

具有非线性控制的 Chua 电路的混沌同步*

付士慧[†] 裴利军

(郑州大学数学系, 郑州 450001)

(2009 年 11 月 16 日收到; 2009 年 12 月 24 日收到修改稿)

Chua 电路是一个非光滑系统. 本文通过广义哈密顿系统和观测器方法, 将具有非线性控制的 Chua 电路的混沌同步问题转化成研究具有非线性控制的光滑系统的零解稳定性; 进而利用滑模控制对该光滑系统的零解稳定性进行了研究, 从而使得 Chua 电路达到了混沌同步. 最后, 将上述方法应用到具体系统, 数值结果也表明其正确性.

关键词: Chua 电路, 混沌同步, 广义哈密顿系统, 滑模控制

PACC: 0547, 0545

1. 引 言

同步是非线性动力系统的一种非常普遍的现象, 它表明两个运动的物体, 通过介质进行或强或弱的耦合, 使得两个系统运动状态趋于一致. 混沌同步是近年发现的新的同步, 并且已广泛应用到生物学、化学、医学、电子学、信息科学和保密通信等领域. 到目前为止, 人们已经对多种同步类型^[1] (完全同步, 滞后同步, 预测同步, 广义同步等) 和实现同步的多种方法 (驱动-响应同步法, 自适应同步法^[2,3], 脉冲同步法^[4], 观测器同步法^[5], 滑模控制同步法^[6]等) 进行了研究, 并取得了丰富的成果.

Chua 电路是美国贝克莱大学的蔡少棠 (Leon O. Chua) 设计的, 它是能产生混沌行为的最简单的自治电路, 它仅包含三个储能元件 (是自治的动态系统能产生混沌行为的最小数量) 以及一个 $V-I$ 特性相对简单的非线性电阻. 近年来 Chua 电路的混沌同步也引起了一些学者的关注: Gámez-Guzmán 等^[7] 对具有多个涡卷吸引子的 Chua 电路的完全同步通过广义哈密顿系统的方法进行了研究, 而 Agiza 等人^[8] 研究了具有未知参数的 Chua 电路的自适应同步, 但是他们集中研究的是线性耦合系统的同步. 由于物理上的限制和外界干扰, 经常要对系统进行非线性的控制. 比如, 若非线性控制设计不好, 非线性控制 (saturation 和 backlash) 会引起系统的衰

减和产生响应减小率, 因此很有必要考虑非线性控制. 为此, Li^[9] 和 Hu 等人^[10] 分别研究了具有非线性控制的 Chua 电路的投影同步和自适应反向同步. 本文主要研究的是具有非线性控制的 Chua 电路 (混沌系统) 的完全同步. 虽然现在一些文献对修正后的该类系统的混沌同步问题进行了研究^[11], 甚至还推广到了一般的系统^[12], 但是这些研究方法主要是针对光滑系统; Chua 电路是非光滑系统, 所以这些方法还不能直接被应用. 为此, 本文首先利用广义哈密顿系统和观测器方法, 先将具有非线性控制的 Chua 电路的同步问题转化成研究非线性控制的光滑系统零解的稳定性, 就可根据滑模控制进行研究.

本文对具有非线性控制的 Chua 电路利用广义哈密顿系统和观测器方法, 设计了驱动和响应系统, 从而得到了误差系统; 再对一个光滑系统 (误差系统) 通过设计非线性控制使其零解是稳定的, 从而达到非光滑系统的同步; 通过设计滑模面和控制器研究误差系统零解的稳定性; 选取参数进行数值模拟, 验证了该方法的正确性.

2. 通过广义哈密顿系统和观测器方法对 Chua 电路重新设计

Chua 电路的动力学方程可表示如下^[10]:

$$\dot{x}_1 = p(x_2 - x_1 - bx_1 - h(x_1)),$$

* 国家自然科学基金 (批准号: 10702065 和 10672006) 资助的课题.

[†] E-mail: fshtp@163.com

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= x_1 - x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 &= -qx_2 - \gamma x_3,\end{aligned}\quad (1)$$

其中, $h(x_1) = \frac{1}{2}(a-b)(|x_1+1| - |x_1-1|)$, p, a, b, q, γ 是参数. 由于 $h(x_1)$ 连续但不可微, 所以 Chua 电路是非光滑的.

通过广义哈密顿系统和观测器方法, 重新将系统(1)表示成^[13]

$$\begin{aligned}\dot{x} &= J(y) \frac{\partial H}{\partial x} + (I + S) \frac{\partial H}{\partial x} + F(y), \\ y &= C \frac{\partial H}{\partial x},\end{aligned}\quad (2)$$

其中 $x = (x_1, x_2, x_3)^T$, $H = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ 是能量函数, y 是系统的输出量, $c = [1, 0, 0]$,

$$\begin{aligned}J(y) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ I &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1-p}{2} & 0 \\ \frac{1-p}{2} & 0 & \frac{1+q}{2} \\ 0 & -\frac{1+q}{2} & 0 \end{bmatrix}, \\ S &= \begin{bmatrix} -p(b+1) & \frac{1+p}{2} & 0 \\ \frac{1+p}{2} & -1 & \frac{1-q}{2} \\ 0 & \frac{1-q}{2} & -\gamma \end{bmatrix}, \\ F(y) &= \begin{bmatrix} -ph(y) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

重新设计后系统(1)中的非光滑函数 $h(x_1)$ 被放在了 $F(y)$ 中.

此时, 系统(2)作为驱动系统. 若记 x 和 y 的估计值分别为 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$, η , 则相应的响应系统可以设计为

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= J(y) \frac{\partial H}{\partial \xi} + (I + S) \frac{\partial H}{\partial \xi} + F(y) + F_1, \\ \eta &= C \frac{\partial H}{\partial \xi},\end{aligned}\quad (3)$$

其中 $H = \frac{1}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)$, $F_1 = [\varphi(u), 0, 0]^T$; 而 $\varphi(u)$ 是一个非线性函数满足 $\varphi(0) = 0$; 存在正数 $\beta_1 > 0, \beta_2 > 0$, 有 $\varphi(u) \in [\beta_1, \beta_2] (\forall u \in R)$, 且

$$\beta_2 u^2(t) \geq \overline{u(t)} \varphi(u(t)) \geq \beta_1 u^2(t).$$

记 $e(t) = x(t) - \xi(t)$, $e_y = y - \eta$, 那么驱动系统(2)和响应系统(3)的误差系统就为

$$\begin{aligned}\dot{e} &= J(y) \frac{\partial H}{\partial e} + (I + S) \frac{\partial H}{\partial e} + F_1, \\ e_y &= C \frac{\partial H}{\partial e},\end{aligned}\quad (4)$$

$$\text{其中 } \frac{\partial H}{\partial e} = \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial \xi}.$$

由于 Chua 电路(1)中的非光滑函数是 $h(x_1)$, 重新设计后被放在方程(2)中的 $F(y)$ 中, 而相应的响应系统(3)也包含该函数, 因此相减后就抵消了, 得到的误差系统(4)除了包含非线性函数的 F_1 以外, 都是光滑的. 下面主要是设计控制器 u 使得系统(2)和(3)达到完全同步即通过选取合适的 u 使系统(4)的零解达到稳定.

3. 滑模面和控制器的设计

误差系统(4)的具体表达式为

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= p(e_2 - e_1 - be_1) + \varphi(u), \\ \dot{e}_2 &= e_1 - e_2 + e_3, \\ \dot{e}_3 &= -qe_2 - \gamma e_3.\end{aligned}\quad (5)$$

除非线性控制 $\varphi(u)$ 以外, 该系统是光滑的, 故可应用滑模控制理论通过对 $\varphi(u)$ 的设计使其零解达到稳定性. 而滑模控制主要包括滑模面和控制器的选取.

首先选择滑模面, 使得同步误差系统(5)的滑模运动在滑模面上是渐近稳定的. 令

$$s(t) = e_1 + \rho(t),\quad (6)$$

其中 $\dot{\rho}(t) = ke_1 + e_2$, $s(t) \in R, k > 0$. 当系统发生滑模运动时, 需满足^[14]

$$s(t) = 0,\quad (7)$$

和

$$\dot{s}(t) = 0.\quad (8)$$

由(8)式得 $\dot{e}_1 = -ke_1 - e_2$, 因此误差系统(5)为

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= -ke_1 - e_2, \\ \dot{e}_2 &= e_1 - e_2 + e_3, \\ \dot{e}_3 &= -qe_2 - \gamma e_3.\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}v(t) &= \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + \frac{1}{q}e_3^2) > 0, \\ ((e_1, e_2, e_3) \neq (0, 0, 0)),\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 + e_3 \dot{e}_3 \\ &= -ke_1^2 - e_2^2 - \gamma e_3^2 < 0. \end{aligned}$$

因此当受控系统滑模面上运动时是渐近稳定的.

其次对误差系统(5),设计控制器 u ,使其能够接近滑模面. 令

$$u = -\gamma_1 (|(p+1)e_2 + (k-p(b+1))e_1| + \delta) \text{sign}(s), \quad (9)$$

其中 $\gamma_1 > \frac{1}{\beta_1}, \delta > 0$. 令

$$v(t) = \frac{1}{2}s^2,$$

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= s\dot{s} = s(\dot{e}_1 + ke_1 + e_2) \\ &= s(pe_2 - p(b+1)e_1 + ke_1 + e_2) + s\varphi(u) \\ &\leq |s| (|(p+1)e_2 + (k-p(b+1))e_1| + \delta) + s\varphi(u) \\ &\leq -(\beta_1\gamma_1 - 1)|s| (|(p+1)e_2 + (k-p(b+1))e_1| + \delta). \end{aligned}$$

(由于 $u\varphi(u) \geq \beta_1 u^2$, 因此

$$\begin{aligned} s^2 u\varphi(u) &\geq \beta_1 u^2 s^2, \\ s^2 (-\gamma_1) (|(p+1)e_2 + (k-p(b+1))e_1| + \delta) \text{sign}(s)\varphi(u) &\geq \beta_1 (\gamma_1 (|(p+1)e_2 + (k-p(b+1))e_1| + \delta) \text{sign}(s))^2 s^2, \\ -s\varphi(u) &\geq \beta_1 \gamma_1 |s| (|(p+1)e_2 + (k-p(b+1))e_1| + \delta), \\ s\varphi(u) &\leq -\beta_1 \gamma_1 |s| (|(p+1)e_2 + (k-p(b+1))e_1| + \delta). \end{aligned}$$

令

$$w(t) = (\beta_1 \gamma_1 - 1) |s| (|(p+1)e_2 + (k-p(b+1))e_1| + \delta) \geq 0,$$

那么

$$v(0) \geq v(t) + \int_0^t w(\lambda) d\lambda \geq \int_0^t w(\lambda) d\lambda.$$

而 $v(0)$ 是非负数,有限;所以 $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t w(\lambda) d\lambda$ 存在,因此 $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0$. 但是 $(\beta_1 \gamma_1 - 1) > 0, (|(p+1)e_2 + (k-p(b+1))e_1| + \delta) \geq \delta > 0$, 所以 $s = 0$.

4. 数值仿真

为了验证该方法的正确性,我们选取具体的数

值进行模拟. 在文献[10]中指出当参数选取 $p = 10, q = 15, \gamma = 0.0385, a = -1.31, b = -0.75$ 时,系统(1)运动是混沌的,其相位图如图1所示.

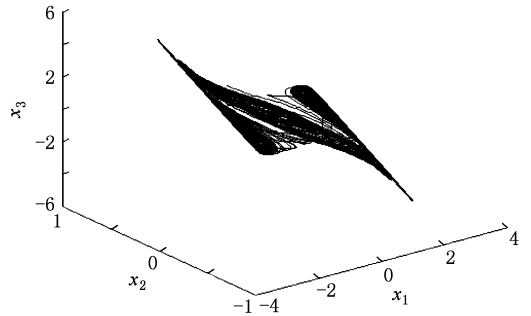


图1 Chua 电路的相位图

首先根据(6)式设计控制面

$$s(t) = e_1 + \rho(t),$$

其中 $\dot{\rho}(t) = ke_1 + e_2, k = 2, \rho(0) = 0$.

其次设计非线性控制函数

$$\varphi(u) = (0.7 + 0.4\sin(u))u,$$

而据(9)式

$$u = -\gamma_1 (|(p+1)e_2 + (k-p(b+1))e_1| + \delta) \text{sign}(s),$$

其中 $\beta_1 = 0.3, \beta_2 = 1.1, \gamma_1 = 5, \delta = 0.05$.

接下来研究驱动系统(2)和响应系统(3)的同步. 其状态变量的误差随时间变化的历程图如图2所示. 从图2可以看到同步误差很快趋于零,说明这两个系统非线性控制下,很快达到了同步.

5. 结 论

Chua 电路是一个非光滑的动力系统,一般来说不能将研究光滑系统同步的方法直接应用到该系统. 本文通过广义哈密顿系统和观测器方法将研究具有非线性控制的 Chua 电路的混沌同步问题转化成通过设计非线性控制使误差系统的零解达到稳定;进一步应用滑模控制的方法对该问题进行了研究. 数值结果也表明该方法的正确. 值得注意的是:

1. 本文虽然只对 Chua 电路进行了研究,实际上对类似的非光滑系统都可用该方法进行研究;只要按照方程(2)改写系统方程时,将非光滑部分放到 $F(y)$ 中,最终都可转化成相同的问题.

2. 本文只将 Chua 电路的第一个方程加上了非线性控制函数,实际上对所有的方程都加上非线性控制函数也可用类似的方法进行研究.

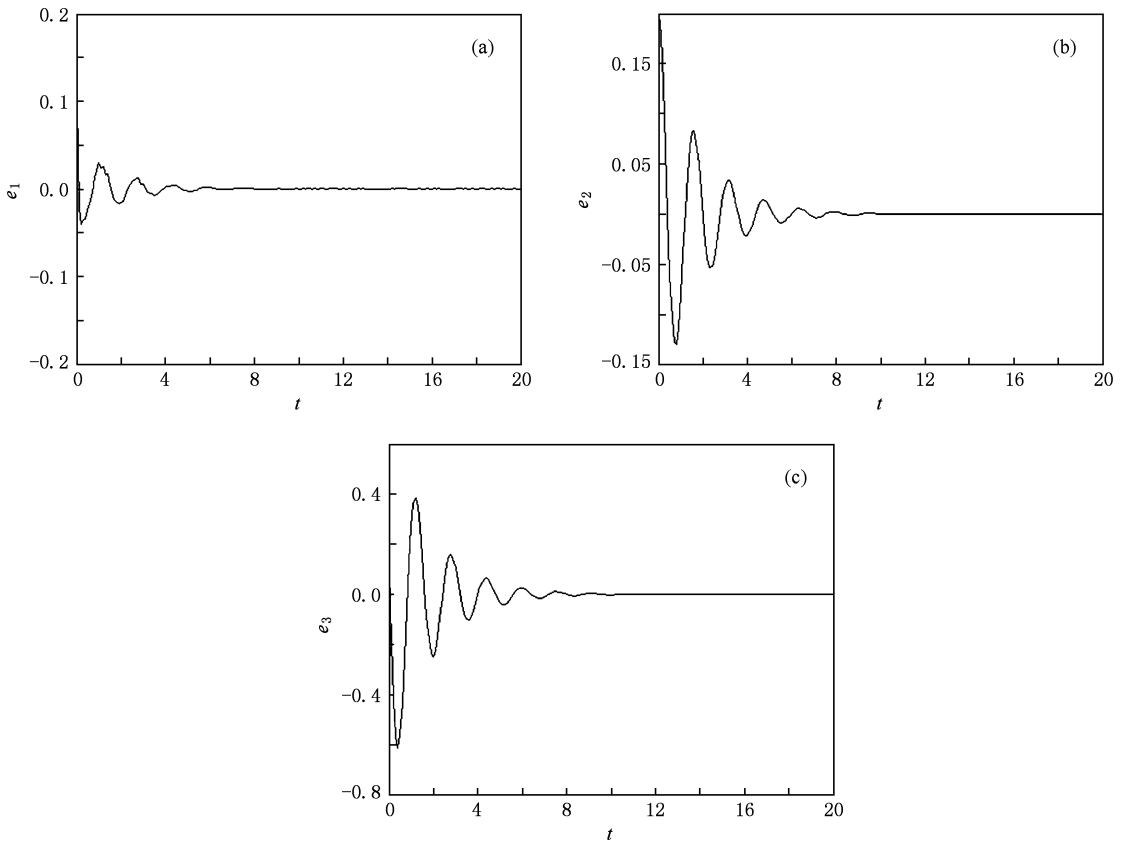


图2 系统(2)和(3)的同步误差的时间历程图 (a),(b),(c)分别为误差 e_1, e_2, e_3 的时间历程图

3. 在研究系统的同步时,一般转化成研究其线性化方程零解的稳定性问题;然而由于非光滑系统在非光滑点不可微,其 Jacobi 矩阵不存在,也就无法求其线性化方程.为此,本文应用了广义哈密顿系

统和观测器方法,避免了该问题.另外,本文对该系统采用了滑模控制,其他控制方式的应用也有待进一步研究.

[1] Boccaletti S, Kurths J, Osipov G, Valladares D L, Zhou C S 2002 *Phys. Rep.* **366** 1
 [2] Cai G L, Huang J J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3997 (in Chinese) [蔡国梁、黄娟娟 2006 物理学报 **55** 3997]
 [3] Wang X Y, Wu X J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 605 (in Chinese) [王兴元、武相军 2006 物理学报 **55** 605]
 [4] Cheng J F, Zhang R Y, Peng J H 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1589 (in Chinese) [陈菊芳、张入元、彭建华 2003 物理学报 **52** 1589]
 [5] Guan X P, He Y H, Fan Z P 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 276 (in Chinese) [关新平、何宴辉、范正平 2003 物理学报 **52** 276]
 [6] Yang T, Shao H H 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 742 (in Chinese) [杨涛、邵惠鹤 2002 物理学报 **51** 742]

[7] Gámez-Guzmán L, Cruz-Hernández C, López-Gutiérrez R M, García Guerrero E E 2009 *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* **14** 2765
 [8] Agiza H N, Matouk A E 2006 *Chaos, Solitons and Fract.* **28** 219
 [9] Li W L, Chen X Q 2009 *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* **14** 3100
 [10] Hu J, Chen S H, Chen L 2005 *Phys. Lett. A* **339** 455
 [11] Yan J J, Lin J S, Liao T L 2008 *Chaos, Solitons and Fract.* **36** 45
 [12] Li X C, Xu W, Xiao Y Z 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4721 (in Chinese) [李秀春、徐伟、肖玉柱 2008 物理学报 **57** 4721]
 [13] Sira-Ramírez H, Cruz H 2001 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **11** 1381
 [14] Liu D, Yan X M 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3747 (in Chinese) [刘丁、闫晓妹 2008 物理学报 **58** 3747]

Chaotic synchronization of Chua's circuits with nonlinear control^{*}

Fu Shi-Hui[†] Pei Li-Jun

(*Department of Mathematics, Zhengzhou University, Zhengzhou 450001, China*)

(Received 16 November 2009; revised manuscript received 24 December 2009)

Abstract

Chua's circuits are non-smooth systems. At first, by the generalized Hamiltonian system and observer approach, the problem of the chaotic synchronization of Chua's circuits with nonlinear control is transformed into that of the stability of zero solution of smooth error systems with nonlinear control. Then, the sliding mode control is applied to the error systems, which stabilizes their zero solutions, and the synchronization conditions are obtained. At last, the numerical results are shown to be in very good agreement with the theoretical analysis.

Keywords: Chua's circuit, chaotic synchronization, generalized Hamiltonian system, sliding mode control

PACC: 0547, 0545

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10702065 and 10672006).

[†] E-mail: fshtp@163.com