第 59 卷 第 9 期 2010 年 9 月
1000-3290/2010/59(09)/6697-09

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 59, No. 9, September, 2010
©2010 Chin. Phys. Soc.

基于不动点理论的多系统兼容接收机频点选择问题的研究与遗传算法实现*

宋 丹† 张晓林

(北京航空航天大学电子信息工程学院,北京 100191)

(2009 年 11 月 17 日收到;2010 年 4 月 22 日收到修改稿)

基于不动点理论研究了多系统兼容接收机的频点选择问题,并引入遗传算法解决了这一问题. 将 Banach 不动点理论引入频点空间,提出并证明了频点空间中频点集的遗传进化过程反映了频点空间呈现出的一种不动点物理特性;经过频点空间算子的足够多次的反复遗传进化作用,频点空间中的任一迭代序列源频点集都将最终收敛于唯一不动点目标频点集,而该不动点目标频点集中的目标频点即为该频点选择问题的最优解. 完成了遗传算法应用于频点选择问题的理论研究与实现. 仿真结果表明,该算法能够有效地解决多系统兼容接收机的频点选择问题.

关键词: 多系统,接收机,遗传算法,不动点

PACC: 9580D, 0365D

1. 引 言

目前,世界上各个全球导航卫星定位系统都处于发展或更新换代的阶段,只依靠单一的某个全球导航卫星定位系统来实现授时与定位,不论从国家安全的战略层面还是从系统可靠性的技术层面来考虑,都存在很大的安全隐患;因此,多系统兼容已经日渐成为一种降低风险、提高系统可靠性的有效手段及国际全球导航卫星定位产业的发展趋势[1,2].

对于多系统兼容接收机而言,涉及的频点数量众多,如果频点选择不利,容易导致各系统频点之间的交互调干扰严重,给接收机的系统设计带来极大的困难,对接收机各项性能指标的实现产生非常不利的影响. 因此,多系统兼容接收机的频点选择问题日渐突出,在多系统兼容接收机的系统设计中占有越来越重要的先决地位. 如何选择一套优良的频点,已经成为在多系统兼容接收机的系统设计中需要认真考虑的首要问题.

遗传算法(genetic algorithm, GA)是一种借鉴生物界自然选择(natural selection)和自然进化机理发展起来的高度并行、随机、自适应的搜索算法(random searching algorithms),借鉴了达尔文的进化论和孟德尔的遗传学说[3],是一种仿生算法,即模拟生命演化的算法.

许多传统的搜索方法都是单点搜索,对于多峰分布的搜索空间常常会得到所谓的"局部最优解". 而 GA 是同时处理群体中多个个体,同时对搜索空间中的多个解进行评估[4,5]. GA 具有较好的全局搜索性能[6,7],GA 本身易于实现并行化;GA 具有独特的算法形式和运行机理,以有限的代价解决复杂优化问题[8];GA 具有健壮性,特别适合于处理"正过程"已经明了[9]、复杂性高且搜索空间大[10]、非线性的多系统兼容接收机的频点选择问题.

如果将所有频点视为一个物理空间——频点空间,那么频点空间中的某一频点集就可视为一个种群,选择、交叉和变异的过程即是在频点空间中进行不同频点集之间的某种变换,通过某种频点空间算子使频点集不断进化,从源频点集最终映射到目标频点集,该目标频点集中的目标频点即为该频点选择问题的解.

* 国防科工委民用航天专项基金资助的课题.

† E-mail: buaasd@ee.buaa.edu.cn

2. 频点选择问题的分析

通常,确定一套优良的接收机频点需要考虑多方面的约束条件,经过大量的仿真实验才可以获得.以一种采用两级下变频结构的双系统兼容接收机为例,该接收机的拓扑结构如图 1 所示.

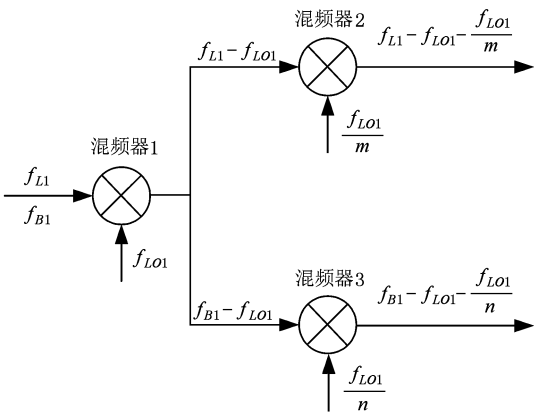

图 1 某两级下变频结构的双系统兼容接收机拓扑结构示意图

结合图 1,进行该双系统兼容接收机的频点选择时,通常需要考虑的几条主要约束条件如下,根据不同需求还可以进一步添加其他约束条件:

1)两路系统信号 L_1 和 B_1 的最终输出中频信号的频点 $f_{L1}-f_{LO1}-\frac{f_{LO1}}{m}$ 和 $f_{B1}-f_{LO1}-\frac{f_{LO1}}{n}$ 要尽可能地接近,使得中频输出信号的频点相对集中,以利于信号的后续处理,若使各路中频输出信号的频点之间最大频差不大于 1 MHz,则有

$$0 < \left|\left(f_{L1}-f_{LO1}-\frac{f_{LO1}}{m}\right) - \left(f_{B1}-f_{LO1}-\frac{f_{LO1}}{n}\right)\right| \leqslant 1\ \text{MHz}. \tag{1}$$

2)出于某些特殊需求的考虑,将系统的最终输出中频频点限定于某一范围 $[a,b]$ 内,即有

$$a \leqslant f_{L1}-f_{LO1}-\frac{f_{LO1}}{m} \leqslant b,$$
$$a \leqslant f_{B1}-f_{LO1}-\frac{f_{LO1}}{n} \leqslant b. \tag{2}$$

3)因为系统由两级下变频混频器组成,基于降低系统复杂度的考虑,应尽可能使第二级混频器的本振信号由第一级混频器的本振信号进行整数分频得到.若第一级混频器的本振信号的频点为 f_{LO1},则两个第二级混频器的本振信号的频点分别为 $\frac{f_{LO1}}{m}$ 和 $\frac{f_{LO1}}{n}$,其中 m 和 n 均为正整数.

基于降低硬件实现难度考虑,第一级混频器的本振信号的频点 f_{LO1} 取值范围也为正整数.

4)由于本振信号是整个系统内能量最大的信号,因此,本振信号的能量泄露对于系统内其他有用信号产生的影响也最大.基于考虑,系统内所有本振信号的 K 阶以下交互调分量信号 Y 均不能落在第一级混频器输出的第一级中频输出信号频带内,且要尽量远离该第一级中频输出信号的频点.

若信号 L_1 的第一级中频输出信号带宽为 1 MHz,信号 B_1 的第一级中频输出信号带宽为 2 MHz;所有本振信号的 K 阶以下交互调分量 $Y=M\times\frac{f_{LO1}}{m}+N\times\frac{f_{LO1}}{n}+P\times f_{LO1}$,其中 M,N 和 P 分别为信号 L_1 通路内的第二级混频器的本振信号 $\frac{f_{LO1}}{m}$ 的谐波次数、信号 B_1 通路内的第二级混频器的本振信号 $\frac{f_{LO1}}{n}$ 的谐波次数以及第一级混频器的本振信号 f_{LO1} 的谐波次数,且 $3\leqslant|M|+|N|+|P|\leqslant K$,$K$ 通常的取值范围是 $3\leqslant K\leqslant 30$;则,当满足

$$y_{L1} = |Y-(f_{L1}-f_{LO1})| > 1,$$
$$y_{B1} = |Y-(f_{B1}-f_{LO1})| > 2 \tag{3}$$

时,有目标函数

$$f_1(f_{LO1},m,n) = \max(y_{L1}),$$
$$f_2(f_{LO1},m,n) = \max(y_{B1}). \tag{4}$$

(4)式所示为一个多目标优化问题,基于降低问题复杂度的考虑,结合对(4)式中所示两个函数的性质的分析,引入权重系数 ω_{L1},ω_{B1},将(4)式转化为一个单目标优化问题

$$f(f_{LO1},m,n) = \max(\omega_{L1}y_{L1}+\omega_{B1}y_{B1}),$$
$$\omega_{L1},\omega_{B1} > 0 \text{ 且 } \omega_{L1}+\omega_{B1} = 1, \tag{5}$$

式中,y_{L1} 是交互调分量 Y 与信号 L_1 通路内的第一级中频输出信号的频点 $f_{L1}-f_{LO1}$ 的频点间距,y_{B1} 是交互调分量 Y 与信号 B_1 通路内的第一级中频输出信号的频点 $f_{B1}-f_{LO1}$ 的频点间距;ω_{L1},ω_{B1} 为权重系数.

综上所述,该双系统兼容接收机的频点选择问题最终转化为(5)式所示的多元多峰目标函数的优化问题.

传统的解决优化问题的方法主要有解析法、随机法和穷举法.解析法对问题性质有较高的要求,属于强方法(strong methods),对于目标函数表现为

非连续或非处处可微、非凸、多峰和带噪声等各种形式的复杂优化问题不适合于采用解析法. 随机法是在问题空间中随机选择一定数量的点后从中择优,带有一定的盲目性,对于复杂问题不能保证解的质量,即不能保证一定能得到问题的最优解. 穷举法是一种解空间的遍历搜索方法,虽然可以找到问题的全局最优解,但是计算效率太低(存在维数灾难),不适用于计算量较大的优化问题.

而 GA 是一种典型的弱方法(weak method)[11,12],具有独特的算法形式和运行机理,以有限的代价解决复杂的优化问题. 对于双系统兼容接收机的频点选择这类多元多峰目标函数的优化问题,GA 采用概率搜索技术,直接以目标函数值作为搜索信息,以频点字符串作为运算对象,同时处理频点集中的多个频点,即同时对多个频点的适应度进行评价,确保得到全局最优解. 因此,GA 具有健壮性,适合于处理复杂、非线性的多系统兼容接收机的频点选择问题.

3. GA 应用于频点选择问题的理论研究

基于上述对频点选择问题的分析,将 GA 应用到多系统兼容接收机的频点选择问题中,将所有频点视为一个频点空间,其中的某一频点集视为一个种群,通过某种频点空间算子的反复作用,不断遗传进化,从源频点集最终映射到目标频点集,其中的目标频点即为该频点选择问题的解. 频点集遗传进化的过程反映了频点空间呈现出的一种不动点物理特性,在对这种物理特性进行论述之前,首先对涉及到的一些物理量及物理过程定义如下:

定义 1(频点、频点分量和频点空间)　将长度为 l 的 0 和 1 组成的字符串称为 l 频点 X,简称频点;字符串中的每一位称为频点分量;l 是频点的链长;$E=\{0,1\}^l$ 是 l 频点的全体,即为频点空间 E.

定义 2(频点集和频点集规模)　将 N 个频点组成的集合称为 N 频点集,简称频点集,记为 $\boldsymbol{X}$,频点集 $\boldsymbol{X}$ 中允许重复频点的存在;N 为频点集规模.

定义 3(频点适应度函数)　由一组频点集产生的效益称为频点适应度,频点适应度函数 F 是频点空间 E 到正实数空间 R^+ 的映射.

定义 4(频点选择算子)　频点选择算子是在一个频点集 $\boldsymbol{X}$ 中按照概率规则选择一个频点 X_i 的过程,记为 T_s.

定义 5(频点交叉算子)　频点交叉算子是母体频点集到子代频点集的映射,即母体频点集中的频点依据频点交叉概率 p_c 经过两两交叉构成子代频点集中的新频点的过程,记作 T_c.

定义 6(频点变异算子)　频点变异算子是频点空间到频点空间的随机映射,即独立地以频点变异概率 p_m 改变频点空间 E 中频点的频点分量取值的过程,记作 T_m.

定义 7(频点空间算子)　频点空间算子 $T:E\rightarrow E$,即 $T\boldsymbol{X}_S\rightarrow\boldsymbol{X}_D$,其中 $\boldsymbol{X}_S,\boldsymbol{X}_D\in E$.

结合上述频点选择算子 T_s、频点交叉算子 T_c 和频点变异算子 T_m 可知:频点空间 E 的频点空间算子 $T=T_m\circ T_c\circ T_s$.

下面对频点空间体现出的不动点物理特性论述如下:

定理 1(频点线性空间定理)　对于一个物理频点空间,通过频点空间算子使其中的某一频点集不断进化,相当于在频点空间中进行不同频点集之间的某种物理变换,如果将某一频点集根据频点空间算子进化成某一新频点集的过程视为频点集进化的方向,那么频点集就是向量. 则存在频点线性空间 E,其中的每一频点集都是该频点线性空间 E 的元素.

证明　由于频点空间 E 中的每一频点集都可以看作是一个向量,那么对任意组频点集求向量和或把频点集中的频点增加或减少实数倍,就可以得到频点空间中的新频点集. 因此,频点空间近似满足向量加法以及向量与标量(实数域元素)的乘法两种运算,所以可以认为频点空间 E 是线性向量空间.

由定理 1 可知,线性向量空间 E 中的这两个规模均为 N 的频点集 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 均可视为向量,则向量 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 之间的度量是 $D(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}|$,其中 $D\in R$. 如图 2 所示,度量 D 体现为 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 的向量差的模,即存在一个频点空间 E 到实数集 R 的映射关系 $D(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}|$.

该频点空间 E 还体现出如下特性:

定理 2(频点度量空间定理)　对于频点空间 E 中任意两个规模均为 N 的频点集 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\in E$ 有 $D(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}|$,其中 $D\in R$. D 为频点集 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 之间的度量,则频点空间(E,D)是度量空间,简称频点空间 E.

证明　若频点空间 E 满足度量三公理,则可证

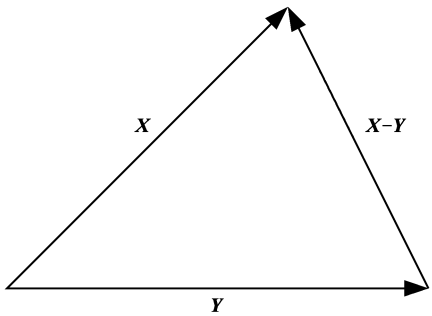

图 2 频点集 $\boldsymbol{X}$ 与频点集 $\boldsymbol{Y}$ 的度量示意图

明频点空间 E 是度量空间.

1) $D(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = |\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}| \geqslant 0$ 显然成立.

当且仅当两个频点集 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 完全相同时,即当图 2 中的向量 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 完全重合时,有 $D(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = |\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}| = 0$.

2) 由图 2 可知

$$D(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = |\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}| = |\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X}| = D(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X}).$$

3) 为图示清晰起见,图 3 中的向量频点集 $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{Z}$ 均用虚线箭头表示,则向量差 $\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Z}$ 与 $\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{Y}$ 组成了一个向量三角形(如图 3 中的实线箭头所示). 由向量的三角不等式(triangle inequality)可知 $|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}| \leqslant |\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Z}| + |\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{Y}|$,即

$$\begin{aligned} D(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) &= |\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}| \leqslant |\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Z}| + |\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{Y}| \\ &= D(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Z}) + D(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{Y}) \\ &\quad \forall \boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z} \in E. \end{aligned}$$

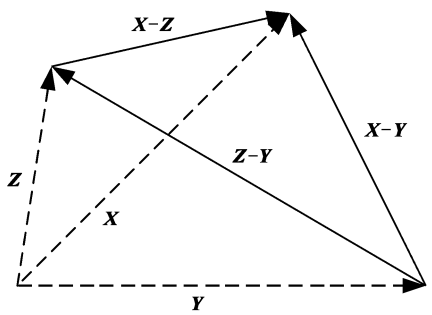

图 3 频点集 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}$ 之间的度量示意图

由上述证明可知,频点空间 E 满足度量三公理,因此,频点空间 E 是一个度量空间.

定理 3(频点赋范空间定理) 在频点向量空间 E 中定义范数

$$\|\boldsymbol{X}\| = \begin{cases} \|F(\boldsymbol{X},k)\| = \left(\sum_{k=1}^{N} |X_k|^2\right)^{1/2}, (\boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{\Phi}) \\ 0, \quad (\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\Phi}), \end{cases}$$

其中任一频点集 $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_N)$,则频点向量空间 E 是线性赋范空间,简称赋范空间.

证明 频点赋范空间具有以下三条范数性质:

1) 范数的第一条性质

$$\|\boldsymbol{X}\| = \left(\sum_{k=1}^{N} |X_k|^2\right)^{1/2} > 0,$$

$$\text{且 } \|\boldsymbol{X}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{X} = \boldsymbol{\Phi}.$$

在频点空间中,只有当频点集为空集时,频点集的范数才为零;否则频点集的范数都是正实数.

2) 范数的第二条性质,对于 $\forall \alpha \in R$,有

$$\begin{aligned} \|\alpha\boldsymbol{X}\| &= \left\|\left(\sum_{k=1}^{N} |\alpha X_k|^2\right)^{1/2}\right\| \\ &= \left\| |\alpha| \left(\sum_{k=1}^{N} |X_k|^2\right)^{1/2}\right\| \\ &= |\alpha| \left\|\left(\sum_{k=1}^{N} |X_k|^2\right)^{1/2}\right\| = |\alpha| \|\boldsymbol{X}\|. \end{aligned}$$

在频点空间 E 中,由于频点集 $\boldsymbol{X}$ 中允许重复频点的存在,所以由 α 个相同的频点集 $\boldsymbol{X}$ 所组成的新频点集的范数等于频点集 $\boldsymbol{X}$ 的范数的 $|\alpha|$ 倍.

3) 范数的第三条性质:

$$\|\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}\| \leqslant \|\boldsymbol{X}\| + \|\boldsymbol{Y}\|.$$

$$\because \sum_{\substack{k,r=1 \\ \text{且} k \neq r}}^{N} |X_k Y_r - X_r Y_k|^2 \geqslant 0,$$

$$\therefore \sum_{\substack{k,r=1 \\ \text{且} k \neq r}}^{N} (X_k Y_r)^2 \geqslant 2 \times \sum_{\substack{k,r=1 \\ \text{且} k \neq r}}^{N} X_k X_r Y_k Y_r,$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{N} |X_k|^2 \times \sum_{k=1}^{N} |Y_k|^2 \geqslant \left(\sum_{k=1}^{N} X_k Y_k\right)^2.$$

可得

$$\left(\sum_{k=1}^{N} |X_k|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{N} |Y_k|^2\right)^{1/2} \geqslant \left(\sum_{k=1}^{N} |X_k + Y_k|^2\right)^{1/2}.$$

而根据频点向量空间 E 中范数的定义可得

$$\|\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}\| = \left(\sum_{k=1}^{N} |X_k + Y_k|^2\right)^{1/2},$$

$$\|\boldsymbol{X}\| + \|\boldsymbol{Y}\| = \left(\sum_{k=1}^{N} |X_k|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{N} |Y_k|^2\right)^{1/2}.$$

所以,可得证: $\|\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}\| \leqslant \|\boldsymbol{X}\| + \|\boldsymbol{Y}\|$. 对于频点空间中的任意两个频点集 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$,这两个频点集的向量和的范数不大于这两个频点集的范数的和. 由上述证明可知,频点空间 E 是一个频点赋范空间, $\|\boldsymbol{X}\|$ 在一定程度上体现了频点集 $\boldsymbol{X}$ 规模的大小.

定理 4(频点 Banach 空间定理) 现实中的频点空间 E 都是由有限个频点集组成的,而由有限个频点集组成的频点赋范空间 E 都是完备的,完备的线性赋范空间为 Banach 空间,则可知频点赋范空间

E 是频点 Banach 空间.

根据 Banach 空间的定义可知:若频点空间 E 中的每个柯西列都收敛,则频点空间 E 是完备的. 下面证明频点空间 E 中的每个柯西列都收敛.

证明　对于频点赋范空间 E,存在线性无关的 l 个频点集 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_l\in E$,记为 $\dim E=l$,$\{\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_l\}$. 则频点赋范空间 E 中的任一柯西列 $\boldsymbol{X}_m$ 可以表示为

$$\boldsymbol{X}_m=\alpha_1^{(m)}\boldsymbol{X}_1+\alpha_2^{(m)}\boldsymbol{X}_2+\cdots+\alpha_l^{(m)}\boldsymbol{X}_l,$$
$$\forall\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l\in R.$$

则根据线性组合(linear combinations)引理[13]可得,$\exists c>0$,有 $\|\boldsymbol{X}_m\|=\|\alpha_1\boldsymbol{X}_1+\alpha_2\boldsymbol{X}_2+\cdots+\alpha_l\boldsymbol{X}_l\|\geqslant c(|\alpha_1|+|\alpha_2|+\cdots+|\alpha_l|)$,即

$$\left\|\sum_{i=1}^{l}\alpha_i\boldsymbol{X}_i\right\|\geqslant c\sum_{i=1}^{l}|\alpha_i|. \tag{6}$$

因为 $\boldsymbol{X}_m$ 是柯西列,则 $\forall\varepsilon>0$,都 $\exists N$ 使当 $m,n\geqslant N$ 时,就有 $\|\boldsymbol{X}_m-\boldsymbol{X}_n\|<\varepsilon$,则根据上述不等式(6)可得

$$\begin{aligned}\varepsilon&>\|\boldsymbol{X}_m-\boldsymbol{X}_n\|\\&=\|(\alpha_1^{(m)}\boldsymbol{X}_1+\alpha_2^{(m)}\boldsymbol{X}_2+\cdots+\alpha_l^{(m)}\boldsymbol{X}_l)\\&\quad-(\alpha_1^{(n)}\boldsymbol{X}_1+\alpha_2^{(n)}\boldsymbol{X}_2+\cdots+\alpha_l^{(n)}\boldsymbol{X}_l)\|\\&=\left\|\sum_{i=1}^{l}(\alpha_i^{(m)}-\alpha_i^{(n)})\boldsymbol{X}_i\right\|\\&\geqslant c\sum_{i=1}^{l}|\alpha_i^{(m)}-\alpha_i^{(n)}|.\end{aligned} \tag{7}$$

则可得 $\dfrac{\varepsilon}{c}>\sum_{i=1}^{l}|\alpha_i^{(m)}-\alpha_i^{(n)}|\geqslant|\alpha_i^{(m)}-\alpha_i^{(n)}|$.

根据柯西列定义可知以下 l 个序列都是实数中的柯西列:

$$(\alpha_i^{(m)})=(\alpha_i^{(1)},\alpha_i^{(2)},\cdots),\text{其中 } i=1,\cdots,l.$$

因此上述 l 个序列都是收敛的,记作 $\alpha_i=\lim_{m\to\infty}|\alpha_i^{(m)}|$,则用上述 l 个序列的极限 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l$ 定义极限频点集,即目标频点集 $\boldsymbol{X}_D$,

$$\boldsymbol{X}_D=\alpha_1\boldsymbol{X}_1+\alpha_2\boldsymbol{X}_2+\cdots+\alpha_l\boldsymbol{X}_l,$$

即 l 个频点集通过频点空间算子不断遗传进化,最终进化成目标频点集 $\boldsymbol{X}_{\mathrm{D}}$,且 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_l,\boldsymbol{X}_{\mathrm{D}}\in E$.

因此根据不等式(7)有

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{X}_m-\boldsymbol{X}_{\mathrm{D}}\|&=\|(\alpha_1^{(m)}\boldsymbol{X}_1+\alpha_2^{(m)}\boldsymbol{X}_2+\cdots+\alpha_l^{(m)}\boldsymbol{X}_l)\\&\quad-(\alpha_1\boldsymbol{X}_1+\alpha_2\boldsymbol{X}_2+\cdots+\alpha_l\boldsymbol{X}_l)\|\\&=\left\|\sum_{i=1}^{l}(\alpha_i^{(m)}-\alpha_i)\boldsymbol{X}_i\right\|\\&\leqslant\sum_{i=1}^{l}|\alpha_i^{(m)}-\alpha_i|\,\|\boldsymbol{X}_i\|.\end{aligned} \tag{8}$$

由于不等式(8)右侧的 $\alpha_i^{(m)}\to\alpha_i$,所以不等式(8)左边的 $\|\boldsymbol{X}_m-\boldsymbol{X}_{\mathrm{D}}\|\to0$,即 $\boldsymbol{X}_m\to\boldsymbol{X}_{\mathrm{D}}$. 从而得证频点赋范空间 E 中的任一柯西列 $\boldsymbol{X}_m$ 在频点赋范空间 E 中收敛于目标频点集 $\boldsymbol{X}_{\mathrm{D}}$,则根据 Banach 空间定义可知:频点赋范空间 E 是完备的. 而完备的线性频点赋范空间 E 必是 Banach 空间.

根据频点空间算子 T 的定义,即频点空间算子 T 在频点空间 E 的源频点集 $\boldsymbol{X}_{\mathrm{S}}$ 与目标频点集 $\boldsymbol{X}_{\mathrm{D}}$ 之间建立了映射关系,频点空间算子 T 使频点空间 E 中的源频点集 $\boldsymbol{X}_{\mathrm{S}}$ 不断遗传进化为更接近目标频点集 $\boldsymbol{X}_{\mathrm{D}}$ 的新频点集 $\boldsymbol{X}_{\mathrm{S}}^{(g)}$(其中 g 代表遗传进化的代数).

源频点集的建立具有一定的随机性,对于任选的两个源频点集 $\boldsymbol{X}_{\mathrm{S}}$ 和 $\boldsymbol{Y}_{\mathrm{S}}$,若经过频点空间算子 T 遗传进化相同的代数 g,得到两个新频点集 $\boldsymbol{X}_{\mathrm{S}}^{(g)}$ 和 $\boldsymbol{Y}_{\mathrm{S}}^{(g)}$;这两个新频点集 $\boldsymbol{X}_{\mathrm{S}}^{(g)}$ 和 $\boldsymbol{Y}_{\mathrm{S}}^{(g)}$ 都更加接近于目标频点集 $\boldsymbol{X}_{\mathrm{D}}$,这两个新频点集 $\boldsymbol{X}_{\mathrm{S}}^{(g)}$ 和 $\boldsymbol{Y}_{\mathrm{S}}^{(g)}$ 之间的度量变小,即 $\exists 0<\alpha<1$ 使得

$$\begin{aligned}D(T\boldsymbol{X}_{\mathrm{S}},T\boldsymbol{Y}_{\mathrm{S}})&=|\boldsymbol{X}_{\mathrm{S}}^{(g)}-\boldsymbol{Y}_{\mathrm{S}}^{(g)}|\leqslant\alpha|\boldsymbol{X}_{\mathrm{S}}-\boldsymbol{Y}_{\mathrm{S}}|\\&=\alpha D(\boldsymbol{X}_{\mathrm{S}},\boldsymbol{Y}_{\mathrm{S}}).\end{aligned} \tag{9}$$

由(9)式可见,频点空间算子 T 是频点空间 E 中的第(1)类的压缩型映象,α 为压缩系数.

定理 5(频点空间不动点定理)　根据 Banach 压缩映象原理[14]可知:频点空间算子 T 在频点 Banach 空间 E 中存在唯一不动点目标频点集 $\boldsymbol{X}_{\mathrm{D}}$,对于该频点 Banach 空间 E 中的任一迭代序列源频点集 $\boldsymbol{X}_{\mathrm{S}}$,经过频点空间算子 T 的足够多次的反复遗传进化作用都将最终收敛于该不动点目标频点集 $\boldsymbol{X}_{\mathrm{D}}$,其中的目标频点 X_{d} 即为频点选择问题的最优解.

证明　根据 Banach 压缩映像原理[14]可得到如下结论:

$$D(T^g\boldsymbol{X}_{\mathrm{S}},\boldsymbol{X}_{\mathrm{D}})\leqslant\frac{\alpha^g}{1-\alpha}D(T\boldsymbol{X}_{\mathrm{S}},\boldsymbol{X}_{\mathrm{S}}),$$
$$g=1,2,\cdots. \tag{10}$$

由(10)式可知,只要 g 充分大,$D(T^g\boldsymbol{X}_{\mathrm{S}},\boldsymbol{X}_{\mathrm{D}})$ 就可以任意小,即只要遗传进化的代数 g 足够多,经过频点空间算子 T 的反复作用 T^g,就有 $|T^g\boldsymbol{X}_{\mathrm{S}}-\boldsymbol{X}_{\mathrm{D}}|<\varepsilon$,$\forall\varepsilon>0$,则 $T^g\boldsymbol{X}_{\mathrm{S}}\to\boldsymbol{X}_{\mathrm{D}}$,即源频点集 $\boldsymbol{X}_{\mathrm{S}}$ 经过频点空间算子 T 的反复作用 T^g 最终收敛于不动点目标频点集 $\boldsymbol{X}_{\mathrm{D}}$,有 $T\boldsymbol{X}_{\mathrm{D}}=\boldsymbol{X}_{\mathrm{D}}$.

证明该不动点目标频点集 $\boldsymbol{X}_{\mathrm{D}}$ 的唯一性:若存在两个不动点目标频点集 $T\boldsymbol{X}_{\mathrm{D1}}=\boldsymbol{X}_{\mathrm{D1}}$ 和 $T\boldsymbol{X}_{\mathrm{D2}}=\boldsymbol{X}_{\mathrm{D2}}$,

则根据(9)式有

$$D(\boldsymbol{X}_{D1},\boldsymbol{X}_{D2}) = D(T\boldsymbol{X}_{D1},T\boldsymbol{X}_{D2}) \leqslant \alpha D(\boldsymbol{X}_{D1},\boldsymbol{X}_{D2}).$$

因为 $0<\alpha<1$,可知 $D(\boldsymbol{X}_{D1},\boldsymbol{X}_{D2})=0$,所以 $\boldsymbol{X}_{D1}=\boldsymbol{X}_{D2}$,即该不动点目标频点集 $\boldsymbol{X}_{D}$ 具有唯一性.

4. GA 应用于频点选择问题的实现

4.1. 参数编码

本文采用格雷码(Gray Code)对频点进行编码.假设频点字符串的长度为 l,则该字符串对应的无符号整数范围是 $[0,2^{l}-1]$;假设频点参数的取值范围为 $[f_{LO1_min},f_{LO1_max}]$,则编码精度为

$$\Delta = \frac{f_{LO1_max}-f_{LO1_min}}{2^{l}-1}.$$

4.2. 频点适应度函数

频点适应度函数的设计要结合频点选择问题的目标函数而定.结合(5)式,此处的频点适应度函数定义为

$$F = C_{\min} + f(f_{LO1},m,n), \tag{11}$$

式中,$C_{\min}$ 为合适的常数输入值,是 $f(f_{LO1},m,n)$ 的最小值估计,目的是使频点适应度函数为正值.F 值越大,表明所对应的频点在 GA 中越能达到或越有助于找到最优频点.经分析计算可知,(5)式中 $\omega_{L1}=\omega_{B1}=0.5$;由于(5)式所示目标函数为正值,则(11)式中的 $C_{\min}$ 可取为 0.

4.3. 频点选择算子

频点选择算子是根据频点的适应度大小在已知频点集中选择一定数量频点的过程,本文采用随机遍历抽样和频点比例选择算子.

4.4. 频点交叉算子

频点交叉算子是按照给定的概率从频点集中选择一对频点,交换这两个频点所对应字符串的某个或某些频点分量,而产生后代新频点的过程.本文采用单点交叉算子.

4.5. 频点变异算子

频点选择问题的变异算子是指将频点所对应字符串中的某些频点分量用该频点分量的其他取值来替换,从而形成一个新频点的过程.

4.6. 频点选择问题的终止条件

如果经过若干代进化后,频点适应度稳定,或达到了最大遗传进化代数,则终止运算,输出结果;否则,继续进行遗传进化.

综上所述,仿真时的 GA 流程如图 4 所示.

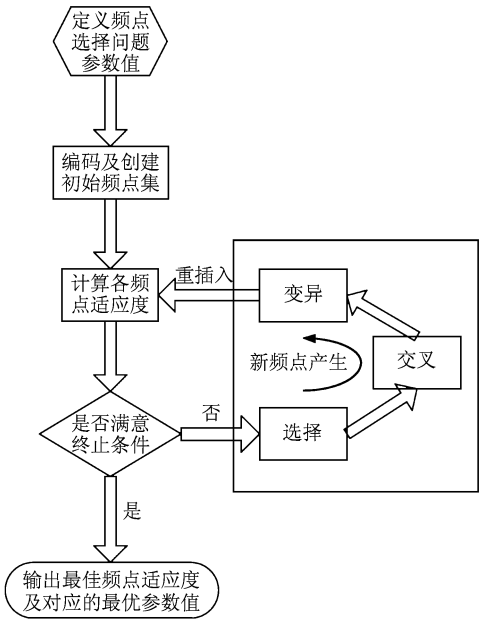

图 4 频点选择问题 GA 流程

当 GA 应用于本文所述的多系统兼容接收机频点选择问题时,若参数设置如表 1 所示,那么,经过 200 代遗传进化后最佳频点适应度及平均频点适应度的仿真结果如图 5 所示.

表 1 GA 参数表

参数	参数值

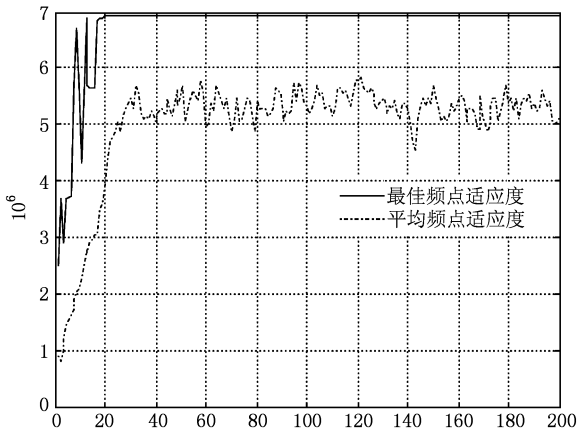

图 5 经过 200 代遗传进化后最佳频点适应度及平均频点适应度

频点集规模	50
最大进化代数	200
编码方式	格雷码
代沟	0.9
交叉概率	0.7
变异概率	0.01

由图 5 可知,经过 20 代遗传进化后,最佳频点适应度趋于稳定. 从图 6(a)可见,初始频点集的频点分布具有很大的随机性,因此初始频点集的频点适应度函数值分布图呈现很大的随机性,比较图 6(b),(c)以及(d)可见,随着遗传进化代数的增加,频点集的频点适应度函数值的分布逐渐收敛,这一特点随着遗传进化代数的增加而愈发显著. 从图 6(d)可见,由于较高的频点交叉概率 $p_c = 0.7$ 和频点变异概率 $p_m = 0.01$,趋于稳定的频点适应度函数值分布中仍时有适应度相差很大的频点出现,但并不会影响最终选取的频点最优解. 如图 7(a)所示,当频点变异概率降为 $p_m = 0.001$ 时,会明显降低适应度相差很大的频点出现的概率,即频点集的频点适应度函数值分布的收敛性明显提高;但会对收敛速度造成一定的影响,如图 7(b)所示:与图 5 中的最佳频点适应度曲线相比,图 7(b)中的最佳频点适应度曲线的收敛速度明显降低,大约 90 代以后才趋于稳定.

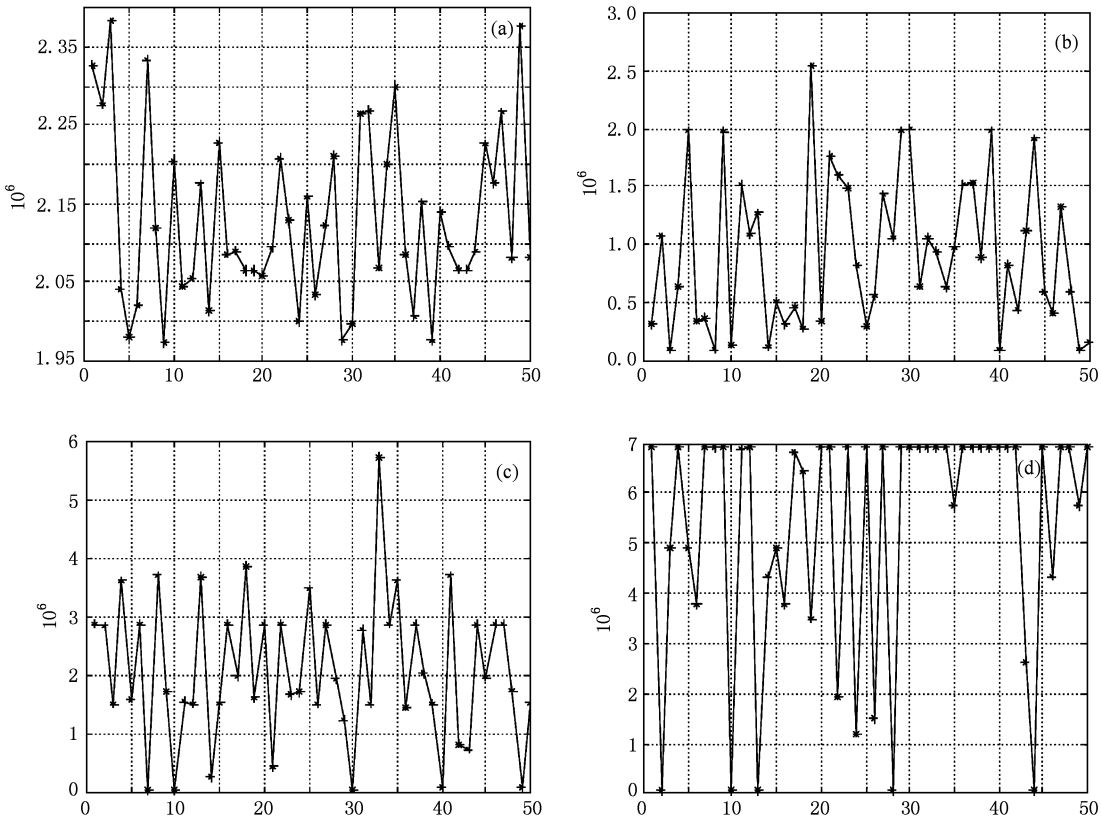

图 6　频点适应度函数值分布图　(a)初始频点集;(b)经过 1 次遗传进化;(c)经过 10 次遗传进化;(d)经过 100 次遗传进化

本文所述方法适用于双系统兼容接收机(GPS/BD)、三系统兼容接收机(GPS/BD/GLONASS 或 GPS/BD/Galileo)、四系统兼容接收机(GPS/BD/GLONASS/Galileo)等多系统兼容接收机的频点选择问题的研究. 随着系统数量的增加,涉及的约束条件将随之增多,导致问题的复杂程度大幅增加,相比于传统的频点选择方法,本文所述方法的优势将得到更加明显的体现;随着频点空间规模及频点集规模的进一步扩大,频点空间的不动点物理特性也将得到更加深刻的显现.

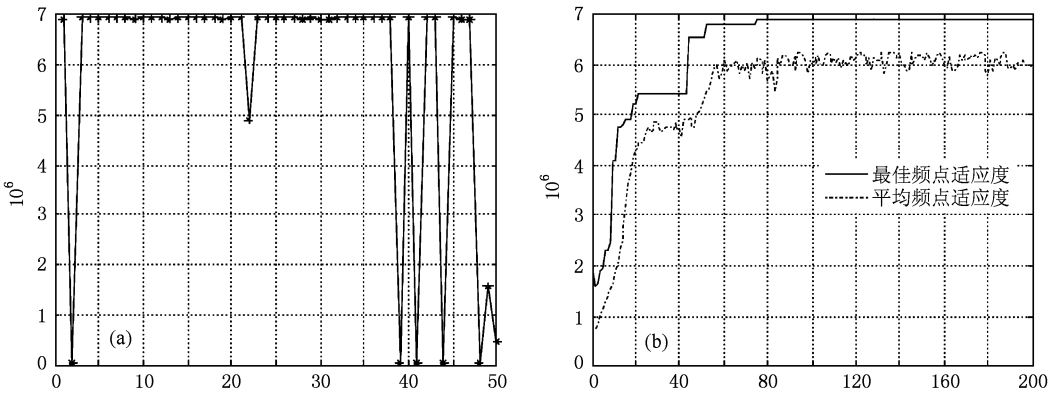

图 7 $p_m = 0.001$ 时的遗传进化结果图 (a) 经过 100 次遗传进化的频点适应度函数值分布图;(b) 经过 200 代遗传进化后最佳频点适应度及平均频点适应度

5. 结 论

研究了多系统兼容接收机系统设计中的频点选择问题,引入 Banach 不动点理论,从理论上揭示并证明了频点空间所体现出的不动点物理特性. 从该频点空间的不动点物理特性的论述可知,频点空间中的任一迭代序列源频点集,经过频点空间算子的足够多次的反复遗传进化作用都将最终收敛于唯一不动点目标频点集,而该目标频点集中的目标频点即为该频点选择问题的最优解. 最后,以频点空间的不动点物理特性为理论基础,从实践的角度再次印证了频点空间的不动点物理特性.

从频点空间的不动点特性出发,随着研究的深入和拓展,还可以更好地从频域角度理解系统的性能指标以及系统干扰等问题,进而有助于应对策略的研究与提出,有助于系统设计性能的进一步提升.

[1] Kovar P, Vejrazka F 2008 17*th IEEE/ION Position, Location and Navigation Symposium* Monterey, California, May 5—8, 2008 p860

[2] Liu F, Tian M H 2009 2*nd International Conference on Intelligent Computation Technology and Automation* Zhangjiajie, China, October 10—11, 2009 p911

[3] Bagheri E, Deldari H 2006 11*th IEEE Symposium on Computers and Communications* Pula-Cagliari, Sardinia, Italy, June 26—29, 2006 p675

[4] Manocha A, Sharma A 2009 *IEEE International Advance Computing Conference* Patiala, India, March 6—7, 2009 p171

[5] Murphy L, Abdel—Aty-Zohdy H S, Hashem-Sherif M 2005 48*th Midwest Symposium on Circuits and Systems* Cincinnati, Ohio, August 7-10, 2005 p1729

[6] Li J, Jing B, Yang Y X 2009 *Acta Electronica Sinica* **37** 1037 (in Chinese) [李剑、景博、杨义先 2009 电子学报 **37** 1037]

[7] Gao G, Zhou D F, Zhang J, Huang J J, Li D R 2008 *Acta Electronica Sinica* **36** 1041 (in Chinese) [高贵、周蝶飞、张军、黄纪军、李德仁 2009 电子学报 **36** 1041]

[8] Zhang W J, Liu Q 2009 9*th International Conference on Hybrid Intelligent Systems* Shenyang, LiaoNing, China, August 12—14, 2009 p511

[9] Xu Z J, Nie Q M, Li P H 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2878 (in Chinese) [徐志君、聂青苗、李鹏华 2009 物理学报 **58** 2878]

[10] Li J L, Lü B D 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 3006 (in Chinese) [李建龙、吕百达 2008 物理学报 **57** 3006]

[11] Forrest S, Hofmeyr S, Somayaji A 2008 24*th Annual Computer Security Applications Conference* Anaheim, California, December 8—12, 2008 p418

[12] Harper R, Blair A 2006 8*th IEEE Congress on Evolutionary Computation* (*CEC* 2006) Vancouver, Canada, July 16—21, 2006 p2638

[13] Erwin Kreyszig 1978 *Introductory functional analysis with applications* 1*st* Edition (New York: John Wiley & Sons. Inc.) p72

[14] Zhang S S 1984 *Fixed Point Theory and applications* 1st Edition (Chongqing: Chongqing Press) p8—9 (in Chinese) [张石生 1984 不动点理论及应用 第一版(重庆:重庆出版社) 第 8—9 页]

Study of the multi-system compatible receiver's frequency selection problem based on fixed point theory and its genetic algorithm realization*

Song Dan† Zhang Xiao-Lin

(*School of Electronic and Information Engineering*, *Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, *Beijing* 100191, *China*)

(Received 17 November 2009; revised manuscript received 22 April 2010)

Abstract

The problem of multi-system compatible receiver's frequency selection is studied based on fixed point theory, and genetic algorithm is applied to resolve the problem. In the frequency space Banach fixed point theory was used to explain the fixed point physical property, which is presented through the evolution of the frequency set in the frequency space. By adequate reciprocal action of the frequency space operator any iterative sequence source frequency set in the frequency space will finally converge to the unique fixed-point object frequency set, the object frequencies of which are the frequency selection problem's optimal solution. The study of and the solution to the frequency selection problem has been accomplished by a genetic algorithm. Simulation shows that the algorithm can resolve the problem of the multi-system compatible receiver's frequency selection effectively.

Keywords: multi-system, receivers, genetic algorithm, fixed point

PACC: 9580D, 0365D

* Project supported by the State Commission of Science and Technology for National Defense Industry (COSTIND)'s Civil Spaceflight Special Item.

† E-mail: buaasd@ee.buaa.edu.cn