

# 截断误差导致的非双曲不动点邻域拓扑变异\*

盛利元<sup>†</sup> 张 刚

(中南大学物理科学与技术学院, 长沙 410083)

(2009 年 12 月 2 日收到; 2010 年 1 月 5 日收到修改稿)

提供一个关于截断误差使简单系统复杂化的直接实验证据, 以此证明存在混沌抗退化机理. 分别构造了一个一维圆弧迭代系统和一个一维抛物线迭代系统, 两者均有一个非双曲不动点, 其迭代序列被证明是简单极限序列, 数字计算实验显示这两个迭代系统都存在可以越过不动点的序列. 采用计算“元胞”分析方法清晰地展示了截断误差导致非双曲不动点邻域拓扑变异: 形成第 I 类阵发混沌通道, 或产生纹波分岔.

**关键词:** 截断误差, 非双曲不动点, 抗退化机理, 拓扑结构变异

**PACC:** 0545, 0547

## 1. 引 言

混沌系统在信息安全领域(如混沌加密, 数字签名, 身份论证, 混沌保密通信, 混沌扩频和跳频通信, 混沌电子对抗等信息技术)中有着巨大的潜在应用价值, 受到广泛关注. 十多年来相继提出了各种数字混沌密码算法, 如基于 tent, Logistic, PLID, TD-ERCS 等混沌系统设计的流密码、分组密码和 Hash 函数<sup>[1-9]</sup>. 可是, 这类混沌密码算法一直没有得到密码学界的普遍认同, 怀疑混沌密码算法存在安全性隐患<sup>[10]</sup>, 因为在混沌系统的数字计算中, 截断误差将使混沌系统的连续相空间离散化为有限状态空间, 使得混沌轨道最终退化为周期轨道<sup>[10-13]</sup>, 而短的周期轨道意味着弱密钥<sup>[14]</sup>. 混沌退化已经是混沌密码理论走向实用的关键的安全性理论问题.

为了消除混沌退化引起的安全性问题, 目前仅提出了几个类似工程措施来改善混沌系统退化的方法, 如使用更高精度、采用多重混沌系统、对混沌系统进行(伪)随机扰动<sup>[15]</sup>. 这三种方法都属于外部干预方法, 由于增加了大量冗余计算, 需要成倍消耗系统计算资源, 即使如此, 还是不能从理论上确保不存在短周期之类的安全漏洞.

传统密码算法是在有限状态空间中实现的, 与

之比较, 混沌密码算法也是在有限状态空间中实现的, 两者没有本质区别, 故不能因为混沌退化就认定混沌密码算法一定不安全, 换言之, 如果能够找到这样的混沌系统, 它在可及的空间和可及的时间内不会因为混沌退化而出现周期轨道, 根据密码分析学原理, 由这样的混沌系统构造的密码算法对于混沌退化而言就是安全的. 因此, 要构造安全的混沌密码算法, 混沌系统必须具有某些特定机理或条件, 这样的混沌系统称为安全混沌<sup>[16]</sup>. 为了研究安全混沌抵御混沌退化的特定机理和条件, 本文依循文献[17, 18]的研究思路, 进一步寻找能够证明混沌系统抗退化机理存在的直接实验证据. 文献[17]报道在 TD-ERCS 混沌系统中发现与混沌退化矛盾的现象——随机数字振荡, 表明截断误差也可以使系统复杂化, 提出了图 1 所示的理论解释(简称 S 假说), 认为只要条件合适, 在截断误差  $\delta$  作用下系统可以从非双曲不动点邻域的吸引区越过不动点  $x_{\infty}$  抵达排斥区, 诱导阵发混沌. 如果 S 假说成立, 意味着在一定条件下, 混沌就是一种有限数字算法的艺术品, 换言之, 存在混沌的抗退化机理. 这一理论解释需要一个描述截断误差行为细节的与图 1 一致的直接实验证据的支持. 只因 TD-ERCS 混沌系统是一个二维迭代系统, 文献[18]未能从中找到直接实验证据, 但给出了间接的实验证据, 发现截断误差改变了非双曲不动点邻域的拓扑结构, 在这个特定区

\* 国家自然科学基金(批准号:60672041)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: itpo@mail.csu.edu.cn

域,混沌系统对截断误差是敏感性的,截断误差会使混沌系统的演化更为复杂.本文试图从一维迭代系统中获得直接实验证据.通过构造一个含有非双曲不动点的一维迭代系统,在保证每次迭代都能够产生截断误差的条件下,采用计算“元胞”分析方法获得了与图 1 一致的直接实验证据,清晰地展示了截断误差导致非双曲不动点邻域拓扑变异:形成第 I 类阵发混沌通道,或产生一类新的分岔——纹波分岔,从而证明混沌抗退化机理是存在的.

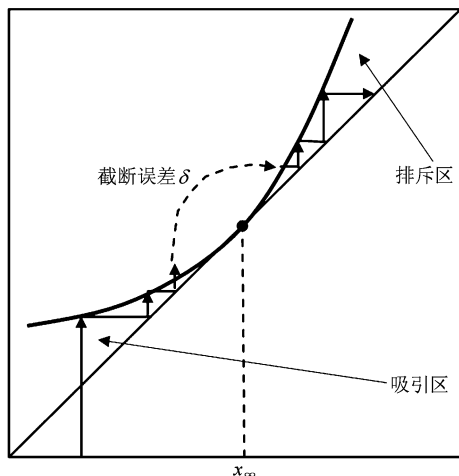


图 1 S 假说:截断误差诱导阵发混沌

## 2. 一维圆弧系统

### 2.1. 一维圆弧系统的数学模型

根据图 1,设迭代曲线是一半径为  $r > 0$  的圆弧,圆心在直线  $y = 1 - x$  上,与直线  $y = x$  相切,则切点为非双曲不动点  $x_\infty$ ,与直线  $y = x$  相切于  $(0.5, 0.5)$ ,圆心坐标为  $(\frac{1}{2}(1 - \sqrt{2}r), \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2}r))$ ,由此求得开口向上的一段圆弧

$$f_{r1}(x) = 0.5 + \frac{\sqrt{2}}{2}r - \sqrt{r^2 - \left(x - 0.5 + \frac{\sqrt{2}}{2}r\right)^2}, \quad (1)$$

称为一维圆弧系统,半径  $r$  为系统参数.

任意给定初值  $x_0 \in \left(\frac{1}{2}(1 - \sqrt{2}r), 0.5\right]$ ,由  $f_{r1}(x)$  可得圆弧系统迭代序列

$$X = \{x_n \mid x_{n+1} = f_{r1}(x_n); n = 0, 1, 2, 3, \dots; \frac{1}{2}(1 - \sqrt{2}r) < x_0 \leq 0.5\}. \quad (2)$$

特别指出,数字实验中,当  $f_{r1}(x)$  改用等价形式

$$f_{r2}(x) = 0.5 + \frac{1}{\sqrt{2}}r - \sqrt{r^2 - \left(x - 0.5 + \frac{1}{\sqrt{2}}r\right)^2}, \quad (3)$$

其迭代序列将演绎出截然不同的结果.

### 2.2. 圆弧系统迭代序列的极限性质

**性质 1**  $x_\infty = 0.5$  是  $f_{r1}(x)$  (或  $f_{r2}(x)$ ) 的不稳定非双曲不动点.

将  $x_\infty = 0.5$  代入(1)式(或(3)式),易验证  $f_{r1}(0.5) = 0.5$ ,故  $x_\infty = 0.5$  是不动点.其次可以验证  $f'_{r1}(x) \big|_{x=0.5} = 1$ ,故  $x_\infty = 0.5$  是非双曲性的.又因为  $f''_{r1}(x) \big|_{x=0.5} = \frac{2\sqrt{2}}{r} > 0$ ,根据文献[19]提供的判据,  $x_\infty = 0.5$  还是不稳定的不动点.

**性质 2**  $X$  是递增的.

只需证明,在区间  $\left(\frac{1}{2}(1 - \sqrt{2}r), 0.5\right)$  内,  $f_{r1}(x) - x > 0$ .由(1)式可得

$$f_{r1}(x) - x = \frac{2(x - 0.5)^2}{0.5 + \frac{\sqrt{2}}{2}r + \sqrt{r^2 - \left(x - 0.5 + \frac{\sqrt{2}}{2}r\right)^2} - x}$$

因  $x \in \left(\frac{1}{2}(1 - \sqrt{2}r), 0.5\right)$ ,故上式分母恒大于零,有  $f_{r1}(x) - x > 0, X$  递增.

**性质 3**  $X$  是以  $x_\infty = 0.5$  为极限的递增序列.

首先,若  $x < 0.5$ ,则  $\sqrt{r^2 - \left(x - 0.5 + \frac{\sqrt{2}}{2}r\right)^2} > \frac{\sqrt{2}}{2}r$ ,即  $f_{r1}(x) < 0.5$ ,再由性质 2 有  $x < f_{r1}(x) < 0.5$ ,序列  $X$  递增但不超越  $x_\infty = 0.5$ ;其次,假设在  $\left(\frac{1}{2}(1 - \sqrt{2}r), 0.5\right)$  内存在另一个极限  $x'_\infty < x_\infty$ ,则取  $x_0 = x'_\infty$ ,由性质 2 得  $f_{r1}(x'_\infty) > x'_\infty$ ,与  $x'_\infty$  为极限的假设矛盾,故该性质成立.

## 3. 圆弧系统迭代序列的数字实验与分析

计算机是研究混沌系统的必不可少的工具,计算的有效性一直是人们争论的焦点,但很少见到以计算精度的最小单元(称为计算“元胞”)为基础的理论 and 数字实验.李树钧<sup>[20]</sup>曾采用计算机定点数在

计算“元胞”级上对分段线性映射混沌系统退化机理进行了系统理论与数字实验研究,其结论代表性有限,无法揭示浮点数表示下的数字混沌系统的某些复杂现象,特别是混沌的抗退化现象.功能上,计算机定点数与浮点数两者之间存在显著差别.其一,浮点数定义在整个实数域上,而定点数只能定义在部分实数域上.当计算对象中存在一个或多个变量(包括中间变量)超出了定点数的定义域时,定点数计算失效,因而在混沌的数字计算与分析中使用有限,意义也有限.其二,定点数与浮点数的计算“元胞”不同.在给定精度下,定点数的计算“元胞”是一个常数,而浮点数的计算“元胞”是数的指数函数,必然要影响计算对象.基于以上原因,本实验全

部采用双精度浮点数.

### 3.1. 搜寻越过不动点 $x_{\infty} = 0.5$ 案例

计算迭代式  $f_{r1}(x)$  和  $f_{r2}(x)$ , 如果存在越过不动点  $x_{\infty} = 0.5$  的案例, 则说明迭代序列  $X$  的极限消失, 后续的迭代将是发散的, 截断误差的确可以使一个简单极限序列复杂化, S 假说成立. 计算实验在 Matlab7.0 计算平台上完成.

给定参数  $r$  和初值  $x_0 = 0.5 - 10^{-10}$ , 计算序列  $X$ , 若  $n = k$  时, 有  $x_{k-1} < 0.5, x_k \geq 0.5, x_{k+1} > 0.5$ , 则说明系统越过了不动点, 输出对应的  $k$  及  $x_{k-1}, x_k, x_{k+1}$ .

$f_{r1}(x)$  的 m 程序关键原代码为

```
function func = iterfun(x,r),
```

```
func = 0.5 + sqrt(2) * r/2 - sqrt(r * r - (x - 0.5 + sqrt(2) * r/2)^2),
```

$f_{r2}(x)$  的 m 程序关键原代码为

```
function func = iterfun(x,r),
```

```
func = 0.5 + r/sqrt(2) - sqrt(r * r - (x - 0.5 + r/sqrt(2))^2).
```

计算结果:  $f_{r1}(x)$  中搜索到了越过不动点  $x_{\infty} = 0.5$  的案例,  $f_{r2}(x)$  则没有. 表 1 列出了越过不动点的部分搜索结果, 其中  $x_{k-1}, x_k, x_{k+1}$  采用 IEEE-754 标准浮点数的 16 进制数表示, 例如

$3\text{fe}00000000000000 = (0.5)_{10}$ ,

精确到计算“元胞”. 有两个重要事实: 一是序列  $X$  越过不动点  $x_{\infty} = 0.5$  的确发生, 换言之, 图 1 的 S 假说成立; 二是系统迭代次数  $k$  与圆弧半径  $r$  具有负相关性, 圆弧半径越大, 系统收敛到不动点的速度越快.

表 1 圆弧系统中部分迭代序列越过不动点的数字计算实验结果

$r$	$k$	$x_{k-1}$	$x_k$	$x_{k+1}$
0.75	900720	3fdffffffffffffe	3fe0000000000000	3fe0000000000001
2.75	350457	3fdffffffffffff8	3fe0000000000000	3fe0000000000002
6.75	112590	3fdffffffffffff0	3fe0000000000000	3fe0000000000008
10.75	112590	3fdffffffffffff0	3fe0000000000000	3fe0000000000008
20.75	46727	3fdffffffffffffe0	3fe0000000000000	3fe0000000000010
50.75	8148	3fdffffffffffff80	3fe0000000000040	3fe00000000000c0
80.75	7037	3fdffffffffffff00	3fe0000000000000	3fe0000000000080

### 3.2. 统计测试越过不动点的序列数目及其分布

越过不动点的迭代次数  $k$  与圆弧半径  $r$  具有负相关性, 为了揭示可能存在的规律, 分别统计测试了越过不动点序列数目及其分布.

固定初始值  $x_0 = 0.5 - 10^{-10}$ ,  $r$  在 0.2—80 之间以间隔  $\Delta r = 0.2$  均匀取值, 共 400 个点, 计算迭代序列  $X$ , 统计能够越过不动点  $x_{\infty} = 0.5$  的序列数目. 若序列  $X$  能够越过不动点  $x_{\infty} = 0.5$ , 则计算对应  $r$  的迭代次数  $k$ , 作  $r-\ln k$  分布图.

计算结果: 400 个序列中, 212 个跳过不动点发散, 占 53%, 188 个序列收敛, 占 47%;  $r-\ln k$  分布如图 2 所示.

图 2 的  $r-\ln k$  分布具有阶梯状形态. 精确计算发现, 阶梯高等于常数  $\ln 2$ , 相邻阶梯长具有 2 倍关系, 表明相邻阶梯的高和长均成 2 倍关系, 且不会因初始条件  $x_0$  变化而变化, 这是否隐含了一种与“2”有关联的量化特征.

### 3.3. 系统越过不动点的动力学过程

表 2 列出了圆弧系统一次越过不动点前后的

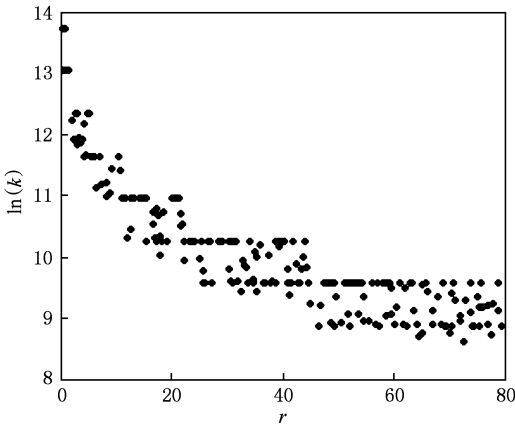


图2 能够越过不动点  $x_\infty = 0.5$  的迭代序列的  $r-\ln k$  分布图

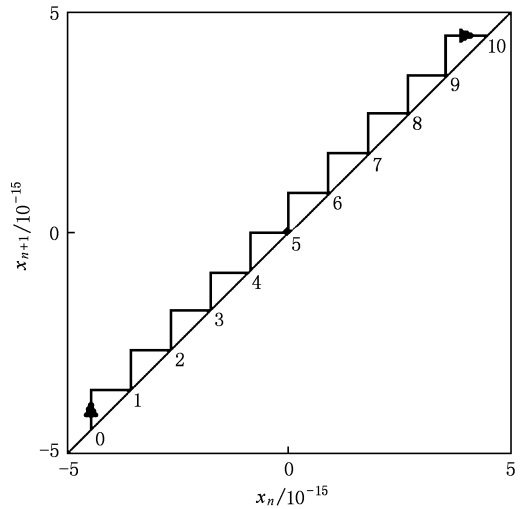


图3 圆弧迭代系统在非双曲不动点邻域内的演化过程

11 个迭代值,其中,初始值  $x_0 = 3fdfffffffb0$ ,系统参数  $r = 6.4$ ,第 5 号点为不动点  $x_\infty = 3fe0000000000000 = (0.5)_{10}$ .图 3 给出了对应表 2 的演化过程(其中不动点平移至原点),具有第 I 类阵发混沌的典型形态特征<sup>[21]</sup>,是支持 S 假说直接实验证据,表明截断误差的确改变了非双曲不动点邻域的拓扑结构,不动点邻域形成阵发混沌通道.

的分岔行为,称为纹波分岔.纹波分岔是截断误差改变非双曲不动点邻域拓扑结构的另一种结果.作为一个特例,若纹波分岔中只有一对稳定与不稳定不动点,它就是切分岔.

表2 圆弧迭代系统一次越过不动点前后的 11 个迭代值

点序号	$F_1$ 的迭代值
0	3fdfffffffb0
1	3fdfffffffc0
2	3fdfffffffd0
3	3fdfffffffe0
4	3fdfffffff00
5	3fe0000000000000
6	3fe0000000000008
7	3fe0000000000010
8	3fe0000000000018
9	3fe0000000000020
10	3fe0000000000028

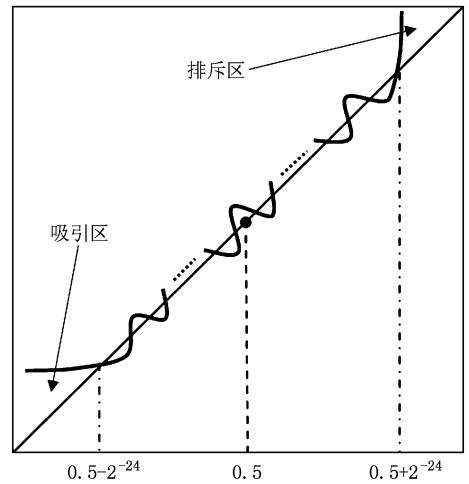


图4 非双曲不动点邻域内的纹波分岔

### 3.4. 不能越过不动点时不动点邻域的结构

通过“元胞”级数据搜索分析发现,无论是  $f_{r1}(x)$  还是  $f_{r2}(x)$ ,对于不能越过不动点的迭代系统,非双曲不动点邻域的结构均有如图 4 所示的形态.在不动点为中心的一个区间  $(0.5 - 2^{-24}, 0.5 + 2^{-24})$  内,准对称地分布了数目不等的稳定和 unstable 不动点以及纹波状迭代曲线,是一种在截断误差作用下由非双曲不动点变化而成的新结构,是一种新

纹波分岔产生原因还不清楚,一种可能解释是:截断误差的随机性对系统有正反两种作用,同时非双曲不动点邻域内系统对截断误差具有较大的非线性放大能力,纹波形态是截断误差的正反两种作用被非线性放大的结果.

纹波分岔发生在  $(-2^{-24}, +2^{-24})$  内,与文献 [18] 给出的逃逸机理发生区域(二维拓展维区域)有相同数量级,两个独立事件有同一数量级并非偶然,因此可以将  $2^{-24}$  视为截断误差在非双曲不动点邻域内的作用半径或非双曲不动点邻域的有效范围,它约是“元胞”  $2^{-52}$  的  $2^{28}$  倍.

### 3.5. 迭代系统越过非双曲不动点的条件

计算的网格化导致非双曲不动点邻域的拓扑结构变化,改变了传统理论不动点条件,理论预期失效,可引入网格概念加以修正. 在变量上冠“~”表示对应传统变量的网格化变量,如  $\tilde{x}$  和  $\tilde{f}(\tilde{x})$  分别表示对应传统变量  $x$  和函数  $f(x)$  的网格化变量与计算值. 对于自变量  $x$ ,  $|\tilde{x} - x|$  总是小于计算“元胞”,对于函数  $f(x)$ ,  $|\tilde{f}(\tilde{x}) - f(x)|$  可能小于计算“元胞”,也可能大于计算“元胞”,因此,在非双曲不动点邻域内对应  $x_\infty = f(x_\infty)$  的网格化形式  $\tilde{x}_\infty = \tilde{f}(\tilde{x}_\infty)$  不一定总是成立.

**引理 1** 迭代系统越过非双曲不动点  $x_\infty$  的必要条件是  $\tilde{x}_\infty \neq \tilde{f}(\tilde{x}_\infty)$ .

条件  $\tilde{x}_\infty \neq \tilde{f}(\tilde{x}_\infty)$  必要但不充分,例如图 4 中给出的纹波分岔也有  $\tilde{x}_\infty \neq \tilde{f}(\tilde{x}_\infty)$ ,但迭代系统不能越过非双曲不动点. 该引理只能回答序列是否可能越过非双曲不动点,但不保证一定能够越过.

**定理 1** 若一个迭代系统  $f(x)$  中包含无理数,则在数字计算中有可能越过非双曲不动点.

因为  $f(x)$  中包含无理数,不能用有限数字系统精确表示,因而每一次数字计算值必定不等于理论值,即  $\tilde{f}(\tilde{x}) \neq f(x)$ ,因此在不动点有  $\tilde{f}(\tilde{x}_\infty) \neq x_\infty$ ; 又因  $|\tilde{x}_\infty - x_\infty|$  小于计算“元胞”,而若  $|\tilde{f}(\tilde{x}_\infty) - f(x_\infty)|$  大于计算“元胞”,则必有  $\tilde{f}(\tilde{x}_\infty) \neq \tilde{x}_\infty$ ,根据引理 1,该定理成立. 例如在圆弧迭代系统中,  $x_\infty = 0.5 = \tilde{x}_\infty$ ,由于  $f_{\pi}(x)$  中包含无理数  $\sqrt{2}$ ,故  $\tilde{f}_{\pi}(\tilde{x}_\infty) \neq f_{\pi}(x_\infty) = \tilde{x}_\infty$ .

**引理 2** 迭代系统不能越过非双曲不动点  $x_\infty$  的充要条件是在不动点  $x_\infty$  的邻域内产生纹波分岔.

该引理是针对传统理论的条件  $x_\infty = f(x_\infty)$  在非双曲不动点邻域内做出的修正,截断误差使得非双曲不动点  $x_\infty$  在其邻域内分裂成多对稳定和不稳定的网格化不动点  $\tilde{x} = \tilde{f}(\tilde{x})$ ,这时  $\tilde{x}_\infty = \tilde{f}(\tilde{x}_\infty)$  也并非必然;但如果产生唯一一个网格化的不动点  $\tilde{x} = \tilde{f}(\tilde{x})$ ,由于准对称性,这个不动点一定是  $\tilde{x}_\infty = \tilde{f}(\tilde{x}_\infty)$ ,考虑到完备性,这种情况也视为纹波分岔的特例.

### 4. 抛物线迭代系统

根据定理 1,若能够构造出包含无理数的迭代系统,就有可能从中找到越过非双曲不动点的迭代序列. 不动点或周期轨道点的非双曲性在混沌系统中是一种常态,例如 logistic 映射系统中的周期  $2^n$

轨道具有非双曲性<sup>[22]</sup>,因此,定理 1 指出了在混沌系统中寻找抗退化现象的大致方向. 为了说明定理 1 具有普遍的意义,圆弧迭代系统中存在越过非双曲不动点的迭代序列不是一个偶然事件,类似圆弧系统构造一个更为简单的一维抛物线迭代系统,通过数字实验从中寻找越过不动点的序列.

设抛物线与直线  $y = x$  相切于  $x = x_\infty$ ,引入切点处曲率半径  $\frac{a}{\sqrt{2}}$  作为系统迭代参数,可得抛物线方程

$$f_p(x) = ax^2 + (1 - 2ax_\infty)x + ax_\infty^2. \quad (4)$$

当  $a > 0$  时,可以证明,所得迭代序列性质与圆弧系统迭代序列性质相同.

固定初始值  $x_0 = 0.5 - 10^{-10}$ ,参数  $a$  在 0.2—80 之间以间隔  $\Delta a = 0.2$  均匀取值,共 400 个点(对应 400 个序列). 分别取不动点  $x_\infty = \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0.5$ ,对应双精度浮点数分别是 3fe6a09e667f3bcd, 3fe6a09e667f3bcc 和 3fe0000000000000. 显然,  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  与  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  是相等的无理数,但用双精度浮点数表示时却不相等,前者偏大,后者偏小,  $f_p(x)$  含无理数,迭代值与真实值不相等. 0.5 是有理数,可以用有限位数字精确表示,  $f_p(x)$  不含无理数,某些迭代值与真实值相等.

测试结果:1) 在对应  $x_\infty = \frac{\sqrt{2}}{2}$  的 400 个序列中, 21 个序列越过不动点,占 5.23%, 379 个序列收敛,占 94.77%; 2) 对应  $x_\infty = \frac{1}{\sqrt{2}}$  和 0.5,没有找到越过不动点的序列. 表 3 给出了一次越过不动点的实验数据,  $a = 13.8$ ,从  $x_0 = 0.5 - 10^{-10}$  开始迭代,经过  $k = 45569$  次迭代后越过不动点 3fe6a09e667f3bcd,它介于表中第 4 和第 5 个点之间,表明定理 1 正确.

表 3 抛物线系统越过不动点前后的 11 个迭代值

点序号	迭代值
0	3fe6a09e667f3b60
1	3fe6a09e667f3b78
2	3fe6a09e667f3b90
3	3fe6a09e667f3ba8
4	3fe6a09e667f3bb8
5	3fe6a09e667f3bd0
6	3fe6a09e667f3be8
7	3fe6a09e667f3bf8
8	3fe6a09e667f3c08
9	3fe6a09e667f3c18
10	3fe6a09e667f3c38

## 5. 结 论

从一维圆弧迭代系统和一维抛物线迭代系统中分别找到了证明截断误差诱导阵发混沌的直接实验证据, 从而证明混沌的抗退化机理是存在的, 表明在非双曲不动点邻域内, 截断误差的确改变了局域的拓扑结构, 形成了一个有效作用区域, 在这个区域内, 使一个简单极限系统复杂化, 或者形成一个通过不动点的通道, 这时将诱导第 I 类阵发混沌, 或者产生一种新的纹波分岔, 这时不动点将分

裂成多对稳定与不稳定的不动点. 这一重要实验结果也证明了混沌系统中含有非双曲不动点或非双曲周期轨道时, 混沌系统对截断误差就可能存在一定程度的敏感性, 即该混沌系统可能存在某种程度的抗退化机理.

此外, 通过对一维迭代系统的数字实验研究, 找到了一种判断迭代系统是否存在越过不动点的序列的方法, 我们相信这一方法对于高维迭代系统的研究有理论借鉴作用; 引入网格理论的计算“元胞”分析也有益于拓开思路定性和定量研究混沌的抗退化机理.

- 
- [1] Baptista M S 1998 *Phys. Lett. A* **240** 50
- [2] Kocarev L, Jakimoski G 2001 *Phys. Lett. A* **289** 199
- [3] Stojanoski T, Kovarev L 2001 *IEEE Trans. CAS-I* **48** 281
- [4] Palacios A, Juarez H 2002 *Phys. Lett. A* **303** 345
- [5] Wang X M, Zhang J S, Zhang W F 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2737 (in Chinese) [王小敏、张家树、张文芳 2003 物理学报 **52** 2737]
- [6] Zhan H, Wang X F, Li C H, Liu D H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4006 (in Chinese) [张瀚、王秀峰、李朝晖、刘大海 2005 物理学报 **54** 4006]
- [7] Sheng L Y, Cao L L, Sun K H, Wen J 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4031 (in Chinese) [盛利元、曹莉凌、孙克辉、闻姜 2005 物理学报 **54** 4031]
- [8] Wang L, Wang F P, Wang Z J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3964 (in Chinese) [王蕾、汪芙平、王赞基 2006 物理学报 **55** 3964]
- [9] Sheng L Y, Li G Q, Li Z W 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5700 (in Chinese) [盛利元、李更强、李志炜 2006 物理学报 **55** 5700]
- [10] Curiaç D I, Iercan D, Dranga O, Dragan F, Baniás O 2007 *Proceedings of International Conference on Emerging Security Information, Systems and Technologies (SECURWARE 2007)*, Valencia, Spain, October 14—20, 2007 p71
- [11] Levy Y E 1982 *Phys. Lett. A* **53** 1
- [12] Beck C, Roepstorff G 1987 *Physica D* **25** 173
- [13] Binder P M 1992 *Physica* **57** 31
- [14] Li S J, Mou X Q, Cai Y L, Ji Z, Zhang J H 2003 *Comput. Phys. Commun.* **153** 52
- [15] Alvarez G, Li S J 2006 *Int. J. Bifurc. Chaos.* **16** 2129
- [16] Sheng L Y, Wen J, Cao L L, Xiao Y Y 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 0078 (in Chinese) [盛利元、闻姜、曹莉凌、肖燕子 2007 物理学报 **56** 0078]
- [17] Sheng L Y, Jia W Y 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5574 (in Chinese) [盛利元、贾伟尧 2005 物理学报 **54** 5574]
- [18] Sheng L Y, Jia W Y, Wu S C, Xia G R 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3753 (in Chinese) [盛利元、贾伟尧、吴舒辞、夏国荣 2007 物理学报 **56** 3753]
- [19] Murakami K 2005 *J. Math. Anal. Appl.* **310** 492
- [20] Li S J 2003 *Ph. D. Dissertation* (Xi'an: Xi'an Jiaotong University) (in Chinese) [李树钧 2003 博士学位论文(西安: 西安交通大学)]
- [21] Pomeau Y, Manneville P 1980 *Commun. Math. Phys.* **74** 189
- [22] Oteo J A, Ros J 2007 *Phys. Rev. E* **76** 036214

# The topological variance of neighborhood of a non-hyperbolic fixed point produced by truncation error<sup>\*</sup>

Sheng Li-Yuan<sup>†</sup> Zhang Gang

(*School of Physics Science and Technology, Central South University, Changsha 410083, China*)

(Received 2 December 2009; revised manuscript received 5 January 2010)

## Abstract

In the paper, a direct evidence for truncation error to complicate a simple system is provided, which proves the existence of anti-degradation mechanism in chaotic systems. Both one-dimensional circular arc iterated system and one-dimensional parabola iterated system are constructed, respectively. In each system, there is a non-hyperbolic fixed point. The corresponding iterative sequences are theoretically proved to be simple convergent sequences. However, there are a lot of iterative sequences that could jump over the fixed point in digital experiments. It is clearly revealed by digital-cell analysis that the topological variance of neighborhood of a non-hyperbolic fixed point is produced by truncation error, either a channel of type-I intermittency or a ripple bifurcation is configured from the fixed point.

**Keywords:** truncation error, non-hyperbolic fixed point, anti-degradation mechanism, variance of topological configuration

**PACC:** 0545, 0547

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60672041).

<sup>†</sup> E-mail: itpo@mail.csu.edu.cn