

一个三维四翼自治混沌系统的拓扑马蹄分析*

贾红艳^{1) 2) †} 陈增强²⁾ 叶菲³⁾

1) (天津科技大学自动化系, 天津 300222)

2) (南开大学自动化系, 天津 300071)

3) (天津大学自动化系, 天津 300072)

(2010年2月6日收到; 2010年4月27日收到修改稿)

基于拓扑马蹄映射理论, 验证了一个三维四翼自治的混沌系统的拓扑马蹄的存在. 由于该混沌系统是连续系统, 首先选取了一个 Poincaré 截面, 并在该截面下定义了该混沌系统的一个一次回归 Poincaré 映射. 通过利用计算机辅助证明方法, 得出了该映射与一个 2 移位映射拓扑半共扼, 说明该三维四翼自治系统的拓扑熵大于或等于 $\ln 2$, 进而证明了该系统的混沌行为.

关键词: 四翼混沌系统, 拓扑马蹄, Poincaré 映射, 拓扑熵

PACS: 02.30.Oz, 05.45.Ac, 05.45.Pq

1. 引言

1963 年 Lorenz 在确定性耗散系统中发现了混沌吸引子^[1], 在随后的几十年来里, 关于混沌的研究和应用吸引了越来越多的关注. 一些混沌吸引子相继被提出, 例如 Chen 系统^[2], Lü 系统、统一的 Lorenz 系统^[3,4], 混沌 Liu 系统^[5], Qi 混沌系统^[6], 分数阶混沌系统^[7-9]、多翼混沌系统^[10-12] 和一些更为复杂的具有两个正 Lyapunov 指数的混沌系统^[13-17] 等. 随着混沌研究的深入, 在混沌通讯和控制等应用领域吸引了越来越多的关注^[18-21]. 因此, 也更进一步促进了包括局部分岔分析、拓扑马蹄分析等混沌理论的研究.

关于混沌, 目前还没有一个严格的定义, 研究工作者除了从吸引子相图、指数图、分岔图、Poincaré 映射、电路实现来证明混沌吸引子的存在外, 往往还通过对混沌系统模型进行详细的理论分析, 力图从数学角度上证明混沌吸引子的存在. 不管是从理论分析, 还是数值仿真或电路实现, 似乎都存在着一定的局限性, 不能从本质上说明混沌. 所以, 从不同角度证明混沌存在性的工作, 正逐步成为了一个研究热点问题,

拓扑马蹄分析就是其中的一个研究方向.

关于拓扑马蹄引理, 首先要追溯到由 Smale 提出的 Smale 马蹄映射^[22], 及 Kennedy 和 York 提出的拓扑马蹄理论^[23,24], 但是拓扑马蹄理论在解决实际问题时显得不够实用和方便. 在上述研究工作的基础上, Yang 等提出了拓扑马蹄引理^[25,26], 并应用该引理证明了 Rössler 系统、Chua 电路、改进的 Chen 系统等拓扑马蹄的存在^[27-30], 从数学角度上, 通过计算机辅助证明的方法证明了系统的混沌行为. 基于 Yang 等提出的拓扑马蹄引理, Wu 等也证明了 Chen 系统、一个流行病模型等^[31-33] 的拓扑马蹄的存在.

拓扑马蹄引理为我们提供了一种严格数学意义下的混沌系统的计算机辅助证明方法, 它能帮助我们更好的研究混沌和利用混沌.

本文简要分析了四翼 Qi 混沌系统, 在它的三个方程的每一个方程中都有一个非线性乘积项, 当选取不同的系统参数时, 即便系统的结构不变, 随着参数选取的不同, 系统会呈现出非常有趣的现象, 即该系统有时是两翼混沌吸引子、有时是四翼混沌吸引子. 对于该四翼吸引子的深入研究或许能帮助我们更好的利用混沌. 因此本文的主要研究工作就是应用拓扑马蹄引理证明该四翼混沌吸引子的存在性.

* 国家自然科学基金(批准号:60774088 和 10772135), 高等学校博士学科点专项科研基金(批准号:20090031110029), 天津市市应用基础及前沿技术研究计划(批准号:08JCZDJC21900), 天津市高等学校科技发展基金(批准号:20088026), 国家教育部留学回国人员科研启动基金资助的课题.

† E-mail: jiah@tust.edu.cn

2. Qi 混沌系统

最近, Qi 等发现了一个新的三维自治的混沌系统^[6]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y - x) + eyz, \\ \dot{y} &= cx + dy - xz, \\ \dot{z} &= -bz + xy. \end{aligned} \quad (1)$$

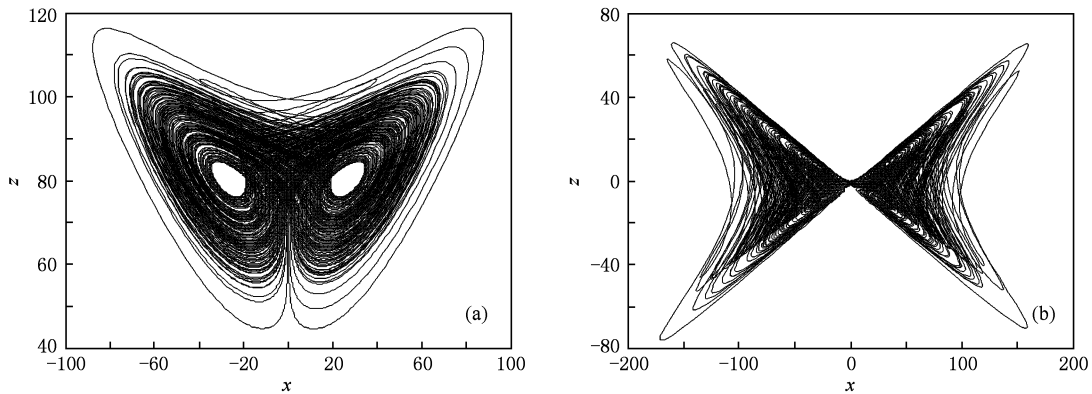


图1 系统(1)的 $x - z$ 平面相轨迹图 (a) $a = 35, b = 8/3, c = 80, d = -1, e = 1$; (b) $a = 14, b = 43, c = -1, d = 16, e = 4$

由于它的更为复杂的动力学特性,吸引了研究工作者的关注. 在这个系统的基础上,相继出现了一些超混沌系统^[15,34,35],因此对这一系统和由它产生的超混沌的理论分析和应用研究显得很有意义. 本文主要针对它在出现四翼吸引子的情况下进行了拓扑马蹄分析.

3. Qi 混沌系统的拓扑马蹄分析

3.1. 拓扑马蹄引理回顾

Yang 等提出的拓扑马蹄引理是本文证明四翼 Qi 混沌系统存在拓扑马蹄的理论依据. 该拓扑马蹄引理可以描述为^[22-33]: 设 X 为一个可分的度量空间, Q 是它的紧子集, $f: Q \rightarrow X$, 并且存在 m 个互不相交的紧致子集 $Q_1, Q_2, \dots, Q_m, f|_{Q_i}$ 是连续的. 如果存在 f 连接簇, 那么将存在一个紧不变集 $Q_I \subset Q$, 使得 $f|_{Q_I}$ 与一个 m 移位映射半共扼.

其中 f 连接簇是这样定义的, 即设 Γ 是 Q 的紧子集, 如果 $\Gamma_i = \Gamma \cap Q_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 是非空的和紧致的, 那么 Γ 就被称为对应于 Q_1, Q_2, \dots, Q_m 的连接. 令 F 为一簇对应于 Q_1, Q_2, \dots, Q_m 的连接, 如

当参数取 $a = 35, b = 8/3, c = 80, d = -1$ 和 $e = 1$ 时, 该系统会表现为一个两翼的混沌吸引子, 如图 1(a) 所示. 经过进一步分析发现, 在它的三个方程中的每一个方程都有一个非线性乘积项, 这也许会出现一些与以往的一些混沌系统不同的动力学特性. 事实确实如此, 当 $a = 14, b = 43, c = -1, d = 16, e = 4$ 时, 该系统会表现为一个四翼的混沌吸引子, 如图 1(b) 所示.

果满足 $\Gamma \subset F \Rightarrow f(\Gamma_i) \subset F$. 那么 F 称为对应于 Q_1, Q_2, \dots, Q_m 的 f 连接簇.

m 移位映射 σ 是一个度量空间到它自身的映射^[31], 即

$$\sigma(s)_i = s_{i+1}, \quad (2)$$

该映射的拓扑熵 $\text{ent}(\sigma) = \ln m$.

当两个动力系统 (X, f) 与 (Y, g) 是半共扼的, 那么 f 拓扑熵不小于 g 拓扑熵^[31], 即 $\text{ent}(f) \geq \text{ent}(g)$.

所以进一步根据拓扑马蹄引理, 可以得到 $\text{ent}(f) \geq \text{ent}(\sigma) = \ln m$, 如果 $m > 1$, 那么动力系统 f 就是混沌的.

基于以上的介绍, 本文首先选取了该四翼混沌系统的一个 Poincaré 截面, 同时定义了一个一次回归 Poincaré 映射. 然后, 在该截面处, 证明了该四翼混沌系统的一次回归 Poincaré 映射与一个 2 移位映射半共扼, 也就是说, Qi 系统的拓扑熵大于或等于 $\ln 2$, 并且是混沌的.

3.2. Qi 混沌系统的拓扑马蹄分析

拓扑马蹄理论是对映射建立起来的, 因此对于像 Qi 混沌系统这样的连续系统还不能直接应用, 所

以,在这里需要建立一个 Poincaré 截面和 Poincaré 映射.

首先,通过数值仿真的方法,我们获得了在 $y = 0$ 处的 Poincaré 截面,如图 2 所示. 通过对该截面的分析,可以看到, Qi 混沌系统的四个不同的翼. 在这个截面下,我们选取了 $X = |EFGH|$ 截面,它的四个顶点分别为 $E = [-100, 0, 5], F = [-100, 0, 60], G = [0, 0, 60], H = [0, 0, 5]$, 如图 3 所示. 在该 X 截面内选取一个子集 $Q = |ABCD|$, 它的四个顶点分别为 $A = [-46.1, 0, 10.8], B = [-50, 0, 12.5], C = [-53, 0, 10.5], D = [-47, 0, 9]$, 并且满足 $Q \subset X$.

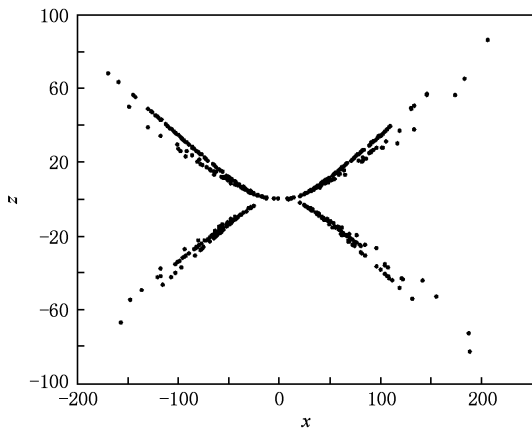


图2 系统(1)在 $y = 0$ 时的 Poincaré 截面

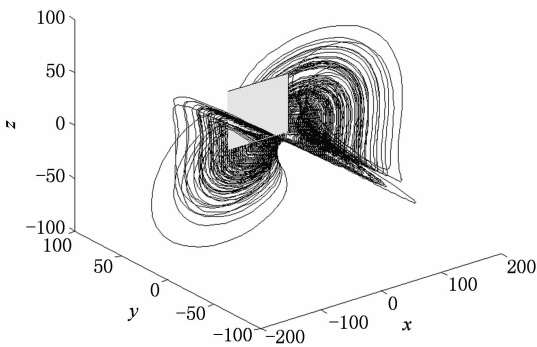


图3 系统(1)的 x - y - z 平面的相轨迹图和它的 Poincaré 截面

这样,可以定义一个一次回归 Poincaré 映射 $p: Q \rightarrow X$, 也就是说,对于任意点 $x \in Q = |ABCD|$, $p(x)$ 是由初始点 x 出发的 Qi 系统在 X 截面内的第一回归映射或 Poincaré 映射. 在这个映射下,子集 $Q = |ABCD|$ 的像 $p(|ABCD|)$ 是窄的穿越整个子集 $Q = |ABCD|$ 的带,如图 4 所示. 其中 $A' = p(A) = [-53.9202, 0, 11.7552], B' = p(B) =$

$[-81.8046, 0, 26.0591], C' = p(C) = [-80.2709, 0, 25.3435], D' = p(D) = [-65.2574, 0, 15.8191]$ 分别是点 A, B, C, D 在该 Poincaré 映射下的像 $p(A), p(B), p(C), p(D)$. 从图 4 中可以看到,子集 $Q = |ABCD|$ 的两条边 AD 和 BC 都被映射到了 $Q = |ABCD|$ 的一侧,这或许会帮助我们发现马蹄的存在.

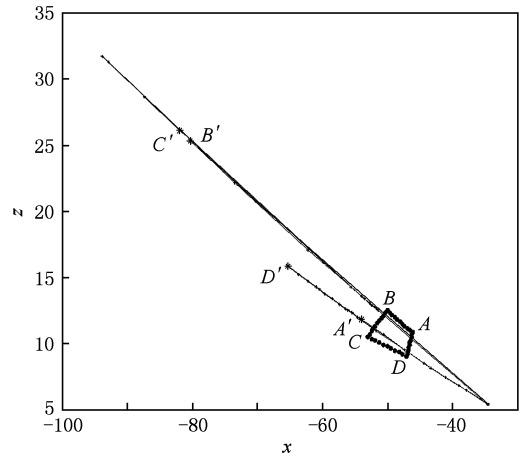


图4 $Q = |ABCD|$ 在 Poincaré 映射 $p: Q \rightarrow X$ 下的像 $|A'B'C'D'|$

为了应用拓扑马蹄引理验证该系统存在拓扑马蹄,就必须在子集 $Q = |ABCD|$ 内找到至少两个互不相交的子集,这样就可以发现对应于这两个互不相交的子集存在一个一次回归 Poincaré 映射 $p: Q \rightarrow X$ 的连接簇,因而可以应用拓扑马蹄引理验证该系统的拓扑马蹄的存在,也就进一步证明了系统的混沌吸引子的存在. 经过大量的尝试后,我们发现了子集 $Q = |ABCD|$ 内两个互不相交的子集 $|AIJD|, |KMNO|$, 如图 5 所示. 其中 $|AIJD|$ 的四个顶点坐标为 $A = [-46.1, 0, 10.8], I = [-47.27, 0, 11.31], J = [-49.7, 0, 9.68], D = [-47, 0, 9], |KMNO|$ 的四个顶点坐标为 $K = [-47.66, 0, 11.48], M = [-48.7832, 0, 11.9696], N = [-51.8, 0, 10.2]$ 和 $O = [-50, 0, 9.75]$.

在一次回归 Poincaré 映射 $p: Q \rightarrow X$ 下,第一个子集 $|AIJD|$ 的像 $|A'I'J'D'|$ 如图 6 所示. 从图 6 中可看出,边 AD 被映射为 $A'D'$, 在 $|AIJD|$ 的上面,同时边 IJ 被映射为 $I'J'$, 在 $|AIJD|$ 的下面,通过进一步分析,可以发现子集 $|AIJD|$ 的像 $|A'I'J'D'|$ 完全穿过了子集 $Q = |ABCD|$.

同样在一次回归 Poincaré 映射 $p: Q \rightarrow X$ 下,第二个子集 $|KMNO|$ 的像 $|K'M'N'O'|$ 如图 7 所示,从

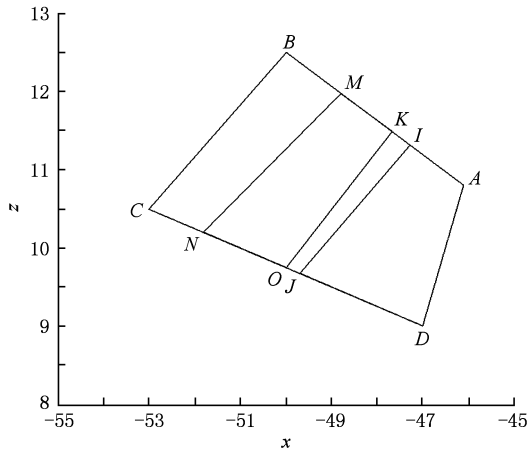


图5 $Q = |ABCD|$ 内两个互不相交的子集 $|AIJD|$, $|KMNO|$

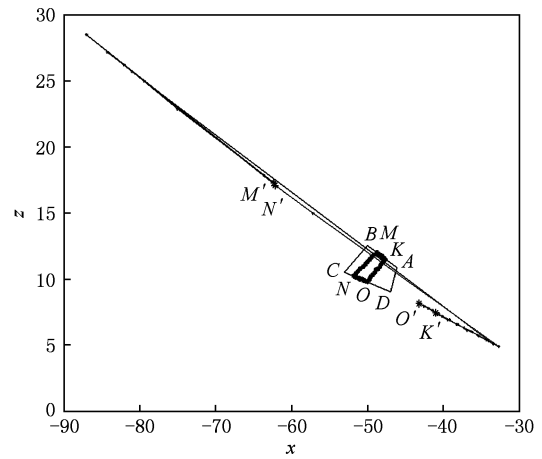


图7 子集 $|KMNO|$ 的像 $|K'M'N'O'|$

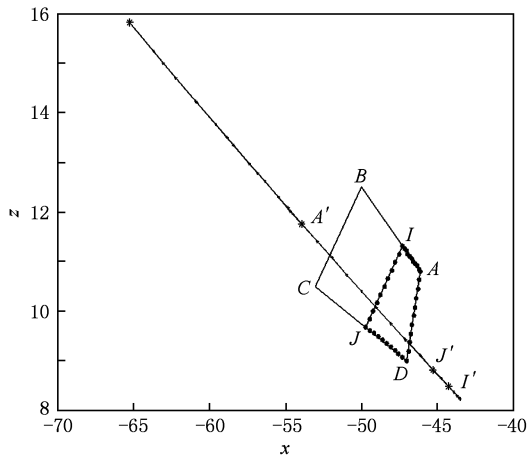


图6 子集 $|AIJD|$ 的像 $|A'I'J'D'|$

图7中可看出,边 MN 被映射为 $M'N'$, 在 $|KMNO|$ 的上面,同时边 KO 被映射为 $K'O'$, 在 $|KMNO|$ 的下面. 通过进一步分析,可以发现子集 $|KMNO|$ 的像 $|K'M'N'O'|$ 完全穿过了子集 $Q = |ABCD|$.

因此,对于 $Q = |ABCD|$ 所对应于子集 $|AIJD|$ 和子集 $|KMNO|$ 的每一个连接 γ , 可以得到它的像 $p(\gamma \cap |AIJD|)$ 和 $p(\gamma \cap |KMNO|)$ 也完全穿过了子集 $Q = |ABCD|$. 也就是说, $p(\gamma \cap |AIJD|)$ 和 $p(\gamma \cap |KMNO|)$ 仍然是 $Q = |ABCD|$ 对应于子集 $|AIJD|$ 和子集 $|KMNO|$ 的连接. 根据定义1可知存在一个 Q_i 系统的一次回归 Poincaré 映射的连接簇, 进一步根据定理1和拓

扑马蹄引理可知, Q_i 系统的一次回归 Poincaré 映射与一个2移位映射拓扑半共轭, 它的拓扑熵 $\text{ent}(p) \geq \ln 2 > 0$. 也就是说 Q_i 混沌系统在 $a = 14, b = 43, c = -1, d = 16, e = 4$ 时的拓扑熵大于零, 该系统是混沌的.

由上述分析可得到下面结论: Q_i 混沌系统的一次回归 Poincaré 映射 $p: Q \rightarrow X$, 其中 $X = |EFGH|$, 它的四个顶点分别为 $E = [-100, 0, 5], F = [-100, 0, 60], G = [0, 0, 60], H = [0, 0, 5], Q = |ABCD|$, 它的四个顶点分别为 $A = [-46.1, 0, 10.8], B = [-50, 0, 12.5], C = [-53, 0, 10.5], D = [-47, 0, 9]$, 并且满足 $Q \subset X$. 满足如下性质: 在它的参数取 $a = 14, b = 43, c = -1, d = 16, e = 4$ 时的拓扑熵大于零, 进一步从拓扑马蹄理论的角度上证明了 Q_i 混沌系统的混沌特性.

4. 结 论

本文简要分析了一个三维四翼自治的混沌系统, 该系统在选取不同的系统参数时, 会出现非常有趣的动力学特性, 即可以出现两翼或四翼混沌吸引子. 基于拓扑马蹄引理, 本文选取了一个 Poincaré 截面, 在该截面上建立了一个一次回归 Poincaré 映射, 并用计算机辅助证明的方法证明了在这个混沌系统中存在着拓扑马蹄, 因此从理论上进一步证明了系统的混沌特性, 这应该能帮助我们更好的研究混沌和利用混沌.

- [1] Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 130
- [2] Chen G R, Ueta T 1999 *Int. J. Bifur. Chaos.* **9** 1465
- [3] Lü J H, Chen G R, Cheng D Z, Celikovskiy S 2002 *Int. J. Bifur. Chaos.* **12** 2917
- [4] Lü J H, Chen G R 2002 *Int. J. Bifur. Chaos* **12** 659
- [5] Liu C X, Liu T, Liu L, Liu K 2004 *Chaos, Solitons & Fractals* **22** 1031
- [6] Qi G Y, Chen G R, Du S Z, Chen Z Q, Yuan Z Z 2005 *Physica A* **352** 295
- [7] Liu C X 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6865 (in Chinese) [刘崇新 2007 物理学报 **56** 6865]
- [8] Wang F Q, Liu C X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3922 (in Chinese) [王发强、刘崇新 2006 物理学报 **55** 3922]
- [9] Chen X R, Liu C X, Wang F Q, Liu Y X 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1416 (in Chinese) [陈向荣、刘崇新、王发强、李永勋 2008 物理学报 **57** 1416]
- [10] Wang F Z, Qi G Y, Chen Z Q, Yuan Z Z 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3137 (in Chinese) [王繁珍、齐国元、陈增强、袁著祉 2007 物理学报 **56** 3137]
- [11] Qi G Y, Chen G R, van Wyk M A, van Wyk B J, Zhang Y H 2008 *Chaos Solitons & Fractals* **38** 705
- [12] Chen Z Q, Yang Y, Yuan Z Z 2008 *Chaos, Solitons & Fractals* **38** 1187
- [13] Li Y X, Wallace K. S. Tang, Chen G R 2005 *Int. J. Circ. Theor. Appl.* **33** 235
- [14] Wang J Z, Chen Z Q, Chen G R, Yuan Z Z 2008 *Int. J. Bifur. Chaos.* **18** 3309
- [15] Jia H Y, Chen Z Q, Yuan Z Z 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4469 [贾红艳、陈增强、袁著祉 2009 物理学报 **58** 4469]
- [16] Yu S M, Lü J H, Chen G R. 2007 *Physics letter A* **364** 244
- [17] Cang S J, Chen Z Q, Yuan Z Z 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1493 (in Chinese) [仓诗建、陈增强、袁著祉 2008 物理学报 **57** 1493]
- [18] Udaltsov V S, Goedgebuer J P, Larger L, Cuenot J B, Rhodes W T 2003 *Optics and Spectroscopy.* **95** 114
- [19] Hsieh J Y, Hwang C C, Wang A P, Li W J 1999 *International Journal of Control.* **72** 882
- [20] Song Y Z 2007 *Chin. Phys.* **16** 1918
- [21] Song Y Z Zhao G Z, Qi D L 2006 *Chin. Phys.* **15** 2266
- [22] Wiggins S 1990 *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos* (New York: Springer-Verlag) p421
- [23] Kennedy J, Kocak S, Yorke J A 2001 *Amer. Math. Mon.* **208** 411
- [24] Kennedy J, Yorke J A 2001 *Trans. Amer. Math. Soc.* **353** 2513
- [25] Yang X S, Tang Y 2004 *Chaos, Solitons & Fractals* **19** 841
- [26] Yang X S 2004 *Chaos, Solitons & Fractals* **20** 1149
- [27] Yang X S, Yu Y G, Zhang S C 2003 *Chaos, Solitons & Fractals* **18** 223
- [28] Yang X S, Li Q D 2005 *Int. J. Bifur. Chaos.* **15** 1823
- [29] Huang Y, Yang X S 2005 *Chaos, Solitons & Fractals* **26** 79
- [30] Yang X S, Li Q D 2004 *Int. J. Bifur. Chaos.* **14** 1847
- [31] Wu W J, Chen Z Q, Yuan Z Z 2009 *Solitons & Fractals* **41** 2756
- [32] Wu W J, Chen Z Q, Yuan Z Z 2008 *The 9th International Conference for Young Computer Scientists.* Zhang Jia Jie, Hunan, China, November 18—21, 2008 p3033
- [33] Wu W J, Chen Z Q, Chen G R 2009 *International Workshop on Chaos-Fractals Theories and Applications.* Shenyang, Liaoning, China, November 6—8, 2009 p277
- [34] Chen Z Q, Yang Y, Qi G Y, Yuan Z Z 2007 *Phys. Lett. A* **360** 696
- [35] Wang J Z, Chen Z Q, Yuan Z Z 2006 *Chin. Phys.* **15** 1216

Topological horseshoe analysis for a three-dimensional four-wing autonomous chaotic system*

Jia Hong-Yan^{1)2)†} Chen Zeng-Qiang²⁾ Ye Fei³⁾

1) (*Department of Automation, Tianjin University of Science and Technology, Tianjin 300222, China*)

2) (*Department of Automation, Nankai University, Tianjin 300071, China*)

3) (*Department of Automation, Tianjin University, Tianjin 300072, China*)

(Received 6 February 2010; revised manuscript received 27 April 2010)

Abstract

Based on topological horseshoe map theory, the paper analyses the existence of topological horseshoe in a 3-D four-wing chaotic system. As the chaotic system is continuous, the paper first chooses a Poincaré section, then under which defines a first return Poincaré map. A conclusion that the Poincaré map is semi-conjugate to 2-shift map can be obtained by utilizing computer-assisted verification, showing that the topological entropy of the 3-D four-wing system is larger than or equal to $\ln 2$, which further verifies the chaotic characteristic of the system.

Keywords: four-wing chaos system, topological horseshoe, Poincaré map, topological entropy

PACS: 02.30.Oz, 05.45.Ac, 05.45.Pq

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 60774088, 10772135), the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (Grant No. 20090031110029), the Application Base and Frontier Technology Project of Tianjin, China (Grant No. 08JCZDJC21900), the Development of Science and Technology Foundation of the Higher Education Institutions of Tianjin (Grant No. 20088026), the Scientific Research Starting Foundation for the Returned Overseas Chinese Scholars, Ministry of Education of China.

† Corresponding author. E-mail: jiahy@tust.edu.cn