

雷诺数对圆形渐缩喷嘴湍流射流的影响*

杜 诚 徐敏义 米建春[†]

(北京大学工学院湍流与复杂系统研究国家重点实验室, 北京 100871)

(2009 年 11 月 2 日收到; 2009 年 11 月 27 日收到修改稿)

本文研究雷诺数 (Re) 对圆形渐缩喷嘴湍流射流的影响. 实验在射流出口雷诺数为 $Re = 4050\text{—}20100$ 的范围内进行, 分别测量了射流出口、中心线的平均及湍流流场以及部分径向剖面速度分布. 所有测量均采用单热线恒温热线风速仪进行高频采样, 所测流场范围在轴向上为 $0\text{—}30d$ (这里 d 为射流出口直径). 虽然出口速度分布均为“平顶帽”形, 但测量结果依然反映出 Re 对射流出口以及下游流场有强烈的影响. 当 Re 小于临界值 (~ 10000) 时, 平均速度场与脉动速度场均对 Re 有强烈依赖, 大于临界值后则影响甚微. 势核区长度、远场区速度衰减率及扩散率均与 Re 相关.

关键词: 雷诺数, 圆形射流, 热线风速仪

PACC: 4725, 4755C

1. 引 言

湍流射流作为自然界最常见的一种流动, 在很多的工业领域中被广泛的应用, 这些应用包括工业燃烧、污染控制, 以及混合过程等.

回顾之前关于射流量场的研究, Mi 等人^[1] 得出了如下的结论: 对于光滑渐缩圆形射流, 当其射流出口雷诺数 $Re (\equiv U_e d / \nu, \text{其中 } U_e \text{ 为射流出口速度, } d \text{ 为射流喷嘴出口直径, } \nu \text{ 为动力黏性系数})$ 小于某个临界雷诺数时, 该射流流场对 Re 具有依赖性; 但是, 对于长直圆管射流, 这种依赖性已不复存在. 本文的目的是在这个基础上研究光滑渐缩喷嘴圆形射流的速度场对 Re 的依赖关系 (图 1).

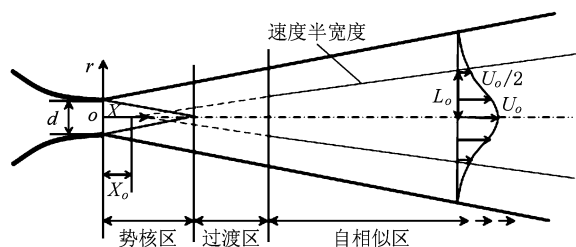


图 1 渐缩圆形射流示意图及坐标系

以往对圆形射流的研究绝大多数都是基于对

渐缩喷嘴射流的实验结果. 研究表明, 当 Re 足够大时, 射流的发展几乎与 Re 无关^[2-4]. 但是, 在不同的情况下, 射流发展由与 Re 相关转化为与 Re 无关的临界值是不同的, 这种不同可能取决于射流的初始条件. Ricou 和 Spalding^[5] 提出, 当 $Re \geq 20000$ 时, 射流的卷吸特性将是恒定不变的. Dimotakis^[6] 提出, 当 $Re > 10000$ 时, 射流可以形成充分发展的湍流流场. 但应当指出, 上述建议并不是研究者建立在自己的实验基础上提出的. 根据文献报道的圆形射流的实验结果, Pope^[4] 得出如下的结论: 当 $Re > 10000$ 时, 平均速度自相似分布形状、速度衰减率和扩散率都独立于 Re . 然而, 对于不同的统计量, 其达到渐近状态时的 Re 是不同的, 即使对于同一个参数 (如, 速度衰减率), 其临界 Re 也可能随初始条件的变化而变化^[7]. 因此, 对于射流统计量达到渐近相似状态的临界 Re , 进行系统深入地研究是很有必要的.

关于雷诺数对圆形射流的影响, 前人已经做了一些研究, 但这些研究中对雷诺数的选取都存在不足, 或者雷诺数范围较小^[8, 9], 或实验的雷诺数数目少^[10]. 在文献[11]的研究中, 圆形射流的马赫数达到了 0.9, 其流动已经不能当做不可压缩流体运动了. 因此, 非常有必要选取范围较宽、个数较多的雷

* 国家高技术研究发展计划 (863) 项目 (批准号: 2007AA05Z300) 资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: jemi@coe.pku.edu.cn.

雷诺数进行圆形射流实验. 基于这个考虑, 本实验对光滑渐缩圆形射流进行了系统的测量, 雷诺数选取为 $Re = 4050\text{—}20100$, 射流出口下游 $0 < x/d < 30$ 的流场范围. 目的是研究雷诺数对平均速度、湍流速度、以及速度脉动的高阶统计量等参数的影响.

2. 实验条件

本实验主要研究雷诺数的改变对圆形光滑渐缩喷嘴射流的影响. 射流装置如图 2 所示, 其光滑渐缩喷嘴出口直径 20 mm, 为了在喷嘴处制造匀速、低湍流度流动, 喷嘴上游接有长 600 mm、直径 95 mm 的整流段, 中间分布有蜂窝状格栅和金属网格, 平行于主流的长段蜂窝格栅可以减少流体卷曲, 金属网格能够降低湍流度, 并减少湍流边界层对速度的影响. 同时, 射流喷嘴 4.5:1 的径缩比以及光滑的三次函数曲面进一步确保了流动的均匀. 实验中使用供给稳定、与室温相同的恒温压缩空气作为气源. 热线探头固定在二维自动进给坐标架上, 所测流场范围为 $x/d = 0\text{—}30$.

所有实验在同一台射流装置上进行, 该装置放置在一个独立实验室中, 其室内空调将室温控制在 $23 \pm 0.3^\circ\text{C}$, 同时, 实验室可以确保测量不受外界声音和振动的干扰. 实验室空间体积为 $l \times w \times h = 6$

$\text{m} \times 3 \text{ m} \times 3 \text{ m}$, 射流装置与地面平行放置于实验室中部. 房高与射流出口直径比为 $l/d = 150$, 房间横截面积与射流出口面积比约为 57300, 射流出口距地面为 1.5 m ($75d$), 距墙壁为 4 m ($200d$).

由于射流出口速度分布为“平顶帽”形 (见图 3), 因此实验中雷诺数 Re 由射流出口中心速度 U_c 确定. 实验在 $Re = 4050\text{—}20100$ 的范围内选取了 7 个雷诺数. 对应出口流速范围为 $U_c = 3\text{—}15 \text{ m/s}$.

实验中采用单热线测量圆形光滑渐缩喷嘴射流的速度及脉动. 热线探头为直径 $5 \mu\text{m}$ 的沃拉斯顿线 (Pt-10% Rh), 长度约 1 mm. 探头接于恒温热线风速仪, 过热系数为 1.5. 电压信号经过滤波、放大后, 由一块 12-bit A/D 转换板采集入电脑, 采样频率为 18400 Hz, 采样时间为 30 s. 热线标定在射流出口处的势核区中进行, 标准风速由连接于数字微压计的标准皮托管得到, 数字微压计量程为 $0\text{—}30 \text{ m/s}$. 皮托管与热线探头对称的放置于射流出口处, 皮托管直径为 2 mm, 热线探头支架直径为 1 mm, 两者横截面积与射流出口横截面积比约为 1.25%, 为避免标定时皮托管或热线探头相互影响, 两者距离不小于 8 mm. 热线标定速度范围为所测流场最大风速的 2 倍. 标定曲线采用三阶多项式. 实验过程中, 当热线测量值漂移大于 0.2 m/s , 即停止实验, 重新标定.

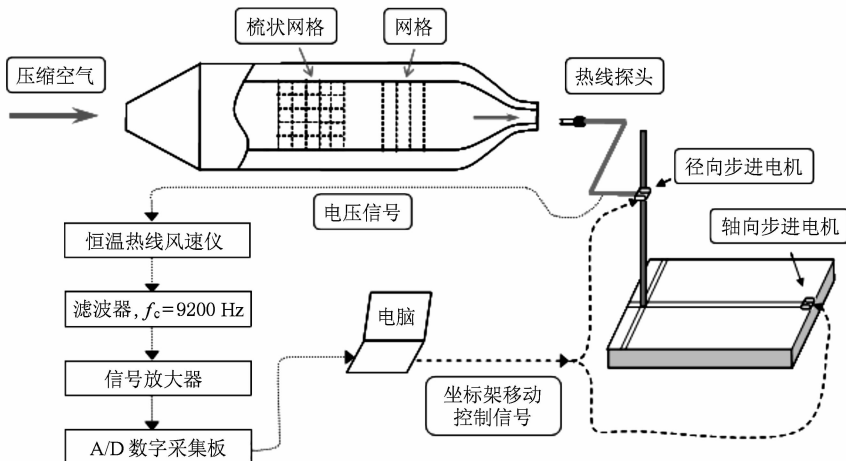


图 2 射流实验系统简图

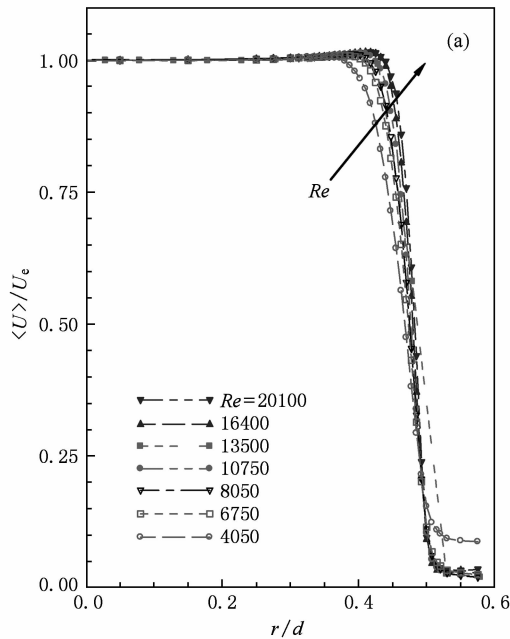
3. 测量结果与讨论

3.1. 出口条件

本实验首先对射流出口进行了测量. 在 $x/d =$

0.05 处的径向方向上, 测量了范围 $r/d = -0.6\text{—}0.6$ 内的流场 (见图 3). 射流出口处的流动对雷诺数的依赖是明显的. 所有的实验条件下, 平均速度分布均显示为“平顶帽”形状. 但是, 这些速度的等速区面积是不同的. 当雷诺数 Re 由 4050 向 20100 增加时, 等速区宽度增加, 速度边界层厚度明显减

小,并且这种变化的速度随雷诺数的增大而减小(见图 3(a)). 在射流出口边界层处,当 $Re = 4050$ 时,射流的初始湍流度分布型是平坦的,这是由于在很低的雷诺数下,射流边界层较厚,边界层动量也较低,导致射流与周围环境流体的相互作用减弱,剪切层并未处于非稳定状态. 随着雷诺数的增加,边界层处(约 $r/d = 0.47$)的湍流度强度的分布开始出现峰值,并且该峰值随着雷诺数的增加而增强,这表明射流边界层与环境流体剪切逐渐增强,



剪切层非稳定性表现越来越明显. 中心线位置处($r/d = 0$)的湍流强度表现出同样的变化趋势,但最大值出现在 $Re = 16400$ 时(见图 4). 图中也给出了文献[8,10]的结果. 整体上,本研究测量的湍流度随 Re 的增加而增加. 但有意思的是,我们的结果与文献[8,10]的结果不一致,因为他们报道的湍流度是随 Re 而减小的. 本文无法回答引起这一差别的原因,但认为湍流度随 Re 的增加而增大更合理些.

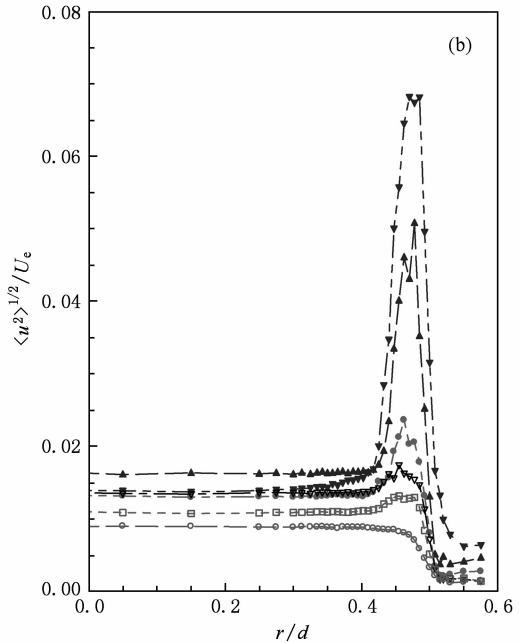


图 3 不同雷诺数下无量纲平均速度(a)和湍流度(b)在出口附近横截面处($x/d = 0.05$)的分布

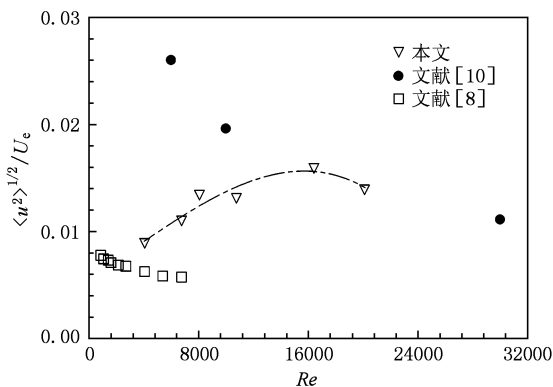


图 4 在 $x/d = 0.05$ 和 $r/d = 0$ 处湍流度随雷诺数的变化

通过在 $x/d = 0.05$ 处的测量可以得到初始边界层厚度. 由出口速度分布和动量积分方程可以计算位移厚度 δ 以及动量厚度 θ ,

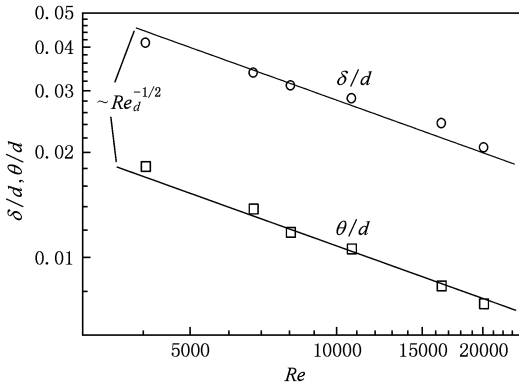
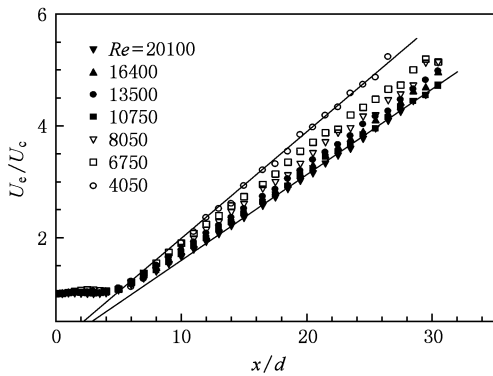
$$\delta = \int_0^{\infty} (1 - U/U_b)_{x=0.05d} dy, \quad (1)$$

$$\theta = \int_0^{\infty} U/U_{o,c} (1 - U/U_b)_{x=0.05d} dy. \quad (2)$$

图 5 显示了位移厚度 δ 和动量厚度 θ 随雷诺数的变化,其中, δ 与 θ 是通过使用样条积分曲线来数值积分方程(1)和(2)而得到的,并且,为了减少误差,图中的 δ 以及 θ ,是对出口速度分布型两侧边界层区域分别进行计算后所得结果的平均值. 同时,图 5 也显示了位移厚度 δ 和动量厚度 θ 分布在对数坐标系下的拟合直线,该结果说明 δ 与 θ 均与 $Re^{-1/2}$ 成比例.

3.2. 平均速度场

图 6 显示了在不同的雷诺数 ($4050 \leq Re \leq 20100$) 下,平均速度衰减 U_c/U_c 在轴线上的变化.

图5 位移厚度 δ 与动量边界层厚度 θ 随雷诺数的变化图6 在不同雷诺数 Re 下平均速度衰减 U_c/U_c 沿轴线的变化

在近场区 ($x/d < 6$), 轴线平均速度衰减基本没有变化, 并且不同的雷诺数对该区域的轴线速度衰减也基本没有影响. 而在远场区, 通过使用圆形湍流射流的相似关系,

$$\frac{U_c}{U_c} = B \frac{x - x_u}{d}, \quad (3)$$

可以研究速度衰减随雷诺数的变化, 这是势核区之后流动区域的标准形式. 其中 B 是速度衰减系数, x_u 是 U_c/U_c 的虚拟源的轴线位置. 本实验中的速度衰减率表现出逐渐趋于一点的特性, 如图 7 所示. 对于本实验中的射流装置, 轴线平均速度衰减率在 $Re \approx 10750$ 时趋于稳定, 而 Malmstrom 等人^[7] 的结果中出现同样现象时的雷诺数为 $Re \approx 13000$. 这是由于不同的喷嘴其内部流动的边界条件不一样导致的. 图 7 揭示了射流轴线速度衰减率随雷诺数变化的趋势, 即随着雷诺数的增加而减少, 最终趋向于某一恒定值不变, $B \approx 0.175$, 这与表 1 中文献的结果符合得很好. 在过去的研究以及本实验的结果中 (如表 1 中心线平均速度衰减特性), x_u 具有较强

的发散性, 均未表现出任何规律. 关于 x_u 与雷诺数 Re 之间的关系, 有待进一步研究.

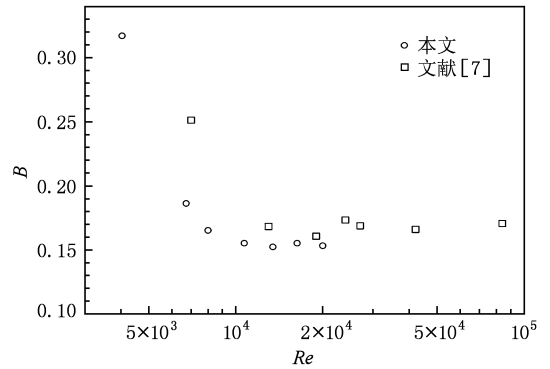
图7 中心线平均速度衰减率 B 随雷诺数的变化

表1 中心线平均速度衰减特性

文献	$Re/10^{-4}$	x/d	B	x_u/d
文献[2]	1.1	30—160	0.165	—
文献[3]	9.55	16—90	0.169	2.7
文献[7]	8.4	12—46	0.166	2.8
文献[10]	3	15—29	0.179	2.5
文献[12]	8.64	10—50	0.169	3
文献[13]	18.4	18—55	0.164	2.15
本文	2.01	15—30	0.175	2.2

图 8 表示了势核区长度 x_p 随雷诺数 Re 增长的变化趋势. 为了降低测量误差, 本文对势核区的定义为, 势核区尾部的速度等于势核区中平均速度的 0.97, 即 $U_c(x = x_p) = 0.97 \langle U_c(x \leq x_p) \rangle$. 由于所有的 x_p 变化不大, $4 < x_p/d < 5.5$, 所以仍有一定的测量误差, 如 $Re = 8050, 13500$ 的 x_p . 但势核区长度 x_p 的变化趋势在图 8 中是很明显的, 即随着雷诺数的增大, 势核区长度逐渐变短, 并趋于稳定. 这个结论与 Kwon 等人^[9] 对圆形射流以及 Deo 等人^[14] 对平面射流的研究结果相一致, 并且印证了 Bogey 和 Bailly^[11] 使用大涡模拟计算得出的势核区变化趋势. 势核区长度 x_p 的减小说明, 雷诺数的增加使得近场区中的射流卷吸作用得到了增强, 射流提前开始了速度的快速衰减.

射流速度半宽度, 又称速度半径, 由以下公式定义:

$$U(x, R_{0.5}) = U_c(x)/2, \quad (4)$$

其中 $R_{0.5}$ 即为射流速度半宽度. 由定义可知, 在垂直于射流轴线的每一个径向截面上, 均能得到一个 $R_{0.5}$, 因此, 通过速度半宽可以研究射流全场的传

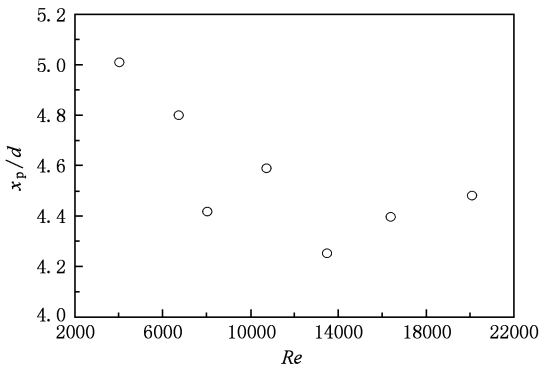


图 8 势核区长度 x_p 随雷诺数 Re 的变化

播、扩散特性. 图 9(a) 表明, 对本实验中的射流, 在 $x/d > 10$ 的流场范围内, 速度半宽度随轴向距离 x 的增加而线性增大. 该线性关系可以按照下式进行拟合:

$$\frac{R_{0.5}}{d} = K \frac{(x - x_r)}{d}, \quad (5)$$

其中, 斜率 K 是射流扩散率的定义, x_r 是射流扩散的虚拟源. 图 9(b) 表明射流扩散率 K 随着雷诺数的变化趋势与轴线平均速度衰减率 B 的变化趋势完全一致, 均以 $Re \approx 10750$ 为临界雷诺数. 雷诺数 Re 从 4050 增加到 10750 时, K 从 0.17 迅速衰减至 0.09, 当 Re 继续增大, 扩散率 K 基本不再衰减, 直至

$Re = 20100$ 时 K 值趋于 0.08. 综合考虑 K 和 B 的发展趋势, 可以得出以下结论: 与近场区相反, 雷诺数的增加将导致射流远场区中的流体卷吸作用减弱, 而且雷诺数越小, 远场区流动的耗散越大, 衰减越快. 这个关于势核区下游流场变化的结论, 与 Bogey 和 Bailly^[11] 的大涡数值模拟结果相符合. 图 9(b) 同时还表示出射流扩散虚拟源 x_r 随雷诺数的变化. x_r 随着雷诺数的变化趋势与射流扩散率 K 的变化趋势相似, 只是其临界雷诺数为 8050, 并且当 Re 小于临界雷诺数时, 随雷诺数的增加而增大.

3.3. 脉动速度场

图 10 给出了不同的雷诺数 Re 下, 湍流强度 ($u_c^* = u'_c/U_c$) 在轴线上的发展. 很明显, 射流出口处湍流强度 u_c^* 约为 1%, 随着 x 的增加, u_c^* 迅速增长, 并在势核区尾部附近达到该区域内的局部最大值 ($u_{c,max}^*$), 在随后的远场区, u_c^* 呈缓慢微弱增长趋势并逐渐趋于某一数值 ($u_{c,\infty}^*$). 根据周培源^[15] 和庄逢甘^[16] 的理论, 这是一种湍流自保持现象, 该现象的出现表明射流已经发展进入湍流自相似流动阶段. 同时, 图 10 也指出了雷诺数对射流发展为自相似流动的转化速度的影响. 雷诺数越低, 湍流强度 u_c^* 进入平稳段的空间位置便越靠近出口, 即射

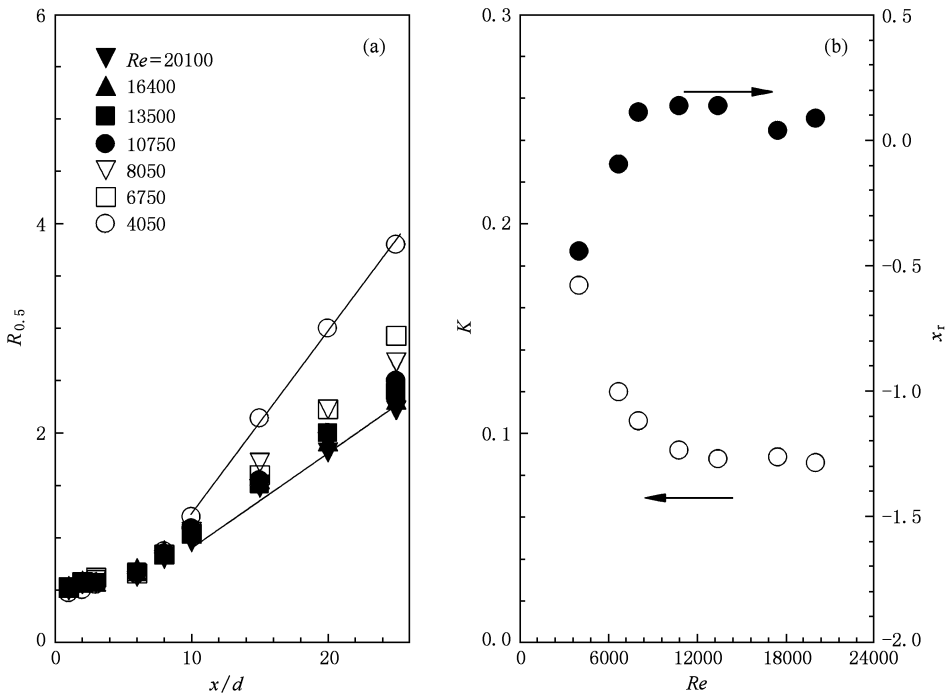


图 9 (a) 不同雷诺数下 ($Re = 4050—20100$) 无量纲速度半径 $R_{0.5}/d$ 随 x 的变化; (b) 扩散率 K 和无量纲虚拟源 x_r/d 随 Re 数的变化

流达到自相似流动的速度就越快. Bogey 和 Bailly^[11]的大涡数值模拟结果中,当雷诺数较低时,圆形射流达到自相似的位置更靠近射流出口. 这与我们的结论相符合. 同时,米建春 等人^[17]在对平面射流的研究中也发现,雷诺数越小,各统计量进入自保持状态越早.

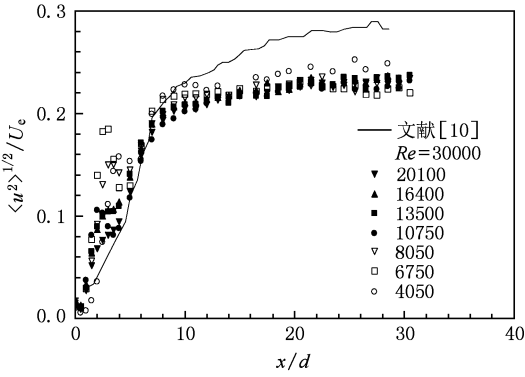


图 10 在不同的雷诺数 ($Re = 4050\text{—}20100$) 下湍流速度 u'_c/U_c 沿轴线的变化

图 11 和图 12 展示了不同的雷诺数下,偏斜因子 $S_u \equiv \langle u^3 \rangle / \langle u^2 \rangle^{3/2}$ 和平坦因子 $F_u \equiv \langle u^4 \rangle / \langle u^2 \rangle^2$ 沿轴线的变化. 两图分别说明了速度测量结果的概率密度函数 (PDF) 的对称性和平坦程度. 计算得到 S_u 和 F_u 均建立在高采样量 (552 000 采样点) 上,高采样量才能确保得到收敛的 PDF. 图 9 中 $Re = 4050$ 的 S_u 和 F_u 曲线在 $x/d > 20$ 的流场中表现出了较高的发散性,这是由于风速过低, $U_c < 0.76$ m/s,测量的不确定性较高,并且根据偏斜因子和平坦因子的定义有, F_u 远大于 S_u , 因此, F_u 曲线相对要更准确.

一般来说,剪切层中拟序结构的随机脉动成分越少,其拟序程度就越高. 比如,偏斜因子 S_u 和平坦因子 F_u 偏离高斯分布下的值 (0, 3) 越多,所测信号的规律性就越强. 本实验中 S_u 和 F_u 在 $x/d < 6$ 的近场中变化非常剧烈,这很可能是由于在此区域中占主导作用的大尺度拟序结构的运动所导致的. 从出口向下游发展, S_u 和 F_u 逐渐由近似于高斯分布的值 (0, 3) 变化为非高斯分布值,并在势核区尾部附近,增至为该局部的最大值 $S_{u,max}^*$ 和 $F_{u,max}^*$. 这两个局部最大值分别出现在 $2.5 < x/d < 4.5$, $4 < x/d < 6$ 的区域内,如图中箭头所标示的点. 偏斜因子和平坦因子在达到局部最大值后,迅速衰减为局部最小值. 最后在大约 $10 < x/d < 30$ 的轴线上, S_u 和 F_u 缓慢增加并趋于某一常数. 一般来说,雷诺数的增加将

使近场区局部最大值出现的更早,即雷诺数越大, $S_{u,max}^*$ 和 $F_{u,max}^*$ 的轴向位置 (箭头标示) 越靠近出口. 这个结论与图 8 所示的势核区的长度变化相一致,随着雷诺数的增加,等速核心区长度逐渐变短,进一步揭示了雷诺数对近场区流体卷吸作用的影响,即卷吸作用随雷诺数的增大而增强. 由图 11 和图 12 还可以明显看出,箭头标示的轴向位置在雷诺数 $Re \geq 10750$ 时基本一致,变化主要发生在 $Re < 10750$ 的雷诺数范围内. 这个趋势完全符合于前文中射流中线平均速度衰减率 K 以及射流扩散率 B 的变化趋势,它们的临界雷诺数均约为 10750. Deo 等人^[14]对平面射流的研究也得到了相似的结果,并且其出现相同变化的临界雷诺数也为 10000.

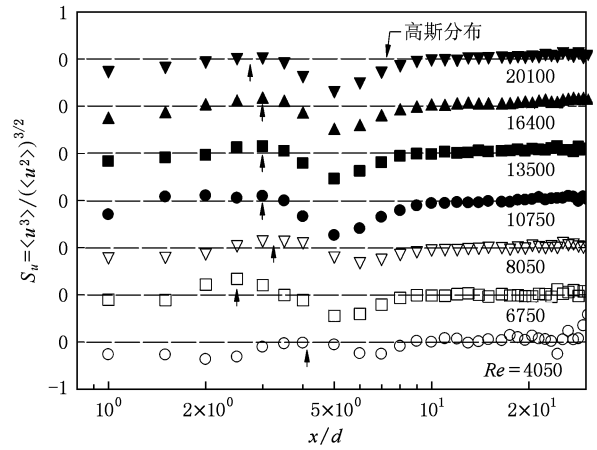


图 11 在不同的雷诺数下 ($Re = 4050\text{—}20100$) 偏斜因子 S_u 沿轴线的变化

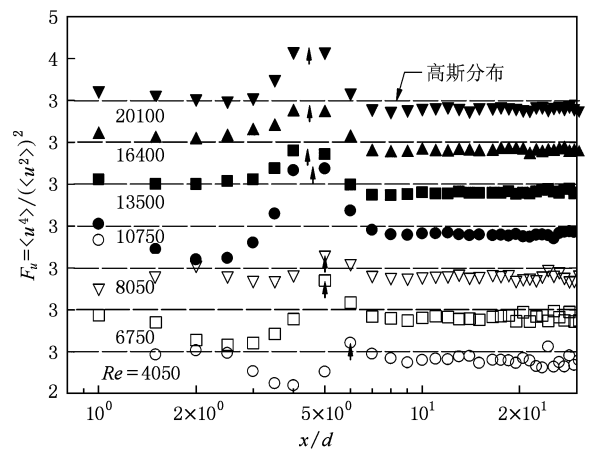


图 12 在不同的雷诺数下 ($Re = 4050\text{—}20100$) 平坦因子 F_u 沿轴线的变化

4. 结 论

本文对七个不同出口雷诺数下圆形渐缩喷嘴射流的热线测量数据进行了分析对比, 研究了这些射流出口、沿轴线的平均速度与脉动速度场, 并且通过分析高阶脉动量间接地比较了圆形射流近场区发展的差异, 得到的主要结论如下:

1. 圆形渐缩射流出口“平顶帽”速度型的等速区面积、剪切层处的湍流强度均随雷诺数的增加而增加. 边界层的位移厚度 δ 和动量厚度 θ 随雷诺数的增加而减小, 并且 δ, θ 均与 $Re^{-1/2}$ 成比例.

2. 圆形渐缩射流在轴线上的平均速度衰减率 B 随雷诺数的增加而降低, 直至 Re 达到 10750 后不再变化. 由速度半宽度定义的射流扩散率 K 表现出了与 B 相同的趋势, 说明射流在远场区的卷吸、混合与扩散随雷诺数的增加而减弱, 并在 Re 达到 10750 后趋于稳定. 同时, 势核区长度 x_p 随雷诺数的增加而减小.

3. 不同雷诺数下的中心线湍流强度 ($u_c^* = u'_c/U_c$) 均在势核区尾部附近达到局部最大值, 在随后的远场区, 缓慢增长并逐渐趋于常数. 这说明射流在远场区已进入自相似流动阶段. 并且雷诺数越低, 射流达到湍流度自相似越快.

4. 偏斜因子 S_u 和平坦因子 F_u 在 $x/d < 6$ 的近场中变化非常剧烈, 这是由于此区域内的主要流体结构为大尺度拟序结构. 并且雷诺数越大, S_u 和 F_u 达到局部最大值 (S_{\max}^* 与 F_{\max}^*) 越快, 这与势核区长度的变化相符合. 该趋势说明近场区流动的卷吸、混合随雷诺数的增加而增强. 同时, 当雷诺数 $Re \geq 10750$ 时, S_{\max}^* 与 F_{\max}^* 的轴向位置基本不再发生变化.

5. 综上得出一条重要结论: 本实验测量的射流存在一个临界雷诺数, 其值约为 10000. 当 $Re < 10000$ 时, 射流的某些重要特性 (如 B, K 等) 对雷诺数存在很大的依赖; 当 $Re \geq 10000$ 时, 雷诺数的影响就变得很小了.

-
- [1] Mi J, Nobes D S, Nathan G J 2001 *J. Fluid Mech.* **432** 91
- [2] Panchapakesan N R, Lumley J L 1993 *J. Fluid Mech.* **246** 197
- [3] Hussein H, Capp S, George W 1994 *J. Fluid Mech.* **258** 31
- [4] Pope S 2000 *Turbulent flows* (Cambridge: Cambridge Univ. Press) p101
- [5] Ricou F, Spalding D B 1961 *J. Fluid Mech.* **11** 21
- [6] Dimotakis P E 2000 *J. Fluid Mech.* **409** 69
- [7] Malmstrom T, Kirkpatrick A, Christensen B, Knappmiller K 1997 *J. Fluid Mech.* **346** 363
- [8] Todde V, Spazzini P, Sandberg M 2009 *Expt. Fluids* **1**
- [9] Kwon S J, Seo I W 2005 *Expt. Fluids* **38** 801
- [10] Fellouah H, Ball C G, Pollard A 2009 *Int. J. Heat Mass Transfer* **52** 3943
- [11] Bogey C, Bailly C 2006 *Phys. Fluids* **18** 065101
- [12] Wygnanski I, Fiedler H 1969 *J. Fluid Mech.* **38** 577
- [13] Quinn W R 2005 *Eur. J. Mech. B Fluids* **25** 279
- [14] Deo R C, Mi J, Nathan G J 2008 *Phys. Fluids* **20** 075108
- [15] Zhou P Y 1959 *Acta Phy. Sin.* **13** 220 (in Chinese) [周培源 1959 物理学报 **13** 220]
- [16] Zhuang F G 1953 *Acta Phy. Sin.* **9** 201 (in Chinese) [庄逢甘 1953 物理学报 **9** 201]
- [17] Mi J, Feng B, Deo R C, Nathan G J 2009 *Acta Phy. Sin.* **58** 354 (in Chinese) [米建春、冯宝平、Deo R C、Nathan G J 2009 物理学报 **58** 354]

Effect of exit Reynolds number on a turbulent round jet^{*}

Du Cheng Xu Min-Yi Mi Jian-Chun[†]

(*State Key Laboratory for Turbulence and Complex Systems, College of Engineering, Peking University, Beijing 100871, China*)

(Received 2 November 2009; revised manuscript received 27 November 2009)

Abstract

The present study systematically investigates by experiment the influence of Reynolds number (Re) on a turbulent jet issuing from a smoothly-contracting round nozzle. Measurements were performed for seven Reynolds numbers varying from $Re = 4,050$ to $Re = 20,100$ using single hot-wire anemometry and over an axial distance of 30 nozzle exit diameters. Although all the exit velocity profiles are of “top-hat” shape, these measurements reveal significant dependence on Re of the exit and downstream flows. The effect of Re on both the mean and turbulent fields is substantial for $Re < 10,000$ and becomes weak beyond $Re = 10,000$. The length of the jet’s potential core and the far-field rates of decay and spread all depend significantly on Re .

Keywords: Reynolds number, round jet, hot wire anemometer

PACC: 4725, 4755C

^{*} Project supported by Ministry of Science and Technology of China Through an 863 Project (Grant No. 2007AA05Z300).

[†] Corresponding author. E-mail: jcmi@coe.pku.edu.cn

应用非线性薛定谔方程模拟深海内波的传播*

宋诗艳¹⁾ 王 晶¹⁾ 王建步²⁾ 宋莎莎²⁾ 孟俊敏^{2)†}

1) (中国海洋大学信息科学与工程学院, 青岛 266100)

2) (国家海洋局第一海洋研究所, 青岛 266061)

(2009 年 10 月 26 日收到; 2010 年 1 月 11 日收到修改稿)

本文选取东沙岛以东深海区域, 应用描述深海内波的非线性薛定谔方程, 采用啁啾的思想, 研究了频散和非线性效应之间的关系, 模拟了深海内波的传播. 数值模拟内波演变趋势与 MODIS 影像拍摄到的内波演变趋势基本符合, 从而验证了应用非线性薛定谔方程模拟深海弱非线性内波传播的合理性.

关键词: 深海内波, 啁啾, 非线性薛定谔方程, 频散和非线性

PACC: 4735, 4710, 0340G

1. 引 言

对于深海内波, Benjamin^[1] 和 Ono^[2] 导出了无限深流体中界面内波的 Benjamin-Ono 方程 (BO 方程); Kubota 等^[3] 导出了中等长波 (intermediate long wave, ILW) 方程; Chio 和 Camass^[4] 得到两层界面内波的完全非线性演化方程, 所推导的方程在弱非线性、沿一个方向传播时可以退化为 ILW 方程, 在无限水深时 ILW 方程又可以退化为 BO 方程. 虽然对于深海内波已建立了不同模型, 但对于深海内波传播的数值模拟研究还不成熟. 宋诗艳等导出了描述深海内波的非线性薛定谔方程^[5], 应用非线性薛定谔方程描述内波, 可以引入光孤子通信中啁啾的思想, 研究内波传播过程中频散和非线性的作用, 有助于分析内波的传播特性, 但至今还未见应用非线性薛定谔方程来模拟深海内波的传播.

本文应用描述深海内波的非线性薛定谔方程^[5], 模拟深海内波的传播. 首先, 选择东沙岛以东深海区为研究区域, 并分析其环境参数; 然后, 根据所得参数值并借用光孤子通信中啁啾思想^[6-9], 研究了描述深海内波的非线性薛定谔方程的频散与非线性效应的关系; 最后, 应用非线性薛定谔方程模拟并分析了研究区域深海内波的传播情况, 并与

内波 MODIS 图像做了对比.

2. 研究海域环境参数的确定

海洋内波是发生在因温、盐变化而密度分层海水中的一种波动. 海水常年存在着分层现象, 众多的现场和卫星遥感观测证实海洋中普遍存在内波. 东沙岛附近是内波的多发区, 东沙岛以东深海区的内波 MODIS 图像如图 1 及图 2 所示. 选择 20°E—22°E, 118°N—120°N 区域为研究区域, 根据 National Geophysical Data Center 提供的海水水深数据, 研究海域的水深几乎都在 1000 m 以上, 可视作为深水区.

图 1、图 2 为内波 MODIS 图像, 在所选内波传播路径上都有两内波, 根据内波图像的特征及内波遥感探测方法^[10], 应用 ENVI 软件大体估算内波的波长. 图 1 内波 1 的半振幅宽度为 1573.82 m, 内波 2 的半振幅宽度为 2108.87 m; 图 2 内波 1 的半振幅宽度为 1512.39 m, 内波 2 的半振幅宽度为 1922.73 m. 由此可见内波在传播过程中不断展宽.

迄今为止, 很多学者对内波的许多方面进行了深入的研究与分析, 通常的做法是把密度连续分层的流体看成两层分层流体^[11,12]. 对于深海情况, 温度跃层强度最低标准值规定如下^[13,14]:

* 国家自然科学基金 (批准号: 60702077) 和国家海洋局第一海洋研究所“基本科研业务费专项资金” (批准号: GY02-2008G42) 资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: mengjm@fio.org.cn

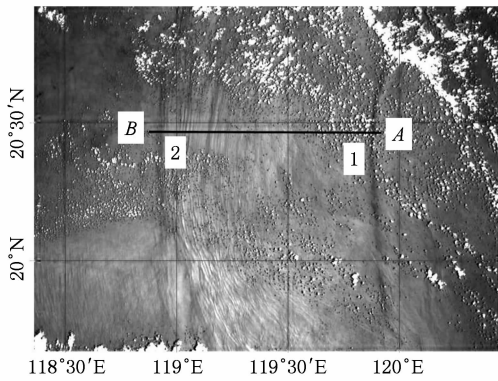


图1 东沙岛东部 2008 年 5 月 10 日内波 MODIS 图像

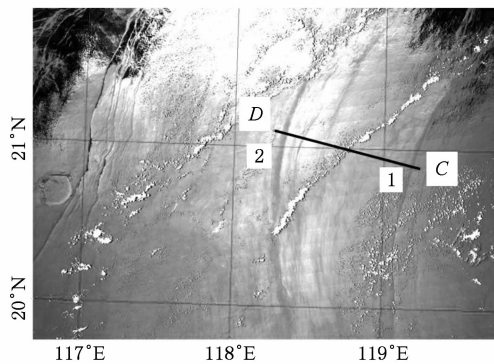


图2 东沙岛东部 2008 年 7 月 3 日内波 MODIS 图像

$$\frac{\Delta T}{\Delta Z} = 0.05^\circ\text{C}/\text{m}. \quad (1)$$

用温跃层代替密度跃层来估算海水分层现象^[15], 根据 National Oceanographic Data Center 提供的研究区域的温度垂向分布数据, 根据温跃层强度的判断公式(1), 在 $20^\circ\text{E} - 22^\circ\text{E}$, $118^\circ\text{N} - 120^\circ\text{N}$ 海域海水的上层深度大约在 $85 - 125\text{ m}$ 之间. 根据海水状态方程, 及温盐数据, 估算出上下层海水密度值约为 $1022.8\text{ kg}/\text{m}^3$, $1026.9\text{ kg}/\text{m}^3$.

3. 频散、非线性所致啁啾

描述深海内波传播的非线性薛定谔方程^[5]

$$-iA_t + \alpha A_{xx} + \beta |A|^2 A = 0, \quad (2)$$

其中 α 是频散项系数, β 是非线性项系数.

初始波形取

$$A = A_0 \text{sech}(x/l). \quad (3)$$

在影响内波传播的因素中, 非线性和频散性最为重要. 在光孤子通信中, 啁啾是指脉冲传输时中心波长发生偏移的现象. 本节借用光孤子通信中啁

啾的思想^[6-9], 来研究描述深海内波的非线性薛定谔方程的频散和非线性所致啁啾, 进而分析频散和非线性效应之间的关系.

3.1. 频散所致啁啾

单独考虑频散对内波的展宽作用, 非线性薛定谔方程(2)化为

$$A_t = -i\alpha A_{xx}. \quad (4)$$

考察 $0 \rightarrow \Delta t$ 的情况, 其中 Δt 为小量, 并应用(3)式, 方程(4)的近似解为

$$A(\Delta t, x) = A_0 \text{sech}(x/l) \times \exp\left[i\left(-\frac{\alpha\Delta t}{l^2} + \frac{2\alpha\Delta t}{l^2} \text{sech}^2(x/l)\right)\right]. \quad (5)$$

波的相位为

$$\varphi_D = -\frac{\alpha\Delta t}{l^2} + \frac{2\alpha\Delta t}{l^2} \text{sech}^2(x/l), \quad (6)$$

频散所致啁啾为

$$\Delta\nu_D = -\varphi_{Dx} = \frac{4\alpha\Delta t}{l^3} \text{sech}^2(x/l) \tanh(x/l). \quad (7)$$

3.2. 非线性所致啁啾

单独考虑非线性的作用, 非线性薛定谔方程(2)化为

$$A_t = -i\beta |A|^2 A. \quad (8)$$

考察波从 $0 \rightarrow \Delta t$ 的情况, 其中 Δt 为小量, 并应用(3)式, 则方程(8)的近似解为

$$A(\Delta t, x) = A_0 \text{sech}(x/l) \times \exp[-i\beta A_0^2 \Delta t \text{sech}^2(x/l)], \quad (9)$$

波的相位为

$$\varphi_N = -\beta A_0^2 \Delta t \text{sech}^2(x/l), \quad (10)$$

非线性所致啁啾为

$$\Delta\nu_N = -\varphi_{Nx} = -\beta A_0^2 \frac{2\Delta t}{l} \text{sech}^2(x/l) \times \tanh(x/l). \quad (11)$$

3.3. 讨论

由(7)式和(11)式可得总啁啾

$$\begin{aligned} \Delta\nu_s &= \Delta\nu_D + \Delta\nu_N \\ &= \left(\frac{2\alpha}{l^2} - \beta A_0^2\right) \frac{2\Delta t}{l} \text{sech}^2(x/l) \\ &\quad \times \tanh(x/l). \end{aligned} \quad (12)$$

1) 当频散作用和非线性作用相互抵消时, 即

$$\Delta\nu_s = \Delta\nu_D + \Delta\nu_N = 0, \quad (13)$$

得

$$A_0 = \sqrt{\frac{2\alpha}{\beta l^2}}. \quad (14)$$

2) 当频散作用大于非线性作用时, 即

$$|\Delta\nu_D| > |\Delta\nu_N|, \quad (15)$$

得

$$A_0 < \sqrt{\frac{2\alpha}{\beta l^2}}. \quad (16)$$

3) 当非线性作用大于频散作用时, 即

$$|\Delta\nu_D| < |\Delta\nu_N|, \quad (17)$$

得

$$A_0 > \sqrt{\frac{2\alpha}{\beta l^2}}. \quad (18)$$

由此可知, 总啁啾与内波传播海区的海况(分层、深度、密度差、地形等)及初始波的振幅有关. 如果海区确定, 其海况参数一定, 总啁啾的大小只与初始振幅有关, 由(14)式可计算出总啁啾为零时的振幅, 这是保证内波稳定传播的条件. 当初始振幅偏小时, 频散作用强; 当初始振幅偏大时, 非线性作用强.

上层水深取 110 m, 下层水深取 2600 m, 半波长取 1400 m, 由(14)式可得总啁啾为零时初始振幅为 53 m, 初始振幅分别取 43 m, 53 m, 63 m, 总啁啾的大小如图 3 所示. 由图 3 可知当 $A_0 = 53$ m 时, 频散所致啁啾和非线性所致啁啾相互抵消, 总啁啾为零, 内波能长距离传播而保持波形不变; 当 $A_0 = 43$ m 时, 频散作用大于非线性作用, 总啁啾不为零, 呈现频散性, 内波在传播过程中不断展宽. 当 $A_0 = 63$ m 时, 非线性作用大于频散作用, 总啁啾不为零, 呈现非线性, 内波振幅呈周期性变化.

4. 深海内波传播演化的数值模拟

4.1. 非线性薛定谔方程的数值计算方法

采用 Crank-Nicolson 型的隐式格式, 非线性薛定谔方程(2)的差分方程为

$$\begin{aligned} & \alpha\Delta t A_{j-1}^{n+1} + [\Delta t(\Delta x)^2\beta]|\bar{A}_j^{n+1}|^2 \\ & - 2\alpha\Delta t - 2i(\Delta x)^2 A_j^{n+1} + \alpha\Delta t A_{j+1}^{n+1} \\ = & (-\alpha\Delta t)A_{j-1}^n + [2\alpha\Delta t - \Delta t(\Delta x)^2\beta]|A_j^n|^2 \\ & - 2i(\Delta x)^2 A_j^n + (-\alpha\Delta t)A_{j+1}^n, \end{aligned} \quad (19)$$

其中 \bar{A}_j^{n+1} 是由第 n 个时间步长的结果按照 Euler 格

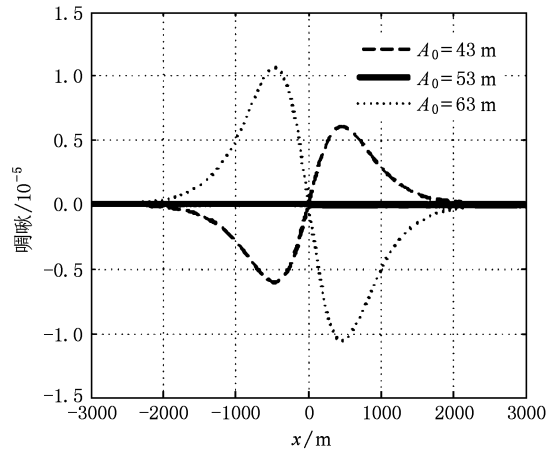


图 3 初始振幅取不同值时总啁啾的大小

式估计的, 即

$$\begin{aligned} \bar{A}_j^{n+1} = & A_j^n - i\Delta t \left[\frac{\alpha}{(\Delta x)^2} (A_{j+1}^n - 2A_j^n + A_{j-1}^n) \right. \\ & \left. + \beta |A_j^n|^2 A_j^n \right] + O((\Delta t)^2, (\Delta x)^2). \end{aligned} \quad (20)$$

4.2. 参数选取

根据实际海域跃层的分析, 上层水深取 110 m, 初始波形采用(3)式, 波长根据本文第二节的估算选取, 海水下层深度采用实际海域深度, 见图 4 和图 7. 对于初始振幅的选取, 根据频散和非线性的关系, 及模拟的需要分情况选取.

4.3. 数值模拟

如图 1 所示, 根据内波的传播方向, 模拟内波由 $A \rightarrow B$ 的传播. 图 4 显示了 $A \rightarrow B$ 段海水深度的变化. 由图 4 可知, $A \rightarrow B$ 水深有变浅的趋势, 且其大于 2600 m, 可视为深海. 半波长取 1574 m, 选取不同的初始振幅模拟内波由 $A \rightarrow B$ 的传播, 如图 5 和图 6 所示.

如图 2 所示, 根据内波的传播方向, 选取 $C \rightarrow D$ 段, 模拟内波由 $C \rightarrow D$ 的传播. 图 7 显示了 $C \rightarrow D$ 段海水深度的变化. 由图 7 可知, $C \rightarrow D$ 水深也有变浅的趋势, 且其在 2000 m 以上, 可视为深海. 半波长取 1512 m, 选取不同的初始振幅模拟内波由 $C \rightarrow D$ 的传播, 如图 8 和图 9 所示.

由图 5 和图 8 可知, 初始振幅较小时, 内波由 $A \rightarrow B$ 或由 $C \rightarrow D$ 传播时, 内波不断展宽, 振幅减小, 说明频散作用较强; 由图 6 和图 9 可知, 初始振幅较大时, 内波由 $A \rightarrow B$ 或由 $C \rightarrow D$ 传播时, 内波宽度及

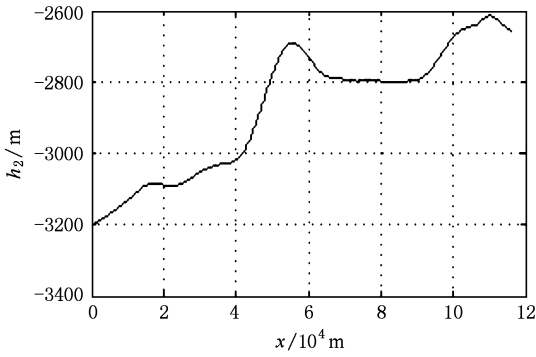


图 4 A → B 之间海水下层水深的变化

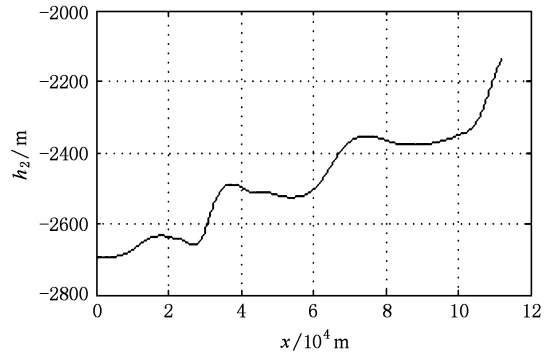


图 7 C → D 之间海水下层水深的变化

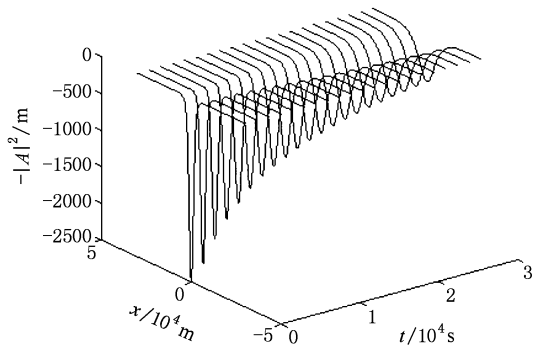


图 5 初始振幅 $A_0 = 50$ m 时,内波由 A → B 的传播

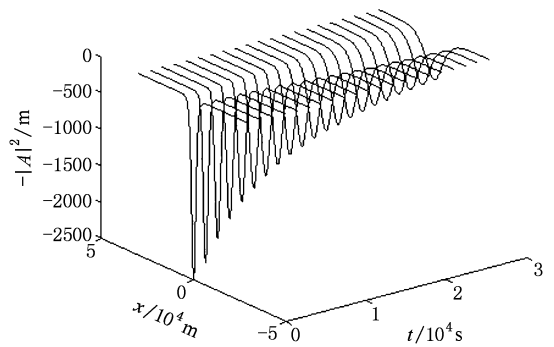


图 8 初始振幅 $A_0 = 50$ m 时,内波由 C → D 的传播

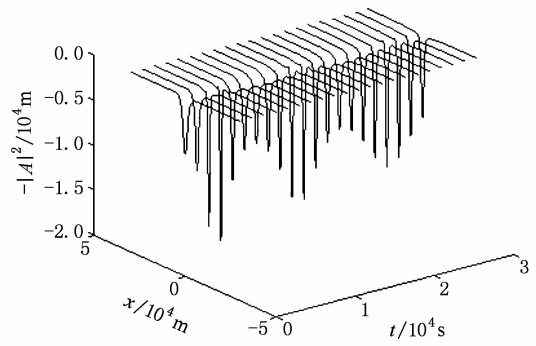


图 6 初始振幅 $A_0 = 80$ m 时,内波由 A → B 的传播

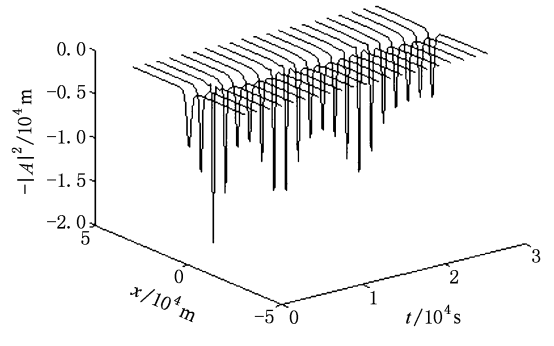


图 9 初始振幅 $A_0 = 80$ m 时,内波由 C → D 的传播

振幅呈周期性变化,可知非线性作用较强.

由图 1 及图 2 可以看出,内波在由 A → B 及由 C → D 传播时,不断展宽.又由于非线性薛定谔方程作为弱非线性模型,适于描述深海较小振幅的内波传播,故图 5 和图 8 符合条件.图 5 和图 8 的数值模拟结果与图 1 及图 2 中 MODIS 影像观测到的内波变化趋势基本符合.由此说明,此海域内波传播过程中频散起主要作用,从而也验证了用非线性薛定谔方程模拟深海内波的可行性.

5. 结 论

本文结合东沙岛东部实际深海区域的环境参数,采用描述深海内波的非线性薛定谔方程,研究了深海内波的传播情况.得到以下结论:

1. 从啁啾的思想研究频散和非线性效应的关系,推导出了深海内波的频散和非线性所致总啁啾,总啁啾与内波传播海区的海况(分层、深度、密度差、地形等)及初始波的振幅有关.如果海区确

定,其海况参数一定,总啁啾的大小只与初始振幅有关.并得到了频散与非线性平衡的条件.当频散和非线性平衡时,内波能长距离传播而保持波形不变;当频散作用大于非线性作用时,内波在传播过程中不断展宽;在非线性作用大于频散作用时,内波在传播过程中振幅呈周期性变化.

2. 模拟了东沙岛东部实际海域的内波传播,内

波的变化趋势与 MODIS 影像观测到的内波变化基本一致.深海内波随着水深的变浅逐渐展宽.说明了在此区域频散作用占主导地位,同时也看到在深海区海底地形的较小变化,并没有影响频散效应或非线性效应的主导作用.从而也验证了应用文献[5]中的非线性薛定谔方程模拟深海弱非线性内波传播的合理性.

-
- [1] Benjamin T B 1967 *J. Fluid Mech.* **29** 559
- [2] Ono H 1975 *J. Phys. Soc. Japan* **39** 1082
- [3] Kubota T, Ko D R S, Dobbs L D 1978 *AIAA J. Hydrodyn.* **12** 157
- [4] Choi W, Camassa R 1999 *J. Fluid Mech.* **396** 1
- [5] Song S Y, Wang J, Meng J M, Wang J B, Hu P X 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1130 (in Chinese) [宋诗艳、王晶、孟俊敏、王建步、扈培信 2010 物理学报 **59** 1130]
- [6] Wang J, Wang Z L 2004 *Chin. Phys.* **13** 877
- [7] Wang J, Shi Y M 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 2820 (in Chinese) [王晶、时延梅 2006 物理学报 **55** 2820]
- [8] Tan Z W, Ning T G, Liu Y, Chen Y, Cao J H, Dong X W, Ma L N, Jian S S 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 2799 (in Chinese) [谭中伟、宁提纲、刘艳、陈勇、曹继红、董小伟、马丽娜、简水生 2006 物理学报 **55** 2799]
- [9] Zeng S G, Zhang B 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2476 (in Chinese) [曾曙光、张彬 2009 物理学报 **58** 2476]
- [10] Yang J S 2005 *The technique of ocean wind-field and ocean wave and internal waves remote sensing of synthetic aperture radar* (Qingdao: Ocean Press) p75 (in Chinese) [杨劲松 2005 合成孔径雷达海面风场、海浪和内波遥感技术(青岛:海洋出版社)第75页]
- [11] Song J B 2006 *Chin. Phys.* **15** 2796
- [12] Yang H L, Song J B, Yang L G, Liu Y J 2007 *Chin. Phys.* **16** 3589
- [13] Shi M C, Gao G P, Bao X W 2000 *Ocean survey methods* (Qingdao: Ocean University of Qingdao Press) p265 (in Chinese) [侍茂崇、高郭平、鲍献文 2000 海洋调查方法(青岛:青岛海洋大学出版社)第265页]
- [14] Sun X P 2006 *The ocean in offshore China* (Beijing: Ocean press) p201 (in Chinese) [孙湘平 中国近海区域海洋(北京:海洋出版社)第201页]
- [15] Fang X H, Du T 2005 *Fundamentals of Oceanic Internal Waves and Internal Waves in the China Seas* (Qingdao: Ocean University of China Press) p178 (in Chinese) [方欣华、杜涛 2005 海洋内波基础和中国海内波(青岛:中国海洋大学出版社)第178页]

Numerical simulation of internal waves propagation in deep sea by nonlinear Schrödinger equation *

Song Shi-Yan¹⁾ Wang Jing¹⁾ Wang Jian-Bu²⁾ Song Sha-Sha²⁾ Meng Jun-Min^{2)†}

1) (*College of information science and engineering, Ocean University of China, 238 Songling Road, Laoshan District, Qingdao 266100, China*)

2) (*First Institute of Oceanography, S. O. A., Qingdao 266061, China*)

(Received 26 October 2009; revised manuscript received 11 January 2010)

Abstract

The deep-sea area east of Dongsha Island is chosen as the research area. The relationship between dispersion and nonlinearity is studied using nonlinear Schrödinger equation which describes deep-sea internal waves in conjunction with the idea of chirps, then the propagation of internal waves in deep sea is simulated. The numerical simulation results are found to be in good agreement with the internal wave MODIS images, which validates the rationality of simulating internal wave propagation in deep sea using nonlinear Schrödinger equation.

Keywords: deep-sea internal wave, chirp, nonlinear Schrödinger equation, dispersion and nonlinearity

PACC: 4735, 4710, 0340G

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60702077) and the Special Fundamental Scientific Research Funds of Operating Expenses of First Institute of Oceanography, State Oceanic Administration, China (Grant No. GY02-2008G42).

† Corresponding author. E-mail: mengjm@fio.org.cn