

用约瑟夫森电荷比特系统实现一种特殊量子态的传输*

吴世海[†] 胡明亮 李 季 惠小强

(西安邮电学院理学院, 西安 710061)

(2010年3月19日收到; 2010年4月12日收到修改稿)

构造了一种约瑟夫森电荷量子比特电路系统, 并研究了四量子位态在该系统中的传输特性. 对均匀与非均匀传输通道两种情形分别讨论了怎样通过控制外加磁通来实现激发态 $|1\rangle$ 从第一量子位到第四量子位的理想传输. 此外还分析了量子态在该系统中传输时的平均保真度, 结果表明该系统不能传输一个任意态.

关键词: 量子态传输, 约瑟夫森电荷比特

PACS: 03.67.Hk, 85.25.Cp

1. 引言

在各种量子信息处理过程中, 量子态的高保真度传输是一个至关重要的问题. 量子信息处理系统要求能够在其各个处理器、寄存器和存储缓冲器等之间自由交换信息. 但和经典信息处理不同的是, 在量子计算机内部, 信息是由编码量子态来承载的, 信息传输的本质就是量子态的传输. 目前, 光纤^[1, 2]仍是量子态(利用光子作为载体)远距离传输的首选设备, 但是光子不适合长时间存储, 所以在传输设备和量子处理器、寄存器和存储缓冲器等之间需要增添转换接口, 从而增加了系统设计的复杂度.

最近, 人们开始把注意力转向固态量子系统中的量子信息传输问题. 这方面主要有两种基本的研究思路, 一种是设法把固态量子器件和光纤传输系统以最佳的方式耦合起来, 然后通过光纤来在不同量子器件之间实现信息的传输^[3]. 另一种是直接利用固态量子系统(如超导约瑟夫森结、量子点等)作为传输通道, 实现量子计算机内部各个模块之间的短距离通信^[4]. Bose 提出用自旋链作为传输线路来实现编码量子态的传输^[5]. 在 Bose 的传输方案中, 待

传送量子态被编码在一个已经初始化的自旋开链的一端, 经过一段时间的动力学演化后就可以在该链的另一端以一定的保真度得到这个量子态. 在这个方案的启发下, 很多基于自旋链系统的高保真度量子态传输方案相继被提出^[6-11], 这些方案开辟了用固态量子器件实现量子信息传输的新途径.

理论上, 量子比特可以用任意的二能级物理系统来实现^[12]. 基于约瑟夫森结的固态二能级量子系统因其满足 DiVincenzo 判据^[13]的基本要求: 具有普适性、具有足够长的相干时间、可初始化、可测量以及可集成化而备受关注. 实验上, 在约瑟夫森结系统中可以通过三种方式来实现量子比特, 它们分别是电荷量子比特^[14, 15], 磁通量子比特^[16, 17]和超导相位量子比特^[18, 19]. 基于约瑟夫森结量子比特系统的量子态传输研究目前主要集中于电荷量子比特^[20, 21]和磁通量子比特^[22]两个方面.

实验研究方面, 人们在约瑟夫森电荷量子态的叠加^[23, 24], 相干演化和振荡特性^[14, 25, 26], 与门操作保真度以及量子态读取^[27, 28]等方面均已取得了重要进展. 另外, 纳米级约瑟夫森超导电路中的多量子比特耦合也已经实现^[14, 29]. 受这些重要研究成果的启发, 我们将研究约瑟夫森电荷量子比特系统中的量子态传输问题, 通过分析我们将找出最

* 陕西省自然科学基金(批准号: 2009JQ8006, 2010JM1011)资助的课题.

[†] E-mail: wu.shihai@yahoo.com.cn

佳的系统匹配参数,以便实现高保真度的量子态传输.

2. 超导电荷比特模型

超导电荷比特系统的基本组成如图 1 所示^[29],它由一个电感 L 耦合 N 个库珀对盒所组成. 每个库珀对盒由两个对称的 SQUID (超导量子干涉仪) 和一个超导岛弱连接而成,通过门电容 C_N 可在岛上施加偏置电压 V_{xN} , 调节此电压可以控制岛上的库珀对数,进而实现两能级系统. 另外通过控制穿过每个库珀对盒内 SQUID 的磁通 Φ_{xN} 可以调节约瑟夫森耦合能. 这里需要指出的是,在图 1 中我们只考虑了最近邻电荷比特之间的耦合能,而忽略了 SQUID 环的自感以及连接两比特超导线的电感. 若两电荷比特不近邻,则超导线的电感就不能忽略,但系统的约化哈密顿量形式仍然保持不变,只不过量子比特的内耦合能 \bar{E}_{j_i} 与近邻比特间的耦合能 $J_{k,k+1}$ 会发生相应的变化.

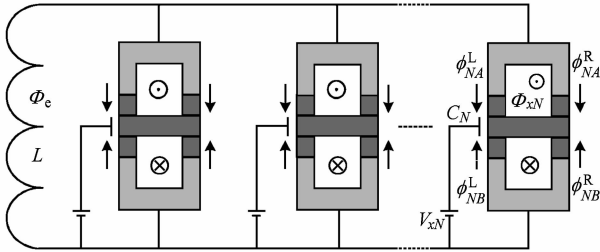


图 1 约瑟夫森电荷比特系统示意图 (Φ_e 和 Φ_{xN} 分别代表穿过电感 L 和第 N 个 SQUID 的磁通, $\phi_{NA(B)}^{L(R)}$ 表示约瑟夫森结的位相, V_{xN} 是外加门电压)

在每个库珀对盒内部连接两个 SQUID 的超导岛的大小约为 $1000 \text{ nm} \times 50 \text{ nm} \times 20 \text{ nm}$ (长 \times 宽 \times 高),岛上的传导电子数大约是 $10^7 - 10^8$ 个^[30]. 由于超导电性,岛上的所有电子都将形成库珀对. 若所选超导材料的能隙 Δ 足够大,在低温时就可有效抑制准粒子隧穿,而只允许库珀对在超导结内的相干隧穿. 假设两个对称 SQUID 的参数完全相同,且所有超导约瑟夫森结的耦合能均为 ε_0 , 耦合电容为 C_{j_0} . 由于 SQUID 环很小 (约 $1 \mu\text{m}$), 其自感可以忽略^[29,31]. 由 SQUID 所产生的耦合能为 $-E_{j_k}(\Phi_{xk}) \cos(\phi_{kA(B)})$, 这里 $E_{j_k}(\Phi_{xk}) = 2\varepsilon_0 \cos(\pi\Phi_{xk}/\Phi_0)$, Φ_0 为磁通量子. 有效相位差 $\phi_{kA(B)}$ 取平均值 $(\phi_{kA(B)}^L + \phi_{kA(B)}^R)/2$, 下标 $A(B)$ 表示上(下)的 SQUID,

$L(R)$ 表示左(右)边的约瑟夫森结. $\phi_{kB}^{L(R)} - \phi_{kA}^{L(R)} = 2\pi\Phi/\Phi_0$ 为上下两个结的相位差, $\Phi = \Phi_e + LI$ 为总的磁通量.

在多量子比特电路中,若选择基底 $\{|0\rangle = |n_i\rangle, |1\rangle = |n_i + 1\rangle\}$ (n_i 表示第 i 个库珀对盒上的电子数),则在自旋 $-1/2$ 表象中系统的约化哈密顿量可以写为^[29]

$$\hat{H} = \varepsilon_i(V_{xi})\hat{\sigma}_i^z - \bar{E}_{j_i}(\Phi_{xi}, \Phi_e, L)\hat{\sigma}_i^x. \quad (1)$$

这里 $\hat{\sigma}^\alpha$ ($\alpha = x, y, z$) 为 Pauli 自旋算子, $\varepsilon_i(V_{xi}) = [C_i V_{xi}/e - (2n_i + 1)]E_{ci}/2$ 为电荷能,其中 $E_{ci} = 2e^2/(C_i + 4C_{j_0})$ 是岛上电子的能量. 对于两个最近邻量子比特 i 和 j , $\bar{E}_{j_i}(\Phi_{xi}, \Phi_e, L)$ 是在这两个比特之间由相互作用能而产生的量子比特的内耦合能,其表达式可写为如下形式^[29,32]:

$$\bar{E}_{j_i}(\Phi_{xi}, \Phi_e, L) = \sum_{j=i\pm 1} \xi_{ij} E_{j_i}(\Phi_{xi}) \cos\left(\frac{\pi\Phi_e}{\Phi_0}\right), \quad (2)$$

上式中的参数

$$\xi_{ij} = 1 - 0.5(\eta_i^2 + 3\eta_j^2) \sin^2\left(\frac{\pi\Phi_e}{\Phi_0}\right),$$

$$\eta_i = -\frac{\pi^2 L E_{j_i}(\Phi_{xi})}{\Phi_0^2}. \quad (3)$$

对于 $i = 1$ 和 $i = N$ 两种特殊情形,如考虑开边界条件,则 j 仅取 $j = 2$ 和 $j = N - 1$. 通过调节 Φ_{xi} , Φ_e 和 V_{xi} 就可以实现对系统量子态的初始化和任意量子比特的操作.

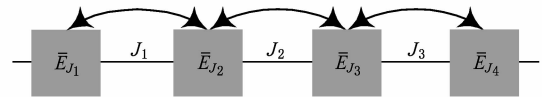


图 2 四量子比特相互作用示意图

我们以四量子比特 (即 $N = 4$) 约瑟夫森结系统为例来说明如何通过调节外加磁通来实现特殊编码量子态的理想传输. 由电荷能 ε_i 和内耦合能 \bar{E}_{j_i} 的表达式可知,当 $V_{xi} = (2n_i + 1)e/C_i, \Phi_{xi} = \Phi_0/2$ 时, $\varepsilon_i = \bar{E}_{j_i} = 0$, 即第 i 个比特和整个系统脱耦. 当只研究前四个比特时,只需要让其他的比特和整个系统脱耦即可. 此时四比特系统的哈密顿量可以表示为

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^4 (\varepsilon_i \hat{\sigma}_i^z - \bar{E}_{j_i} \hat{\sigma}_i^x) + \sum_{k=1}^3 J_{k,k+1} \hat{\sigma}_k^x \hat{\sigma}_{k+1}^x, \quad (4)$$

其中

$$J_{k,k+1} = - \frac{\pi^2 L E_{Jk} E_{J,k+1} \sin^2 \left(\frac{\pi \Phi_e}{\Phi_0} \right)}{\Phi_0^2}, \quad (5)$$

这里 $J_{k,k+1}$ 表示近邻比特间的耦合能. 若调节 $V_{xi} = (2n_i + 1)e/C_i$, 则(4)式可进一步可简化为

$$\hat{H} = - \sum_{i=1}^4 \bar{E}_{Ji} \hat{\sigma}_i^x + \sum_{k=1}^3 J_{k,k+1} \hat{\sigma}_k^x \hat{\sigma}_{k+1}^x. \quad (6)$$

四量子比特系统可以看做由三对只存在最近邻相互作用的量子比特组成. 如图2所示, 中间两个量子比特2和3在发生相互作用的同时也分别与旁边最近邻的量子比特1和4发生相互作用, 所以内耦合能 $\bar{E}_{J2}, \bar{E}_{J3}$ 由两部分叠加而成.

为了讨论方便我们取磁通 $\Phi_{x1} = \Phi_{x4}, \Phi_{x2} = \Phi_{x3}$, 由(2), (3)和(5)式知此时量子比特的内耦合能和近邻比特间的耦合能分别满足如下关系式:

$$\begin{aligned} \bar{E}_{J1} = \bar{E}_{J4} = E_0, \quad \bar{E}_{J2} = \bar{E}_{J3} = E_1, \\ J_{1,2} = J_{3,4} = J_1, \quad J_{2,3} = J_2. \end{aligned} \quad (7)$$

在实际操作中, 为了实现高保真度量子态传输, 可以通过调节 Φ_e 和 Φ_{xi} 使控制参数满足

$$J_1 = xE_0, \quad J_2 = yE_1, \quad E_0 = \alpha E_1. \quad (8)$$

把(7)和(8)式代入(6)式得近邻量子比特相互作用系统的哈密顿量为

$$\begin{aligned} \hat{H} = - E_1 [\alpha (\hat{\sigma}_1^x + \hat{\sigma}_4^x) + (\hat{\sigma}_2^x + \hat{\sigma}_3^x) \\ - x\alpha (\hat{\sigma}_1^x \hat{\sigma}_2^x + \hat{\sigma}_3^x \hat{\sigma}_4^x) - y \hat{\sigma}_2^x \hat{\sigma}_3^x]. \end{aligned} \quad (9)$$

3. 特殊量子态的传输

在固态量子系统中信息的传输与交换可以通过调节量子比特间的耦合能来控制. 在这一部分首先讨论约瑟夫森电荷量子比特电路系统中激发态 $|1\rangle$ 从第一个量子位到第四个量子位的传输概率, 这个概率实际上就是系统从初态 $|1000\rangle$ 开始, 经过一段时间的演化在末态中出现 $|0001\rangle$ 的概率, 其值越趋近于1越好.

在标准基底上选取初态 $|1000\rangle$ 后, 系统将以如下的方式开始演化:

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}t\right) |1000\rangle, \quad (10)$$

式中 t 为系统演化时间.

通过求解(9)式所对应的哈密顿量, 可以得到系统的本征值 λ_k 与本征态 $|\varphi\rangle_k (k = 0, 1, 2, \dots, 15)$. 初态 $|1000\rangle$ 可以用本征态展开为

$$|1000\rangle = \sum_k \alpha_k |\varphi\rangle_k, \quad (11)$$

其中 α_k 为展开系数. 若令 $\tau = E_1 t / \hbar$, 则把(11)式代入(10)式得到 $|\psi(\tau)\rangle$ 中 $|0001\rangle$ 项的系数为

$$\begin{aligned} c = \frac{1}{4} [e^{iy\tau} (\cos 2\alpha\tau - \cos 2\alpha x\tau) \\ - e^{-iy\tau} (\cos 2\tau - \cos 2\alpha\tau \cos 2\alpha x\tau \cos 2\tau \\ - i \sin 2\alpha\tau \sin 2\alpha x\tau \sin 2\tau)]. \end{aligned} \quad (12)$$

通过控制量子比特间的耦合能 J_k 可以在不同类型传输通道下来调节量子态 $|1\rangle$ 从第一个量子位到第四个量子位的传输概率 $P(x, \tau) = |c|^2$, 下面我们分别就均匀与非均匀两种传输通道来进行讨论.

3.1. 均匀传输通道

当近邻量子比特间的耦合能满足 $J_1 = J_2 = J$ 时通道为均匀传输通道, 由(8)式知此时应有 $y = \alpha x$. 考虑到 $E_0 = \alpha E_1$, 有 $\bar{E}_{J1} = \bar{E}_{J4} = \alpha \bar{E}_{J2} = \alpha \bar{E}_{J3}$. 若调节穿过四个 SQUID 环的磁通使 $\Phi_{x1} = \Phi_{x2} = \Phi_{x3} = \Phi_{x4}$, 则 $E_{J1} = E_{J2} = E_{J3} = E_{J4}$. 另外由(3)式知此时 $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta_4$, $\xi_{ij} = 1 - 2\eta_i^2 \sin^2(\pi \Phi_e / \Phi_0)$, 利用这些关系并结合(2)式便可求得此时 $\alpha = 0.5$, 即当 $y = 0.5x$ 时系统为均匀传输通道.

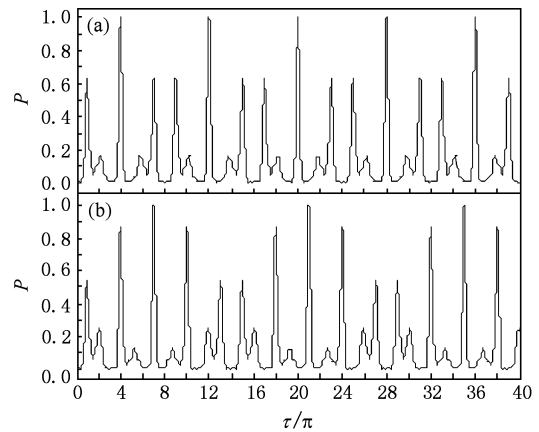


图3 在均匀传输通道情况下, 传输概率 P 随 τ/π 的变化曲线 (a) $x=1/4$; (b) $x=2/7$

量子态 $|0001\rangle$ 在演化末态 $|\psi(\tau)\rangle$ 中出现的概率 $P(x, \tau) = |c|^2$, 将 $y = 0.5x$ 代入(12)式可得 $c = \frac{1}{4} [e^{ix\tau/2} (\cos \tau - \cos x\tau) - e^{-ix\tau/2} (\cos 2\tau - \cos \tau \cos 2\tau \cos x\tau - i \sin \tau \sin 2\tau \sin x\tau)]$. 分析此式可得使 $P_{\max} = 1$ 所对应的 x 和 τ_c 的取值, 它们应满足如下两个关系中的一个:

$$x = \pm \frac{2n+1}{2(m+1)}, \tau_c = 2(m+1)(2k+1)\pi, \quad (13)$$

$$x = \pm \frac{2(n+1)}{2m+1}, \tau_c = (2m+1)(2k+1)\pi, \quad (14)$$

以上两式中 $m, n, k = \{0, 1, 2, \dots\}$. 作为一个例子, 在图 3 中我们给出了当 $x = 1/4$ 和 $x = 2/7$ 时传输概率 P 随 τ/π 的变化曲线. 可以看出 P 随着 τ/π 的变化呈现严格的周期性, 对图 3(a) 情形, 当 $\tau_c = 4(2k+1)\pi (k = 0, 1, 2, \dots)$ 时 P 取得极大值 $P_{\max} = 1$; 对图 3(b) 情形, 当 $\tau_c = 7(2k+1)\pi (k = 0, 1, 2, \dots)$ 时 P 取得极大值 $P_{\max} = 1$, 这与(13)和(14)式中的结果都是一致的.

下面具体说明在实验中如何实现(13)和(14)式中的参数 x . 取(2), (3)和(5)式中的 $\Phi_e = \Phi_0/3, \Phi_{xi}/\Phi_0 = \mu (i = 1, 2, 3, 4)$, 并且四个库珀对盒的参数完全相同, 均为 $\varepsilon_0 = 0.1\text{K}, L = 30\text{nH}$ [29], 则在实验中只需调节四个 SQUID 的磁通 $\Phi_{xi} (i = 1, 2, 3, 4)$ 使(8)式成立即可, 该操作在实验上是可以实现的 [33,34].

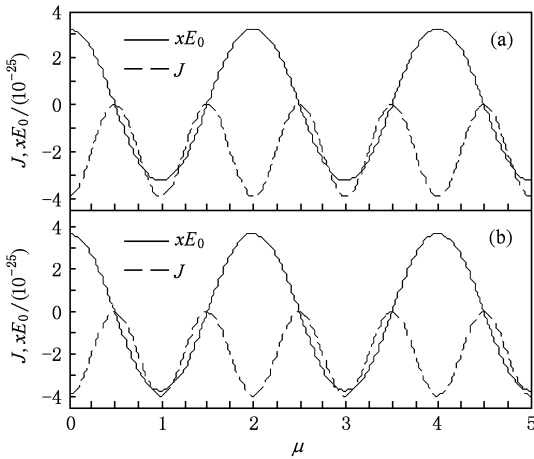


图 4 量子比特间的耦合能 J , 内耦合能 xE_0 随 μ 的变化曲线 ($\Phi_e = \Phi_0/3, \varepsilon_0 = 0.1\text{K}, L = 30\text{nH}$) (a) $x = 1/4$; (b) $x = 2/7$

图 4(a) 和 (b) 分别给出了当 $x = 1/4$ 和 $x = 2/7$ 时 J 和 xE_0 随 μ 的变化曲线. 从图中可以看出邻近比特间的耦合能 J 与内耦合能 xE_0 的交点随 μ 的不同而呈现规律性的变化, 它们的交点对应的横坐标值即为使(8)式成立的临界 μ_c 值. 当 $x = 1/4$ 时由图 4(a) 可以求出 $\Phi_{x1} \approx (0.8163 + 2m)\Phi_0$ 或 $\Phi_{x1} \approx (1.1837 + 2m)\Phi_0 (m = 0, 1, 2, \dots)$, 此时 $J \approx -2.7811 \times 10^{-25}, E_0 \approx -1.1124 \times 10^{-24}, E_1 \approx -2.2248 \times 10^{-24}$. 当 $x = 2/7$ 时由图 4(b) 可以求出

$\Phi_{x1} \approx (0.8961 + 2m)\Phi_0$ 或 $\Phi_{x1} \approx (1.1039 + 2m)\Phi_0 (m = 0, 1, 2, \dots)$, 此时 $J \approx -3.5528 \times 10^{-25}, E_0 \approx -1.2435 \times 10^{-24}, E_1 \approx -2.4870 \times 10^{-24}$. 对图 4(a) 和 (b) 中的另一组交点, 因为 $J = xE_0 \approx 0$, 故不满足实际情形. 对于满足(13)或(14)式的其他 x 值, 利用同样的方法也可求出施加在 SQUID 上的磁通 $\Phi_{xi} (i = 1, 2, 3, 4)$. 但需要注意的是, 对于给定的约瑟夫森耦合能 ε_0 , 线圈电感 L 和穿过线圈的磁通 Φ_e , 当 x 大于或小于某一临界值时可能会解不出相应的 Φ_{xi} 使得 $J = xE_0$.

3.2. 非均匀传输通道

当邻近量子比特间的耦合能 $J_1 \neq J_2$ 时, 通道为非均匀传输通道. 若要构造非均匀理想传输通道, 由(5)式知可以固定 Φ_e 并调节穿过 SQUID 的磁通 $\Phi_{xi} (i = 1, 2, 3, 4)$ 来使 $y \neq \alpha x$. 分析(12)式可得使传输概率 $P_{\max} = 1$ 对应的 α, x, y 和 τ_c 的取值应满足如下四个关系中的一个:

$$\begin{aligned} \alpha &= \pm \frac{n+1}{m+1}, \quad x = \pm \frac{2r+1}{2(n+1)}, \\ y &= \pm \frac{2s+1}{2(m+1)}, \\ \tau_c &= (m+1)(2k+1)\pi; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \pm \frac{2n+1}{2(m+1)}, \quad x = \pm \frac{2(r+1)}{2n+1}, \\ y &= \pm \frac{s+1}{m+1}, \\ \tau_c &= (m+1)(2k+1)\pi; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \pm \frac{2(n+1)}{2m+1}, \quad x = \pm \frac{2r+1}{2(n+1)}, \\ y &= \pm \frac{2(s+1)}{2m+1}, \\ \tau_c &= \frac{1}{2}(2m+1)(2k+1)\pi; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \pm \frac{2n+1}{2m+1}, \quad x = \pm \frac{2(r+1)}{2n+1}, \\ y &= \pm \frac{2s+1}{2m+1}, \\ \tau_c &= \frac{1}{2}(2m+1)(2k+1)\pi. \end{aligned} \quad (18)$$

以上各式中 $m, n, r, s, k = \{0, 1, 2, \dots\}$. 值得注意的是, 虽然可以选择不同的 m, n, r, s 来构造非均匀理想传输通道, 但量子态理想传输所对应的临界时间 τ_c 却只与 m 的取值有关. 具体操作时可以根据(15)至(18)式选取合适的 α, x 和 y 值(在某些特殊情况

下通道可能退化为均匀传输通道), 然后通过系统本身的动力学演化来实现量子态的理想传输. 例如取 $m = 4, n = 3, r = 0, s = 1$, 将其代入(15)式可得 $\alpha = 4/5, x = 1/8, y = 3/10$; 代入(17)式可得 $\alpha = 8/9, x = 1/8, y = 4/9$. 在图5中给出了当 α, x 和 y 取上述两组值时对应的传输概率 P 随 τ/π 的变化曲线. 可以发现 P 随着时间的演化而快速震荡, 对图5(a)情形, 当 $\tau_c = 5(2k+1)\pi (k = 0, 1, 2, \dots)$ 时就可以实现量子态的理想传输; 对图5(b)情形, 当 $\tau_c = 4.5(2k+1)\pi (k = 0, 1, 2, \dots)$ 时就可以实现量子态的理想传输, 这与(15)至(18)式中得到的结果完全一致.

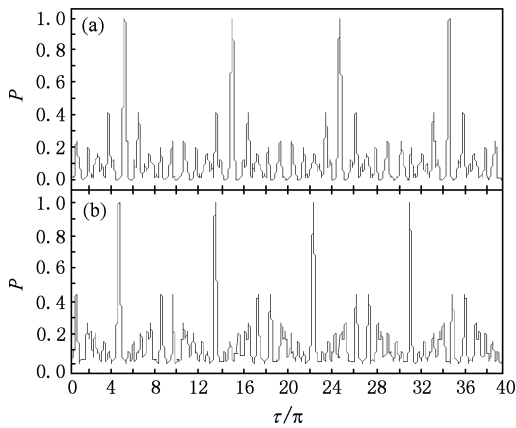


图5 当通道为非均匀传输通道时, 传输概率 P 随 τ/π 的变化曲线 (a) $\alpha = 4/5, x = 1/8, y = 3/10$; (b) $\alpha = 8/9, x = 1/8, y = 4/9$

接下来分析怎样选择穿过各个 SQUID 环的磁通 $\Phi_{xi} (i = 1, 2, 3, 4)$ 来实现(15)至(18)式中的参数 α, x 和 y . 由于在前面已经取 $\Phi_{x1} = \Phi_{x4}, \Phi_{x2} = \Phi_{x3}$, 由此并结合(5), (7)和(8)式便可以求得 $\cos(\pi\Phi_{x1}/\Phi_0)/\cos(\pi\Phi_{x2}/\Phi_0) = \alpha x/y$, 因此量子比特间的耦合能 J_1 和 J_2 以及量子比特的内耦合能 E_0 和 E_1 都可以表示为 $\mu = \Phi_{x1}/\Phi_0$ 的函数. 对于图5(a)中的参数 $\alpha = 4/5, x = 1/8, y = 3/10$, 若选取 $\Phi_e = 0.3\Phi_0, \varepsilon_0 = 0.1\text{K}, L = 30\text{nH}$, 则利用类似均匀传输通道的方法, 画出 J_1 和 xE_0 随 μ 的变化曲线, 它们的交点(不含使 $J_1 = xE_0 = 0$ 的点)对应的横坐标值即为待求 $\Phi_{x1}/\Phi_0 (= \Phi_{x4}/\Phi_0)$ 的临界值(为了表述简洁, 这里我们省略了 J_1 和 xE_0 随 μ 的变化曲线图). 由此可以求出磁通 $\Phi_{x1} \approx (0.5619 + 2m)\Phi_0$ 或 $\Phi_{x1} \approx (1.4381 + 2m)\Phi_0 (m = 0, 1, 2, \dots)$, 此时 $J_1 \approx -3.8713 \times 10^{-26}, E_0 \approx -3.0971 \times 10^{-25}$. 另外由 $J_1/J_2 = \alpha x/y$ 和 $E_0 = \alpha E_1$ 可以求出 J_2

$\approx -1.1614 \times 10^{-25}, E_1 \approx -3.8713 \times 10^{-25}$. 待求 $\Phi_{x2} (= \Phi_{x3})$ 的临界值可以通过关系式 $\cos(\pi\Phi_{x1}/\Phi_0)/\cos(\pi\Phi_{x2}/\Phi_0) = \alpha x/y$ 求出, 其值为 $\Phi_{x2} \approx (0.6968 + 2m)\Phi_0$ 或 $\Phi_{x2} \approx (1.3032 + 2m)\Phi_0 (m = 0, 1, 2, \dots)$. 最后需要注意的是, 同均匀传输通一样, 对于根据(15)至(18)式选定的 α, x 和 y 值, 只有当 ε_0, L 和 Φ_e 的取值在一定范围内时才能解出相应的 $\Phi_{xi} (i = 1, 2, 3, 4)$ 使(8)式得到满足.

4. 任意态传输的平均保真度

在第三部分我们分析了怎样通过调节外加磁通来实现约瑟夫森电荷量子比特电路系统中量子态 $|1\rangle$ 从第一量子位到第四量子位的理想传输, 这一部分将讨论用该系统来传输一个任意态时的情形. 假设待传输的量子态为三维 Bloch 球面上的任意一点 $|\varphi_{in}\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$, 这里 $0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi$. Alice 把信息编码在第一个量子位上, 这时系统的初态可以描述为

$$|\Psi(0)\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0000\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1000\rangle. \quad (19)$$

经过一段时间的演化, 接收者 Bob 希望待传送的信息 $|\varphi_{in}\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$ 能够完全编码在第四个量子位上. 但是, 由于量子系统存在消相干, 所以 Bob 只能以一定的平均保真度 F 接收到该态.

在(19)式描述的系统初态 $|\Psi(0)\rangle$ 经过一段时间的演化可以得到末态

$$|\Psi(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right)|\Psi(0)\rangle \\ = \sum_{j=0}^{15} \left(\cos\frac{\theta}{2}C_{0,j} + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}C_{8,j} \right) |j\rangle, \quad (20)$$

这里 $|j\rangle$ 为标准基矢, $C_{0,j}$ 和 $C_{8,j}$ 分别表示 $|0000\rangle$ 和 $|1000\rangle$ 做为初态演化而得到各个态的系数, 它们都是 x, y, α, t 的函数, 为了书写简便省略了函数变量.

在接收端, Bob 只需要携带编码信息的第四个量子位, 所以需要求 $\rho = |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|$ 的约化密度矩阵 $\rho_4 = \text{Tr}_{123}\rho$, 保真度的表达式为

$$f(t) = \left(\cos \frac{\theta}{2}, e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \right) \rho_4 \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad (21)$$

利用(21)式对 Bloch 球面上各种可能的输入态求平均可得平均保真度为

$$F(t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(t) \sin(\theta) d\theta d\phi = \frac{1}{2}. \quad (22)$$

由于平均保真度只有 1/2, 所以在我们的模型中不能实现任意态的理想传输, 我们期望在后续的工作中能找到解决的办法.

5. 结 论

本文基于约瑟夫森电荷比特模型, 构造了一种四比特量子系统, 并用该系统设计了可以使一种特殊量子态从第一个量子位传输到第四个量子位的理想传输方案, 并给出了两种不同的通道参数选择方式. 因为通过调节穿过线圈的磁通 Φ_e 和各个 SQUID 的磁通 Φ_{xi} 就完全可以控制近邻量子比特间

的耦合能 $J_{k,k+1}$, 量子比特的内耦合能 \bar{E}_{Ji} 以及这两种耦合能之间的关系, 所以这个方案在实验上是可行的. 但是该系统不能用来实现一个任意量子态的理想传输.

研究约瑟夫森电荷比特模型下量子信息处理问题的意义在于, 这样的系统是可以计算 (CPU) 和存储 (寄存器) 的固态量子系统, 真正的量子计算机中 CPU 和寄存器之间通信所需要的距离也不是很大, 短距离的传输同样很有意义; 此外, 如果 CPU 和寄存器以及它们之间的通信信道都采用同种材质 (约瑟夫森超导系统) 就可以减少彼此之间的接口, 降低系统的复杂度. 当然, 我们只考虑了近邻量子位之间的相互作用, 实际的实验中所有的量子位之间都有耦合. 虽然我们只讨论了一种特殊的理想情况, 但它给我们提出了一些新的课题和挑战: 在约瑟夫森电荷比特系统下, 什么条件时才能实现任意态的理想传输? 耦合参数的极限到底能达到多少, 都受到那些条件的制约? 消相干时间的极限如何, 受到那些因素的制约? 测量的时间尺度到底能达到多少等等.

- [1] Marcikic I, de Riedmatten H, Tittel W, Zbinden H, Gisin N 2003 *Nature* **421** 509
- [2] Yang X, Tong Z Y, Kuang L M 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1689 (in Chinese) [杨雄、童朝阳、匡乐满 2008 物理学报 **57** 1689]
- [3] Tian L, Rabl P, Blatt R, Zoller P 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 247902
- [4] Shi Z G, Chen X W, Zhu X X, Song K H 2009 *Chin. Phys. B* **18** 0910
- [5] Bose S 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 207901
- [6] Christandl M, Datta N, Ekert A, Landahl A J 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 187902
- [7] Burgarth D, Bose S 2005 *Phys. Rev. A* **71** 052315
- [8] Yan X B, Wang S J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1591 (in Chinese) [严晓波、王顺金 2006 物理学报 **55** 1591]
- [9] Xi X Q, Gong J B, Zhang T, Yue R H, Liu W M 2008 *Eur. Phys. J. D* **50** 193
- [10] Hu M L, Lian H L 2009 *Eur. Phys. J. D* **55** 711
- [11] Hu M L, Xi X Q 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 3319 (in Chinese) [胡明亮、惠小强 2008 物理学报 **57** 3319]
- [12] Yin J W, Xiao J L, Yu Y F, Wang Z W 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2695 (in Chinese) [尹辑文、肖景林、于毅夫、王子武 2008 物理学报 **57** 2695]
- [13] DiVincenzo D P 1995 *Science* **270** 255
- [14] Nakamura Y, Pashkin Y A, Tsai J S 1999 *Nature* **398** 786
- [15] Liang B L, Wang J S, Meng X G, Su J 2010 *Chin. Phys. B* **19** 010315
- [16] Mooij J E, Orlando T P, Levitov L, Caspar H W, Lloyd S 1999 *Science* **285** 1036
- [17] Orlando T P, Mooij J E, Tian L, Caspar H W, Levitov L S, Lloyd S, Mazo J J 1999 *Phys. Rev. B* **60** 15398
- [18] Martinis J M, Nam S, Aumentado J, Urbina C 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 117901
- [19] Yu Y, Han S, Chu X, Chu S I, Wang Z 2002 *Science* **296** 889
- [20] Romito A, Fazio R, Bruder C 2005 *Phys. Rev. B* **71** 100501
- [21] Plastina F, Falci G 2003 *Phys. Rev. B* **67** 224514
- [22] Lyakhov A, Bruder C 2005 *New J. Phys.* **7** 181
- [23] Matterns M, Elion W J, Mooij J E 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 721
- [24] Bouchiat V, Vion D, Joyez P, Esteve D, Devoret M H 1998 *Phys. Scripta* **76** 165
- [25] Makhlin Y, Schön G, Shnirman A 1999 *Nature* **398** 305
- [26] Pashkin Y A, Yamamoto T, Astafiev O, Nakamura Y, Averin D V, Tsai J S 2003 *Nature* **421** 823
- [27] Fazio R, Massimo Palma G, Siewert J 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 5385
- [28] Nakamura Y, Pashkin Y A, Yamamoto T, Tsai J S 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 047901
- [29] You J Q, Tsai J S, Franco N 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 197902

- [30] Pashkin Y A, Astafiev O, Yamamoto T, Nakamura Y, Tsai J S 2009 *Quantum Inf. Process.* **8** 55
- [31] Li D C, Zheng X H, Dong P, Cao Z L 2008 *Commun. Theor. Phys.* **49** 1195
- [32] You J Q, Lam C H, Zheng H Z 2001 *Phys. Rev. B* **63** 180501(R)
- [33] Makhlin Y, Schön G, Shnirman A 2001 *Rev. Mod. Phys.* **73** 357
- [34] Vion D, Aassime A, Cottet A, Joyez P, Pothier H, Urbina C, Esteve D, Devoret M H 2002 *Science* **296** 886

Using Josephson charge qubits system to realize the transfer of a special kind of quantum state*

Wu Shi-Hai[†] Hu Ming-Liang Li Ji Xi Xiao-Qiang

(School of Science, Xi'an University of Posts and Telecommunications, Xi'an 710061, China)

(Received 19 March 2010; revised manuscript received 12 April 2010)

Abstract

A type of Josephson charge qubit circuit is constructed in this paper, and properties of four-qubit quantum state transfer through this system is also investigated. By modulating the external magnetic flux, we show that ideal transfer of an excited state $|1\rangle$ from the first qubit to the fourth qubit can be realized for both homogeneous and inhomogeneous transmission channels. Moreover, the average fidelity of state transfer across this system is also analyzed, the result revealed that it cannot be used to transfer an arbitrary quantum state.

Keywords: quantum state transfer, Josephson charge qubits

PACS: 03.67.Hk, 85.25.Cp

* Project supported by the Natural Science Foundation of Shaanxi Province (Grant Nos. 2009JQ8006, 2010JM1011).

[†] E-mail: wu.shihai@yahoo.com.cn