扰动厄尔尼诺/拉尼娜-南方涛动模型的解*

谢　峰[1)2)]　林一骅[3)]　林万涛[3)]　莫嘉琪[2)4)†]

1)(东华大学理学院, 上海　201620)

2)(上海高校计算科学 E-研究院 SJTU 研究所, 上海　200240)

3)(LASG, 中国科学院大气物理研究所, 北京　100029)

4)(安徽师范大学数学系, 芜湖　241003)

(2010 年 2 月 22 日收到;2010 年 4 月 19 日收到修改稿)

厄尔尼诺/拉尼娜-南方涛动(ENSO)是一个包括在赤道太平洋中海-气交互作用的年际现象. 本文创建一个求解 ENSO 模型非线性方程的近似方法. 并在这基础上借助同伦映射方法研究了一类 ENSO 模型振子模型的近似解与精确解. 同时讨论了近似解的精度. 从得到的结果看出,同伦映射方法能够用于分析 ENSO 模型在赤道东太平洋中的 SST 异常和气-海振荡的温跃层深度异常.

关键词: 非线性, 同伦映射, 摄动, ENSO 模型

PACS: 02.30.Mv

1. 引　　言

厄尔尼诺/拉尼娜-南方涛动(ENSO)分别是发生在热带太平洋中大气和海洋的异常事件. 它的物理原因神秘地延续了大半个世纪,直到 Bjerknes[1] 揭示了在赤道太平洋中 Walker 循环和海表温度(SST)差异波动之间的内在联系. 赤道 SST 差异主要是被东太平洋"冷舌"的升温(El Niño)或冷却(La Niño)所决定. 所以最近几年中的 ENSO 研究是针对南方涛动和 El Niño/La Niño 循环描述的一个统一的年际气候变化情况. 海-气交互作用的复杂性和非线性造成了理论研究人员讨论 ENSO 简单模型变得十分困难. 因此,数值模型成为通常的研究方式. 在近 20 年来, 关于中间型耦合 ENSO 模型[2—6], 常规循环模型(GCMs)[7,8] 和混合模型[9,10] 的数值模拟已得到了很好的研究. 从已经得到的数值实验对 ENSO 物理知识的了解已有许多进展. 同时,在 Bjerknes[11] 假设以后,耦合海洋和大气系统性质的理论研究也被广泛进行着. Neelin, Latif 和 Jin[12] 提出了一个关于这方面普遍适合的观点. 早期的理论分析采用的是耦合模型原型[13—15]. Philander, Yamagata 和 Pacanowski[16] 提出了在一个赤道 β 平面上浅水耦合系统的稳定性分析. 继后,另外的机理及其发展也被研究[17—25]. 但是,理论模型研究还初步地局限在线性动力学框架,而描绘非线性耦合系统方面只有较小的进展.

通常南方涛动结构的理论解释处于很大的挑战. 一个在 Bjerknes[11] 初步工作中的猜疑浮现出来:由冷到暖的状态是如何转变的. Cane, Munnich 和 Zebiak[26] 首先试图从他们的数值模型中去发现振荡的 Bjerknes 猜疑. 他们创建了在暖温之前赤道热量的增加和在这事件期间急速下降的设想.

从理论上解释 ENSO 物理机理具有很大的困难. 这是由于 ENSO 对于年际气候变化是一个重要的迹象以及复杂的非线性海-气耦合系统. 由于自然界中大气和海洋运动的非线性,主要是针对非线性 ENSO 的预报模型研究时遇到的困难. 为了研究非线性性态,在一些 ENSO 简单海-气耦合模型基础上,许多学者用了不同的方法,包括研究局部和整体的 ENSO 性态[27—39].

近来许多学者已经研究了非线性奇摄动问题.

* 国家自然科学基金(批准号:40876010,10701023), 中国科学院知识创新工程重要方向项目(批准号:KZCX2-YW-Q03-08), 公益性行业科研专项(批准号:GYHY200806010), LASG 国家重点实验室专项经费, 中央高校基本科研业务费重点项目(批准号:2010B08-2-1), 上海市教育委员会 E-研究院建设计划项目(批准号:E03004)和浙江省自然科学基金(批准号:Y6090164) 资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: fxie@dhu.edu.cn, mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn

　

一些近似方法被发展和深化,包括平均法,边界层法,匹配渐近展开方法,多重尺度法[40—44]. 作者等也利用摄动方法研究了一类非线性奇摄动问题[45—54]. 本文是利用简单而特殊的同伦理论[55,56]和摄动理论[40]来讨论一类ENSO模型.

同伦映射方法是利用在拓扑学中的同伦变换去解决非线性常、偏微分方程. 利用这种方法,我们能得到一类非线性方程的近似解. 它是一个很有效的近似求解的方法.

2. 扰动ENSO模型的气-海振子

理念上的振子模型应该研究东、西太平洋异常模式的变化. 正如下面指出,振子模型能够用进一步的简化和假设,并规化为一个简单振子模型.

西太平洋振子是强调研究ENSO的西太平洋异常[28,57]. 特别是,在西太平洋远离赤道海表温度和温跃层深度变化的赤道信风异常. 这些信风异常促使了海洋响应,这种响应促使在赤道东太平洋向东影响异常. 假如所有的时滞参数为零[57],我们指出缓慢的海洋动力调节不必需要波的传播外在的因素.

今讨论如下一个扰动ENSO模型气-海振子[58]:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = CT + Dh + f(T), \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -ET - R_h h + g(h), \tag{2}$$

其中T为赤道东太平洋中的SST异常,h为温跃层深度异常,模型参数C, D, E和R_h为正的模型参数,它们分别是联系到海表温度异常和温跃层深度与变化率间的无量纲比例系数. f, g为扰动项. 假设[H] 扰动函数f, g为关于其变量充分光滑的函数,且

$$\max_{0\leqslant t\leqslant t_0}(|f_T(T(t))|, |g_h(h(t))|) \leqslant \delta,$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{\|R\|}{\|y\|} = 0, \quad (0 \leqslant t \leqslant t_0),$$

其中t_0, δ为正常数, $\|R\| = \varepsilon T^3$, $\|y\| = (T^2 + h^2)^{1/2}$.

3. ENSO模型近似解和精确解

首先,引进一组同伦映射$H_i(T, h, p): X^2 \times I \to R (i = 1,2)$:

$$H_1(T,h,p) = L_1(T,h) - L_1(u_0,v_0) + p(L_1(u_0,v_0) - f(T_0)), \tag{3}$$

$$H_2(T,h,p) = L_2(T,h) - L_2(u_0,v_0) + p(L_1(u_0,v_0) - g(h_0)), \tag{4}$$

其中$X = [0, \infty)$, $I = [0,1]$, $R = (-\infty, +\infty)$, 而线性算子$L_i (i = 1,2)$为

$$L_1(T,h) = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} - CT - Dh, \tag{5}$$

$$L_2(T,h) = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} + ET + R_h h, \tag{6}$$

(u_0, v_0)为原方程组(1), (2)的初始近似.

显然由(3), (4)式知, $H_j(T,h,1) = \lim\limits_{p\to 1} H_j(T, h, p) = 0 (j = 1,2)$ 就是系统(1), (2). 故系统(1), (2)的解$(T(t), h(t))$就是$H_j(T,h,p) = 0 (j = 1,2)$的解当$p \to 1$的极限情形.

其次,问题(1), (2)在无扰动的情形

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = CT + Dh, \tag{7}$$

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -ET - R_h h. \tag{8}$$

不难得到,线性系统(7), (8)对应的特征根$\lambda_i (i = 1,2)$为

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}[(C - R_h) - \sqrt{(C + R_h)^2 - 4DE}], \tag{9}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}[(C - R_h) + \sqrt{(C + R_h)^2 - 4DE}]. \tag{10}$$

显然,当$CR_h > DE$时,由(9), (10)式决定的两个特征根为异号实根: $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. 故根据奇点理论,线性系统(7), (8)的零解为不稳定的鞍点. 在一般的情形下,系统在对应的相平面上的轨线是远离零点的.

又由假设,非线性耦合系统(1), (2)的零解与线性系统(7), (8)对应的解具有相同的稳定性态,也是不稳定的.

不难得到线性系统(7), (8)的解$(\bar{T}(t), \bar{h}(t))$为

$$\bar{T}(t) = C_1 D\exp(\lambda_1 t) + C_2 D\exp(\lambda_2 t), \tag{11}$$

$$\bar{h}(t) = C_1(\lambda_1 - C)\exp(\lambda_1 t) + C_2(\lambda_2 - C)\exp(\lambda_2 t), \tag{12}$$

其中λ_1, λ_2由(9), (10)式决定, C_1, C_2为任意常数.

参照(11), (12)式,设

$$u_0(t) = C_1 D\exp(\lambda_1 t) + C_2 D\exp(\lambda_2 t), \tag{13}$$

$$v_0(t) = C_1(\lambda_1 - C)\exp(\lambda_1 t) + C_2(\lambda_2 - C)\exp(\lambda_2 t). \quad (14)$$

现再考虑同伦映射(3)，(4)，设

$$T = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)p^k, \quad (15)$$

$$h = \sum_{k=0}^{\infty} h_k(t)p^k. \quad (16)$$

由(3)，(4)式，将(15)，(16)式代入 $H_i(T,h,p) = 0 (i = 1,2)$，展开非线性项为 p 的幂级数，比较等式两边 p 的同次幂的系数. 由 p 的零次幂的系数，可得

$$L_i(T_0,h_0) = L_i(u_0,v_0), \quad i = 1,2.$$

显然，由(13)，(14)式，可选取

$$T_0(t) = C_1 D\exp(\lambda_1 t) + C_2 D\exp(\lambda_2 t), \quad (17)$$

$$h_0(t) = C_1(\lambda_1 - C)\exp(\lambda_1 t) + C_2(\lambda_2 - C)\exp(\lambda_2 t). \quad (18)$$

由(3)—(6)式，p 的一次幂的系数，可得

$$\frac{dT_1}{dt} - CT_1 - Dh_1 = f(C_1 D\exp(\lambda_1 t) + C_2 D\exp(\lambda_2 t)), \quad (19)$$

$$\frac{dh_1}{dt} + ET_1 + R_h h_1 = g(C_1(\lambda_1 - C)\exp(\lambda_1 t) + C_2(\lambda_2 - C)\exp(\lambda_2 t)). \quad (20)$$

由(19)，(20)式，

$$T_1(t) = \int_0^t f(C_1 D\exp(\lambda_1 \tau) + C_2 D\exp(\lambda_2 \tau))\exp\lambda_1(t - \tau)d\tau, \quad (21)$$

$$h_1(t) = \int_0^t g(C_1 D\exp(\lambda_1 \tau) + C_2 D\exp(\lambda_2 \tau))\exp\lambda_2(t - \tau)d\tau. \quad (22)$$

同理，p 的二次幂的系数得

$$\frac{dT_2}{dt} - CT_2 - Dh_2 = f_T(C_1 D\exp(\lambda_1 t) + C_2 D\exp(\lambda_2 t))T_1, \quad (23)$$

$$\frac{dh_2}{dt} + ET_2 + R_h h_2 = g_h(C_1(\lambda_1 - C)\exp(\lambda_1 t) + C_2(\lambda_2 - C)\exp(\lambda_2 t))h_1. \quad (24)$$

由(23)，(24)式可以解出 T_2,h_2.

因此，可得到模型(1)，(2)的二次近似解 $T_{2\mathrm{app}}$，$h_{2\mathrm{app}}$ 为

$$T_{2\mathrm{app}}(t) = C_1 D\exp(\lambda_1 t) + C_2 D\exp(\lambda_2 t) + \int_0^t [f(C_1 D\exp(\lambda_1 \tau) + C_2 D\exp(\lambda_2 \tau)) + f_T(C_1 D\exp(\lambda_1 \tau) + C_2 D\exp(\lambda_2 \tau))T_1] \times \exp\lambda_1(t - \tau)d\tau, \quad (25)$$

$$h_{2\mathrm{app}}(t) = C_1(\lambda_1 - C)\exp(\lambda_1 t) + C_2(\lambda_2 - C)\exp(\lambda_2 t) + \int_0^t [g(C_1 D\exp(\lambda_1 \tau) + C_2 D\exp(\lambda_2 \tau)) + g_h(C_1 D\exp(\lambda_1 \tau) + C_2 D\exp(\lambda_2 \tau))h_1] \times \exp\lambda_2(t - \tau)d\tau. \quad (26)$$

其中 $\lambda_i(i = 1,2)$ 由(9)，(10)式确定，而 $C_i(i = 1,2)$，为任意常数，T_1,h_1 分别由(21)，(22)式表示.

继续用相同的方法可得到模型(1)，(2)的任意 n 次的近似解 $T_{n\mathrm{app}},h_{n\mathrm{app}}$ 为

$$T_{2\mathrm{app}}(t) = C_1 D\exp(\lambda_1 t) + C_2 D\exp(\lambda_2 t) + \int_0^t \Big[f(C_1 D\exp(\lambda_1 \tau) + C_2 D\exp(\lambda_2 \tau)) + \sum_{i=1}^{n}\Big[\frac{1}{i!}\frac{\partial^i}{\partial p^i}f(\sum_{j=0}^{\infty} T_j p^j)\Big]_{p=0}\Big] \times \exp\lambda_1(t - \tau)d\tau, \quad (27)$$

$$h_{n\mathrm{app}}(t) = C_1(\lambda_1 - C)\exp(\lambda_1 t) + C_2(\lambda_2 - C)\exp(\lambda_2 t) + \int_0^t \Big[g(C_1 D\exp(\lambda_1 \tau) + C_2 D\exp(\lambda_2 \tau)) + \sum_{i=1}^{n}\Big[\frac{1}{i!}\frac{\partial^i}{\partial p^i}g(\sum_{j=0}^{\infty} h_j p^j)\Big]_{p=0}\Big] \times \exp\lambda_1(t - \tau)d\tau. \quad (28)$$

其中 $\lambda_i(i = 1,2)$ 由(9)，(10)式确定，而 $C_i(i = 1,2)$，为任意常数，$T_i,h_i(i = 0,1,2,\cdots,n - 1)$ 分别为逐次已知的函数.

由模型(1)，(2)及其假设［H］，可以证明若用上述方法得到的级数(15)，(16)式在 $p \in [0.1]$ 上为一致收敛的级数. 因此 $T = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)$，$h = \sum_{k=0}^{\infty} h_k(t)$ 便为扰动 ENSO 模型气-海振子模型(1)，(2)的精确解[56].

4. 近似解的精度估计

现在来估计由上述得到的近似解的精度. 为了简单起见，我们仅考虑模型为微扰的情形 $f(T) = \varepsilon\sin T$，$g(h) = \varepsilon\cosh(0 < \varepsilon \ll 1)$，且只研究二次近

似 $T_{2\mathrm{app}}, h_{2\mathrm{app}}$ 的精度.

考虑微扰 ENSO 模型气-海振子

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = CT + Dh + \varepsilon \sin T, \tag{29}$$

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -ET - R_h h + \cos h, \tag{30}$$

其中 ε 为正的小参数, C, D, E, R_h 为正常数.

由用同伦映射计算出的二次近似 $T_{2\mathrm{app}}, h_{2\mathrm{app}}$ 的表示式(25),(26)得

$$\begin{aligned} T_{2\mathrm{app}}(t) = {} & C_1 D\exp(\lambda_1 t) + C_2 D\exp(\lambda_2 t) \\ & + \int_0^t [\varepsilon \sin(C_1 D\exp(\lambda_1 \tau) + C_2 D\exp(\lambda_2 \tau)) \\ & + \varepsilon^2 \cos(C_1 D\exp(\lambda_1 \tau) + C_2 D\exp(\lambda_2 \tau)) \\ & \times \int_0^\tau \sin(C_1 D\exp(\lambda_1 \tau_1) \\ & + C_2 D\exp(\lambda_2 \tau)) \exp\lambda_1(\tau - \tau_1) d\tau_1] \\ & \times \exp\lambda_1(t-\tau)\mathrm{d}\tau, \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} h_{2\mathrm{app}}(t) = {} & C_1(\lambda_1 - C)\exp(\lambda_1 t) \\ & + C_2(\lambda_2 - C)\exp(\lambda_2 t) \\ & + \int_0^t [\varepsilon \cos(C_1 D\exp(\lambda_1 \tau) + C_2 D\exp(\lambda_2 \tau)) \\ & - \varepsilon^2 \sin(C_1 D\exp(\lambda_1 \tau) + C_2 D\exp(\lambda_2 \tau)) \\ & \times \int_0^\tau \cos(C_1 D\exp(\lambda_1 \tau_1) \\ & + C_2 D\exp(\lambda_2 \tau_1)) \exp\lambda_2(\tau - \tau_1) \mathrm{d}\tau_1] \\ & \times \exp\lambda_1(t-\tau)\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{32}$$

另一方面,因为本模型是微扰的情形,我们可以用摄动方法来求出问题(29),(30)的渐近解 $T_{\mathrm{asy}}, h_{\mathrm{asy}}$.

令

$$T_{\mathrm{asy}} = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{T}_i(t)\varepsilon^i, \quad h_{\mathrm{asy}} = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{h}_i(t)\varepsilon^i. \tag{33}$$

将(33)式代入(29),(30)式,展开非线性项,合并 ε 的各次幂,分别令 $\varepsilon^0, \varepsilon^1$ 的系数为零,我们有

$$\frac{\mathrm{d}\bar{T}_0}{\mathrm{d}t} = C\bar{T}_0 + D\bar{h}_0, \tag{34}$$

$$\frac{\mathrm{d}\bar{h}_0}{\mathrm{d}t} = -E\bar{T}_0 - R_h\bar{h}_0, \tag{35}$$

$$\frac{\mathrm{d}\bar{T}_1}{\mathrm{d}t} = C\bar{T}_1 + D\bar{h}_1 + \sin\bar{T}_0, \tag{36}$$

$$\frac{\mathrm{d}\bar{h}_1}{\mathrm{d}t} = -E\bar{T}_1 - R_h\bar{h}_1 + \cos\bar{h}_0, \tag{37}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\bar{T}_2}{\mathrm{d}t} = {} & -C\bar{T} + D\bar{h}_2 + \cos(C_1 D\exp(\lambda_1 t) \\ & + C_2 D\exp(\lambda_2 t))\bar{T}_1, \end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\bar{h}_2}{\mathrm{d}t} = {} & -E\bar{T}_2 - R_h\bar{h}_2 - \sin(C_1(\lambda_1 - C)\exp(\lambda_1 t) \\ & + C_2(\lambda_2 - C)\exp(\lambda_2 t))\bar{h}_1. \end{aligned} \tag{39}$$

不难得到系统(34),(35)式、(36),(37)式和(38),(39)式的解分别为

$$\bar{T}_0(t) = C_1 D\exp(\lambda_1 t) + C_2 D\exp(\lambda_2 t), \tag{40}$$

$$\begin{aligned} \bar{h}_0(t) = {} & C_1(\lambda_1 - C)\exp(\lambda_1 t) \\ & + C_2(\lambda_2 - C)\exp(\lambda_2 t), \end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_1(t) = {} & \int_0^t \sin(C_1 D\exp(\lambda_1 \tau) + C_2 D\exp(\lambda_2 \tau)) \\ & \times \exp\lambda_1(t-\tau)\mathrm{d}\tau, \end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned} \bar{h}_1(t) = {} & \int_0^t \cos(C_1 D\exp(\lambda_1 \tau) + C_2 D\exp(\lambda_2 \tau)) \\ & \times \exp\lambda_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau, \end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_2(t) = {} & \cos(C_1 D\exp(\lambda_1 \tau) + C_2 D\exp(\lambda_2 \tau)) \\ & \times \int_0^\tau [\sin(C_1 D\exp(\lambda_1 \tau_1) \\ & + C_2 D\exp(\lambda_2 \tau_1))]\exp\lambda_1(\tau - \tau_1)\mathrm{d}\tau_1, \end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned} \bar{h}_2(t) = {} & -\sin(C_1 D\exp(\lambda_1 \tau) + C_2 D\exp(\lambda_2 \tau)) \\ & \times \int_0^\tau [\sin(C_1 D\exp(\lambda_1 \tau_1) \\ & + C_2 D\exp(\lambda_2 \tau_1))\exp\lambda_1(\tau - \tau_1)] \\ & \times \exp\lambda_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{45}$$

将(40)—(45)式代入(33)式,由摄动方法的理论[40]知,便得到微扰 ENSO 模型气-海振子(29),(30)达到精度为 $O(\varepsilon^3)$ 的渐近解 $\bar{T}_{2\mathrm{asy}}, \bar{h}_{2\mathrm{asy}}$ 为

$$\begin{aligned} \bar{T}_{2\mathrm{asy}}(t) = {} & C_1 D\exp(\lambda_1 t) + C_2 D\exp(\lambda_2 t) \\ & + \varepsilon\int_0^t \sin(C_1 D\exp(\lambda_1 \tau) + C_2 D\exp(\lambda_2 \tau)) \\ & \times \exp\lambda_1(t-\tau)\mathrm{d}\tau + \varepsilon^2\cos(C_1 D\exp(\lambda_1 \tau) \\ & + C_2 D\exp(\lambda_2 \tau))\int_0^\tau [\sin(C_1 D\exp(\lambda_1 \tau_1) \\ & + C_2 D\exp(\lambda_2 \tau_1))]\exp\lambda_1(\tau - \tau_1)\mathrm{d}\tau_1 \\ & + O(\varepsilon^3), \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned} \bar{h}_{2\mathrm{asy}}(t) = {} & C_1(\lambda_1 - C)\exp(\lambda_1 t) \\ & + C_2(\lambda_2 - C)\exp(\lambda_2 t) \end{aligned}$$

$$+ \varepsilon\int_0^t \cos(C_1 D\exp(\lambda_1\tau) + C_2 D\exp(\lambda_2\tau))$$
$$\times \exp\lambda_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau - \varepsilon^2\sin(C_1 D\exp(\lambda_1\tau)$$
$$+ C_2 D\exp(\lambda_2\tau))\int_0^\tau[\sin(C_1 D\exp(\lambda_1\tau_1)$$
$$+ C_2 D\exp(\lambda_2\tau_1))\exp\lambda_1(\tau-\tau_1)\mathrm{d}\tau_1]$$
$$\times \exp\lambda_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau + O(\varepsilon^3),$$
$$0 < \varepsilon \ll 1. \tag{47}$$

比较(31),(32)式与(46),(47)式,其主要部分完全相同. 故 $T_{2\mathrm{app}}(t)$, $h_{2\mathrm{app}}(t)$ 与精确解的误差具有 $O(\varepsilon^3)(0<\varepsilon\ll1)$ 的精度. 因此,用同伦映射方法计算的扰动 ENSO 模型气-海振子的近似解有较好的精确性.

这样,由表示式(25),(26)或(27),(28)出发,我们能进一步分析赤道东太平洋 ENSO 模型(1),(2)气-海振荡的 SST 异常和温跃层异常.

5. 结　论

本文借助同伦映射方法研究了一类扰动 El Niño-南方涛动(ENSO)模型的振子,得到了对应问题一次、二次和高次近似. 用同伦方法得到的近似解具有较高的近似度. 这个结果证实,用同伦映射方法来分析赤道东太平洋 ENSO 模型的 SST 异常和气-海振子温跃层深度异常是实用而有效的方法.

[1] Bjerknes J A 1996 *Tellus.* **18** 820
[2] McCreary J P, Anderson D L T 1984 *Mon. Wea. Rev.* **112** 934
[3] Cane M A, Zebiak S E 1985 **228** 1084
[4] Anderson D L T, McCreary J P 1985 *J. Atmos. Sci.* **42** 615
[5] Zebiak S E, Cane M A 1987 *Mon. Wea. Rev.* **115** 2262
[6] Schopf P S, Suarez M J 1988 *J. Atmos. Sci.* **45** 549
[7] Philander S G, Lau N C, Pacanowski R C 1989 *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser.* A **329** 167
[8] Latif M, Sterl A, Maier-Reimer E 1993 *J. Climate* **6** 700
[9] Neelin J D 1989 *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser.* A **329** 189
[10] Neelin J D 1990 *J. Atmos. Sci.* **47** 674
[11] Bjerknes J 1969 *Mon. Wea. Rev.* **97** 163
[12] Neelin J D, Latif M, Jin F F 1994 *Annu. Rev. Fluid Mech.* **26** 617
[13] McWilliams J C, Gent P R 1991 *J. Atmos. Sci.* **35** 962
[14] Lau K M 1981 *J. Atmos. Sci.* **38** 248
[15] McCreary J P 1983 *Mon. Wea. Rev.* **111** 370
[16] Philander S G. H, Yamagata T, Pacanowski R C 1984 *J. Atmos. Sci.* **41** 604
[17] Gill A E 1985 *Elsevier Oceanography Series* **40** 303
[18] Yamagata T 1985 *Elsevier Oceanography Series* **40** 637
[19] Hirst A C 1986 *J. Atmos. Sci.* **43** 606
[20] Xie S P, Kubikawa A, Hanawa K 1989 *J. Climate* **2** 946
[21] Wakata, Y, Sarachik E S 1991 *J. Atmos . Sci.* **48** 2060
[22] Jin F F, Neelin J D 1993 *J. Atmos. Sci.* **50** 3523
[23] Jin F F, Neelin J D, Ghil M 1994 *Science* **264** 70
[24] Wang C, Weisberg R H, Virmani J I 1999 *J. Geophys. Res.* **104** 5131
[25] Wang B, Wang Y 1996 *J. Climate* **9** 1586
[26] Cane M A, Munnich M, Zebiak S E 1990 *J. Atmos. Sci.* **47** 1562
[27] Wang B, Fang Z 1996 *J. Atmos. Sci.* **53** 2786
[28] Wang B, Barcilon A, Fang Z 1999 *J. Atmos. Sci.* **56** 5
[29] Dai X G, Wang A H, Chou J F 2001 *Chin. Phys. Sin.* **50** 606 (in Chinese) [戴新刚、王爱慧、丑纪范 2001 物理学报 **50** 606]
[30] Feng G L, Dong W J, Jia X J 2002 *Chin. Phys. Sin.* **51** 1181 (in Chinese) [封国林、董文杰、贾晓静、曹鸿兴 2002 物理学报 **51** 1181]
[31] Liu S K, Fu Z T, Liu S D 2002 *Chin. Phys. Sin.* 2002 **51** 10 (in Chinese) [刘式适、付遵涛、刘式达、赵　强 2002 物理学报 **51** 10]
[32] Lin W T, Ji Z Z, Wag B 2003 *Chinese Science Bulletin* **48** 999
[33] Lin W T, Mo J Q 2003 *Chinese Science Bulletin* **48**(Ⅱ) 5
[34] Mo J Q, Lin W T 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 996 (in Chinese) [莫嘉琪、林万涛 2004 物理学报 **53** 996]
[35] Mo J Q, Lin W T 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 996 (in Chinese) [莫嘉琪、林万涛 2004 物理学报 **53** 996]
[36] Mo J Q, Lin W T 2005 *Chin. Phys.* **14** 875
[37] Mo J Q, Lin W T, Wang H 2009 *Acta Math. Sin.* **29** 101 (in Chinese) [莫嘉琪、林万涛 2009 物理学报 **59** 101]
[38] Mo J Q, Lin W T 2008 *Chin. Phys.* B **17** 370
[39] Mo J Q, Lin W T 2008 *Chin. Phys.* B **17** 743
[40] de Jager E M, Jiang F 1996 *The Theory of Singular Perturbation* (Amsterdam: North-Holland Publishing Co)
[41] Sagon G 2008 *Nonlinearity* **21** 1183
[42] Hovhannisyan G, Vulanovic 2008 *Nonlinear Stud.* **15** 297
[43] Barbu L, Cosma 2009 *J. Math. Anal. Appl.* **351** 392
[44] Ramos M 2009 *J. Math. Anal. Appl.* **352** 246
[45] Mo J Q, Zhang W J, He M 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1843 (in Chinese) [莫嘉琪、张伟江、何　铭 2007 物理学报 **56** 1843]
[46] Mo J Q, Zhang W J, Chen X F 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6169 (in Chinese) [莫嘉琪、张伟江、陈贤峰 2007 物理学报 **56** 6689]

[47] Mo J Q 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 695 (in Chinese) [莫嘉琪 2009 物理学报 **58** 695]
[48] Mo J Q, Yao J S 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 7419 (in Chinese) [莫嘉琪、姚静荪 2009 物理学报 **58** 7419]
[49] Mo J Q 2009 *Acta Phys. Sin* **58** 2930 (in Chinese) [莫嘉琪 2008 物理学报 **58** 2930]
[50] Mo J Q, Cheng Yan 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4379 (in Chinese) [莫嘉琪、陈 燕 2009 物理学报 **58** 4379]
[51] Mo J Q 2009 *Science in China, Ser.* G **52** 1007
[52] Mo J Q, Chen X F 2010 *Acta Phys. Sin.* **50** 1403 (in Chinese) [莫嘉琪、陈贤峰 2010 物理学报 **50** 1403]
[53] Mo J Q, Lin Y H, Lin W T 2010 *Chin. Phys.* B **19** 030202
[54] Mo J Q 2010 *Chin. Phys.* B **19** 010203
[55] Liao S J, Chang A T 1998 *ASME J. Appl. Mech.* **65** 914
[56] Liao S J 2004 *Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method* (New York: CRC Press Co)
[57] Jin F F 1997 *J. Atmos. Sci.* **54** 811
[58] Wang C 2001 *Advances in Atmospheric Sciences* **18** 674

The solutions for disturbed EI Niño/La Niña-southern oscillation model*

Xie Feng[1)2)] Lin Yi-Hua[3)] Lin Wan-Tao[3)] Mo Jia-Qi[2)4)†]

1) (*College of Science, Donghua University, Shanghai 201620, China*)

2) (*Division of Computational Science, E-Institutes of Shanghai Universities, at SJTU, Shanghai 200240, China*)

3) (*LASG, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029, China*)

4) (*Anhui Normal University, Wuhu 241003, China*)

(Received 22 January 2010; revised manuscript received 19 April 2010)

Abstract

The EI Niño/La Niña and the Southern Oscillation (ENSO) is an interannual phenomenon involved in the tropical Pacific Ocean-atmosphere interactions. This paper, aims at creating an approximate solving method of nonlinear equation for the ENSO models. And based on a class of oscillator of ENSO models, employing the method of homotopic mapping, the approximate and exact solutions of the corresponding problem is studied. The accuracy of approximate solution is discussed. It is proved from the results that homotopic method can be used for analyzing the SST anomaly in the equatorial eastern Pacific and the thermocline depth anomaly of the atmosphere-ocean oscillation for ENSO model.

Keywords: nonlinear, homotopy mapping, perturbation, ENSO model

PACS: 02.30.Mv

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 40876010, 10701023), the Main Direction Program of the Knowledge Innovation Project of Chinese Academy of Sciences (Grant No. KZCX2-YW-Q03-08), the R & D Special Fund for Public Welfare Industry (meteorology) (Grant No. GYHY200806010), the LASG State Key Laboratory Special Fund, the Fundamental Research Funds for the Central Universities (Grant No. 2010B08-2-1), the Foundation of Shanghai Municipal Education Commission (Grant No. E03004) and the Natural Science Foundation of Zhejiang Province (Grant No. Y6090164).

† Corresponding author. E-mail: fxie@dhu.edu.cn, mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn