无噪声时基本符合. 图 11 给出噪声强度 A 增至 10^{-1} 数量级时节点 1 处的 Fisher-Kolmogorov 系统的最大 Lyapunov 指数随网络耦合强度 σ 的变化关系曲线与无噪声时的比较情况. 仿真结果显示,虽然噪声的存在使最大 Lyapunov 指数随网络耦合强度 σ 变化的关系曲线与无噪声时有所差别,但与最大 Lyapunov 指数由正变负相对应的网络耦合强度 σ 的临界点基本没有改变,此时,噪声的存在对整个网络同步性能也无大的影响. 当噪声强度 $A = 1$ 时,由图 12 可以看出,与最大 Lyapunov 指数由正变负相对应的网络耦合强度 σ 的临界点已和无噪声时有所差别,但最大 Lyapunov 指数随网络耦合强度 σ 的变化关系曲线整体演化趋势没有实质性改变,因此,并不影响整个网络最终的同步效果. 尤其值得一提的是有时噪声的存在还可以增强整个网络的同步性能. 图 13 显示的是噪声强度 $A = 1.5$ 时的仿真结果. 可以看到,与最大 Lyapunov 指数由正变负相对应的网络耦合

强度 σ 的临界点消失了,虽然在噪声的影响下最大 Lyapunov 指数与无噪声相比已有较大差异,但全部为负值,即耦合强度 σ 取任何值均可以使网络实现同步. 节点 2,3 的情况与节点 1 处基本相同,这里不重复讨论.

5. 结 论

研究了最近邻网络的时空混沌同步问题. 基于对网络的稳定性分析,获得了同步状态附近的变分方程,通过对其进行 Jordan 标准型变换,得到了实现整个网络时空混沌同步的条件. 进一步采用 Fisher-Kolmogorov 时空混沌系统作为网络节点实例,仿真模拟了网络各节点状态方程的最大 Lyapunov 指数随网络耦合强度的变化关系曲线. 结果显示,在最大 Lyapunov 指数小于零的区域内,对于任意的节点之间的耦合强度值,均可以使整个网络达到完全同步,相应的网络误差信号经过短暂的时空序列以后也趋于零. 通过研究有界噪声作用下网络的同步效果发现,整个网络的同步性能良好.

-
- [1] Watts D J, Strogatz S H 1998 *Nature* **393** 440
- [2] Barabási A L, Albert R 1999 *Science* **286** 509
- [3] Adamic L A, Huberman B A 2000 *Science* **287** 2115
- [4] Stelling J, Klamt S, Bettenbrock K, Schuster S, Gilles E D 2002 *Nature* **420** 190
- [5] Timme M, Wolf F, Geisel T 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 74101
- [6] Ravasz E, Barabási A L 2003 *Phys. Rev. E* **67** 26112
- [7] Lü J H, Yu X H, Chen G R 2004 *Physica A* **334** 281
- [8] Motter A E, Zhou C, Kurths J 2005 *Phys. Rev. E* **71** 16116
- [9] Fang J Q, Bi Q, Li Y, Lu X B, Liu Q 2007 *Sci. Chin. G* **50** 379
- [10] Xu D, Li X, Wang X F 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1313 (in Chinese) [许丹, 李翔, 汪小帆 2007 物理学报 **56** 1313]
- [11] Xiang L Y, Liu Z X, Chen Z Q, Yuan Z Z 2008 *Sci. Chin. F* **51** 511
- [12] Song Y R, Jing G P 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 5911 (in Chinese)
- [宋玉蓉, 蒋国平 2009 物理学报 **58** 5911]
- [13] Atay F M, Jost J, Wende A 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 144101
- [14] Haken H 2005 *Physica D* **205** 1
- [15] Lü L, Xia X L 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 814 (in Chinese) [吕翎, 夏晓岚 2009 物理学报 **58** 814]
- [16] Checco P, Biey M, Kocarev L 2008 *Chaos, Solitons and Fractals* **35** 562
- [17] Hung Y C, Huang Y T, Ho M C, Hu C K 2008 *Phys. Rev. E* **77** 16202
- [18] Lü L, Zhang C 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 1462 (in Chinese) [吕翎, 张超 2009 物理学报 **58** 1462]
- [19] Ma X J, Wang Y, Zheng Z G 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4426 (in Chinese) [马晓娟, 王延, 郑志刚 2009 物理学报 **58** 4426]
- [20] Manne K K, Hurd A J, Kenkre V M 2000 *Phys. Rev. E* **61** 4177

The synchronization of spatiotemporal chaos of nearest-neighbor coupled network *

Lü Ling[†] Li Gang Shang Jin-Yu Shen Na Zhang Xin Liu Shuang Zhu Jia-Bo

(*College of Physics and Electronic Technology, Liaoning Normal University, Dalian 116029, China*)

(Received 24 December 2009; revised manuscript received 11 January 2010)

Abstract

The synchronization of spatiotemporal chaos in a nearest-neighbor coupled network is studied. Spatiotemporal chaos systems are taken as the nodes of the network, and the condition to realize global synchronization of the network is obtained by identifying the maximum Lyapunov exponent of the network according to Lyapunov stability theory. The nearest-neighbor coupled network with nodes of Fisher-Kolmogorov spatiotemporal chaos systems is taken as an example for simulation, the synchronization of spatiotemporal chaos for the network is checked. The synchronizing function of the network under bounded noise is further studied, and the results show that the method has good capability of anti-jamming.

Keywords: synchronization, nearest-neighbor coupled network, spatiotemporal chaos, Lyapunov exponent

PACC: 0545

* Project supported by the Natural Science Foundation of Liaoning Province, China (Grant No. 20082147) and the Innovative Team Program of Liaoning Educational Committee, China (Grant No. 2008T108).

[†] E-mail: luling1960@yahoo.com.cn