

一类随机 van der Pol 系统的 Hopf 分岔研究*

马少娟[†]

(北方民族大学信息与计算科学学院, 银川 750021)

(2009年12月18日收到; 2010年4月20日收到修改稿)

研究了一类随机 van der Pol 系统的 Hopf 分岔行为. 首先根据 Hilbert 空间的正交展开理论, 含有随机参数的 van der Pol 系统被约化为等价确定性系统, 然后利用确定性分岔理论分析了等价系统的 Hopf 分岔, 得出了随机 van der Pol 系统的 Hopf 分岔临界点, 探究了随机参数对系统 Hopf 分岔的影响. 最后利用数值模拟验证了理论分析结果.

关键词: 随机 van der Pol 系统, Hopf 分岔, 正交多项式逼近

PACS: 05.45.-a

1. 引言

van der Pol 系统^[1]是经典动力学模型之一, 在物理、电子、生物、力学等领域内被广泛应用. 确定性 van der Pol 系统有着非常丰富的动力学行为, 如鞍结分岔、对称破裂分岔、倍周期分岔、Hopf 分岔和混沌等. 几十年以来, 学者们对 van der Pol 系统的分岔行为及周期解性质进行了系统全面的研究, 其中尤其以 Hopf 分岔为研究重点. 文献[2, 3]研究了 van der Pol 系统的周期解. 文献[4]研究了 van der Pol 系统的稳定性和分岔行为. Parlitz 等^[5]和 Mettin 等^[6]研究了 van der Pol 系统的全局分岔. 文献[7]研究了具有离散时滞的 van der Pol 系统的 Hopf 分岔和稳定性. 文献[8]研究了具有时间延迟的 van der Pol 系统周期解的 Hopf 分岔和稳定性. 随着计算机技术和数学分析方法的快速发展, 近年来人们开始关注随机因素作用下系统的动力学行为及性质. Leung 研究了随机外激作用下 van der Pol 系统的随机 Hopf 分岔^[9]. 在现实模型中除了随机激励外, 随机因素作用还表现在参数的随机性上. 含有随机参数的 van der Pol 系统的 Hopf 分岔还没有见文献报道.

目前针对此类参数随机系统的研究一般有

Monte Carlo 法^[10]、随机有限元法^[11, 12]和正交多项式逼近^[13-16]三类方法. 随机模拟法需要非常大的计算量才能保证精度的需求, 摄动法则要求随机参数是个很小的量, 很显然此两类方法在处理实际问题多变量, 大变异参数时有一定的局限性. 建立在多项式展开基础上的正交多项式逼近没有这些局限性, 因此越来越受到人们的关注. 2002年, 李杰^[17]对线性随机参数系统在随机激励下的响应问题应用正交展开理论进行了分析研究. 2003年, Fang 等^[18]将正交多项式逼近法和统一解法相结合, 研究了随机激励下具有随机参数的线性系统的响应问题. 继而, Leng 等^[19]应用正交多项式逼近初步研究了随机参数影响下 Duffing 的一些基本非线性现象. 文献[20]在正交多项式逼近的基础上研究了随机 Duffing 系统的混沌及混沌控制等问题. 2004年文献[21]在前人工作的基础上应用 Chebyshev 多项式逼近研究了具有拱形分布随机参数的 van der Pol 系统的倍周期分岔, 并进一步指出了随机参数系统倍周期分岔的特性. 其后, 相继出现一些文献应用正交多项式逼近和数值模拟来分析含有随机参数非线性动力学系统的分岔等行为^[22-26], 但大部分文献仅通过数值模拟来说明随机参数对系统行为影响, 很少有利用理论方法明确分析随机参数对系统分岔行为的影响. 基于此, 本文在正交多项式逼近的基

* 国家自然科学基金(批准号: 10872165, 10972181, 11002001), 国家民族事务委员会科研基金(批准号 08XBEO)及宁夏回族自治区高校科研基金(批准号: 2008JY007)资助的课题.

[†] E-mail: dr. sjma@gmail.com

基础上结合理论分析,具体分析随机参数对 van der Pol 系统 Hopf 分岔行为的影响.

本文首先应用正交多项式逼近将随机系统约化为确定性等价系统,然后利用确定性分岔理论和数学分析方法探究了等价 van der Pol 系统的 Hopf 分岔,求出随机系统 Hopf 分岔的分岔临界点,分析随机参数对系统 Hopf 分岔的影响.最后利用数值模拟验证了理论分析结果.

2. 随机 van der Pol 系统的等价确定性系统

考虑含有随机参数的 van der Pol 系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y, \\ \dot{y} &= \mu y - ax^2y + bx, \end{aligned} \quad (1)$$

其中 μ 为随机参数, a, b 为确定性参数. 假设 μ 可以表示为

$$\mu = \bar{\mu} + \delta u, \quad (2)$$

其中 u 为取值于区间 $(-\infty, \infty)$, 服从某一分布的随机变量, 密度函数为 $\rho_U(u)$, δ 为模型的随机强度, 表示参数受随机影响的强度和广度. $\bar{\mu}$ 为不考虑随机参数的情况下系统的参数. 受随机因素影响, (1) 式的响应函数为随机函数, 且在均方收敛意义下由这些随机响应函数构成的空间为 Hilbert 空间^[27], 根据正交展开理论^[28, 29], 系统的随机响应可以写成 Fourier 展开的级数逼近形式, 如下:

$$\begin{aligned} x(t, u) &= \sum_{i=0}^M x_i(t) P_i(u), \\ y(t, u) &= \sum_{i=0}^M y_i(t) P_i(u), \end{aligned} \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} x_i(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \rho_U(u) x(t, u) P_i(u) du, \\ y_i(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \rho_U(u) y(t, u) P_i(u) du, \end{aligned}$$

M 为逼近的阶数. $P_i(u)$ 为随机函数空间中的正交多项式基, 其正交性为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_U(u) P_i(u) P_j(u) du = \begin{cases} \delta_i, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad (4)$$

其中 δ_i 为 Kronecker-delta 函数. 此外正交多项式的三项递推关系为

$$\begin{aligned} uP_i(u) &= \alpha_i P_{i+1}(u) + \beta_i P_i(u) + \gamma_i P_{i-1}(u), \\ \gamma_i &\neq 0, P_{-1}(u) = 0, P_0(u) = 1, \end{aligned} \quad (5)$$

其中

$$\alpha_i = \frac{a_{i-1} \sqrt{\delta_i}}{a_i \sqrt{\delta_{i-1}}}, \quad \beta_i = \frac{1}{\delta_i} \int_{-\infty}^{\infty} u \rho_U(u) P_i^2(u) du,$$

$$\gamma_i = \frac{a_i \sqrt{\delta_{i+1}}}{a_{i+1} \sqrt{\delta_i}}.$$

将(2)式和(3)式代入(1)式, 可得

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=0}^M x_i(t) P_i(u) \right) \\ &= - \sum_{i=0}^M y_i(t) P_i(u), \\ & \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=0}^M y_i(t) P_i(u) \right) \\ &= \bar{\mu} \sum_{i=0}^M y_i(t) P_i(u) + \delta u \sum_{i=0}^M y_i(t) P_i(u) \\ & \quad - a \left(\sum_{i=0}^M x_i(t) P_i(u) \right)^2 \sum_{i=0}^M y_i(t) P_i(u) \\ & \quad + b \sum_{i=0}^M x_i(t) P_i(u), \end{aligned} \quad (6)$$

(6)式第二个式子中等号右端第三项的非线性项可以通过正交多项式的三项递推关系化简为

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=0}^M x_i(t) P_i(u) \right)^2 \sum_{i=0}^M y_i(t) P_i(u) \\ &= \sum_{i=0}^{3M} S_i(t) P_i(u), \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $S_i(t)$ 表达式可以借助计算机代数方法 MAPLE^[30] 求出. 将(5)式和(7)式代入(6)式, 可得

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=0}^M x_i(t) P_i(u) \right) \\ &= - \sum_{i=0}^M y_i(t) P_i(u), \\ & \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=0}^M y_i(t) P_i(u) \right) \\ &= -a \sum_{i=0}^{3M} S_i(t) P_i(u) + b \sum_{i=0}^M x_i(t) P_i(u) \\ & \quad \times \bar{\mu} \sum_{i=0}^M y_i(t) P_i(u) + \delta \sum_{i=0}^M (P_i(u) \\ & \quad \times [\alpha_i y_{i-1}(t) + \beta_i y_i(t) + \gamma_i y_{i+1}(t)] \\ & \quad - \alpha_i y_i(t) P_{i+1}(u)), \end{aligned} \quad (8)$$

在(8)式两端同时乘 $P_j(u)$, $j = 0, 1, \dots, M$, 然后关于随机变量求期望, 可以得到等价扩阶方程组如下:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x_0(t) &= -y_0(t), \\ \frac{d}{dt} y_0(t) &= -aS_0(t) + bx_0(t) + \bar{\mu}y_0(t) \\ & \quad + \delta[\beta_0 y_0(t) + \gamma_0 y_1(t)]; \\ \frac{d}{dt} x_1(t) &= -y_1(t), \\ \frac{d}{dt} y_1(t) &= -aS_1(t) + bx_1(t) + \bar{\mu}y_1(t) \\ & \quad + \delta[\alpha_1 y_0(t) + \beta_1 y_1(t) + \gamma_1 y_2(t)]; \\ & \dots\dots \\ \frac{d}{dt} x_M(t) &= -y_M(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}y_M(t) = & -aS_M(t) + bx_M(t) \\ & + \bar{\mu}y_M(t) + \delta[\alpha_M y_{M-1}(t) \\ & + \beta_M y_M(t)]. \end{aligned} \quad (9)$$

由逼近理论,设方程中的 $y_{-1} = 0, y_{M+1} = 0$. 经过约化后(9)式就是随机 van der Pol 系统的等价确定性系统,利用确定性非线性动力学理论及常用的数值模拟方法,我们可以通过分析等价扩阶系统来了解随机 van der Pol 系统的 Hopf 分岔. 当 $M \rightarrow \infty$ 时,(3)式为随机 van der Pol 系统的准确响应表示. 鉴于理论分析和数值模拟的困难,本文假设 M 为有限值, $M = 4$, 同时假定随机 Van der Pol 系统中参数所含随机变量为服从工程中最常见取值于 $[-1, 1]$ 上服从拱形分布的概率密度函数 $p_U(u)$,

$$p_U(u) = \begin{cases} (2/\pi) \sqrt{1-u^2}, & |u| \leq 1, \\ 0, & |u| > 1. \end{cases}$$

则由正交性,其对应的多项式为第二类 Chebyshev 多项式,系统(9)中参数 $\alpha_i = 1/2, \beta_i = 0, \gamma_i = 1/2, i = 0, \dots, 4$.

另一方面 (3)式表示随机系统的响应是随机变量 U 的函数,根据随机变量样本点不同而不同,对应于 U 取不同值时系统的各个样本随机响应 $x(t, u)$ 是依赖于 U 的随机过程,这时既可以通过式(3)表示,也可以引入集合平均响应,即随机响应的均值

$$\begin{aligned} E(x(t, u)) & \approx E\left(\sum_{i=0}^4 x_i(t) P_i(u)\right) = x_0(t), \\ E(y(t, u)) & \approx E\left(\sum_{i=0}^4 y_i(t) P_i(u)\right) \\ & = y_0(t). \end{aligned} \quad (10)$$

同时引入 $U = 0$ 时均值参数系统的样本响应

$$\begin{aligned} x(t, 0) & \approx \sum_{i=0}^4 x_i(t) P_i(0) \\ & = x_0(t) - x_2(t) + x_4(t), \\ y(t, 0) & \approx \sum_{i=0}^4 y_i(t) P_i(0) \\ & = y_0(t) - y_2(t) + y_4(t). \end{aligned} \quad (11)$$

定义确定性 van der Pol 系统的初始条件为 $x_0 = x(0), y_0 = y(0)$. 接下来在一定初始条件下,通过比较以上两种系统响应的分析以及与确定性 van der Pol 系统的响应比较,就可以探究随机参数对系统平均动力学行为的影响. 本文中随机强度 δ 的取值较小,因此令确定性等价系统的初始条件的取值与确定性系统的初始条件的取值相同,也就是

$$\begin{aligned} x_0 & = x_0(0), y_0 = y_0(0), \\ x_i(0) & = y_i(0) = 0, (i = 1, 2, 3, 4). \end{aligned}$$

本文的初始条件取为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(0) & = [3.0, 0, \dots, 0, 0]^T \\ \mathbf{y}(0) & = [2.0, 0, \dots, 0, 0]^T \\ x_0 & = 3.0, y_0 = 2.0. \end{aligned}$$

3. 等价 van der Pol 系统的 Hopf 分岔分析

非线性动力学中由于模型响应的拓扑性质在参数取临界值时发生突变而形成的分岔称为动态分岔. 动态分岔中较为重要的类型是不动点稳定性突然发生变化而出现极限环的 Hopf 分岔. 本节将通过理论分析研究等价系统(9)的 Hopf 分岔. 假设系统参数 $b > 0$, 显然随机 van der Pol 系统及其确定性等价系统(9)式都有唯一平衡点零点,且系统在此平衡点的 Jacobian 矩阵如下:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ b & \bar{\mu} & 0 & \frac{\delta}{2} & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\delta}{2} & b & \bar{\mu} & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & b & \bar{\mu} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

在这一平衡点的 Jacobian 矩阵 (12) 的特征方程为 $f(\lambda) = a_0\lambda^{10} + a_1\lambda^9 + a_2\lambda^8 + a_3\lambda^7 + a_4\lambda^6 + a_5\lambda^5 + a_6\lambda^4 + a_7\lambda^3 + a_8\lambda^2 + a_9\lambda + a_{10} = 0$, 其中 $a_i, i = 0, \dots, 10$, 可以由 Maple 软件求出. 根据确定性非线性动力系统分岔理论,假定 v 为分岔参数,则系统存在 Hopf 分岔的条件^[31,32]为

- 1) Jacobian 矩阵 (12) 有一对共轭的特征值 $\alpha(v) \pm i\beta(v)$;
- 2) 当 $v = v_c$ 时, $\alpha(v_c) = 0, \beta(v_c) > 0, \alpha'(v_c) \neq 0$;
- 3) Jacobian 矩阵(12)其他的特征值 $\lambda_i (3, \dots, n)$ 有非零实部.

由于等价方程的阶数较高,直接求出满足以上条件的参数值有一定的难度,因此可由以下定理^[33],进行解析分析求得满足随机 van der Pol 系统

Hopf 分岔的参数值.

定理 1 令 $f(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0$ 为系统在平衡点的特征方程, Δ_n 为 n 维的 Hurwitz 行列式, $a_i (i = 0, \dots, n)$ 为特征方程的系数. 如果存在分岔参数 v_c 使得

- 1) $\Delta_{n-1}(v_c) = 0, \Delta_{n-2}(v_c) \neq 0, \Delta_{n-3}(v_c) \neq 0$;
- 2) $a_i(v_c) > 0 (i = 0, \dots, n)$;
- 3) $\Delta'_{n-1}(v_c) \neq 0$,

则满足 Hopf 分岔存在性条件的前两条成立.

对应于等价系统(9)式, 通过 Maple 软件求得行列式 $\Delta_9 = 0$ 共有 13 个不重复的参数关系式, 如下:

$$\begin{aligned} \mu &= 0, \\ \mu &= \pm \delta/2, \\ \mu &= \pm \delta/4, \\ \mu &= \pm \sqrt{3}\delta/2, \\ \mu &= \pm \sqrt{3}\delta/4, \\ \mu &= \delta/4 \pm \sqrt{3}\delta/4, \\ \mu &= -\delta/4 \pm \sqrt{3}\delta/4. \end{aligned} \quad (13)$$

将以上关系式分别代入 8 维及 7 维 Hurwitz 行列式 Δ_8, Δ_7 , 只有下列关系式使得 Δ_8, Δ_7 不等于零:

$$\begin{aligned} \mu &= \pm \delta/2, \\ \mu &= \pm \sqrt{3}\delta/2. \end{aligned} \quad (14)$$

将(14)式的关系式代入特征方程的系数 $a_i (i = 0, \dots, 10)$, 使得 $a_i > 0 (i = 0, \dots, 10)$ 的参数关系式如下:

$$\mu = -\sqrt{3}\delta/2. \quad (15)$$

将上式代入 $\Delta'_9(\mu) = -\frac{44721963}{16384}b^{10}\delta^{24} \neq 0$.

因此根据定理 1 可知, 当 $\mu_c = -\sqrt{3}\delta/2$ 时, Hopf 分岔存在性条件的前两条都满足. 将(15)式代入系统的特征方程, 通过 Maple 计算, 可得系统的全部特征值

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sqrt{b}I, \lambda_2 = -\sqrt{b}I, (I^2 = -1), \\ \lambda_3 &= \frac{\delta}{4} - \frac{\sqrt{3}\delta}{4} - \frac{1}{4} \sqrt{4\delta^2 - 2\sqrt{3}\delta^2 - 16b}, \\ \lambda_4 &= \frac{\delta}{4} - \frac{\sqrt{3}\delta}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{4\delta^2 - 2\sqrt{3}\delta^2 - 16b}, \\ \lambda_5 &= -\frac{\sqrt{3}\delta}{4} - \frac{1}{4} \sqrt{3\delta^2 - 16b}, \\ \lambda_6 &= -\frac{\sqrt{3}\delta}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{3\delta^2 - 16b}, \\ \lambda_7 &= -\frac{\delta}{4} - \frac{\sqrt{3}\delta}{4} - \frac{1}{4} \sqrt{4\delta^2 + 2\sqrt{3}\delta^2 - 16b}, \end{aligned}$$

$$\lambda_8 = -\frac{\delta}{4} - \frac{\sqrt{3}\delta}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{4\delta^2 + 2\sqrt{3}\delta^2 - 16b},$$

$$\lambda_9 = -\frac{\sqrt{3}\delta}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{3\delta^2 - 4b},$$

$$\lambda_{10} = -\frac{\sqrt{3}\delta}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{3\delta^2 - 4b}.$$

由于随机强度 $\delta \neq 0$, 显然除一对共轭纯虚根外, 其他特征值的实部均小于零. 同时参数 $b \neq 0$, 所以随机模型的特征方程也不存在零解. Hopf 分岔存在的条件均满足, 即当系统的分岔参数 $\mu_c = -\sqrt{3}\delta/2$ 时, 随机 van der Pol 系统在 $(x, y) = (0, 0)$ 点附近出现 Hopf 分岔.

4. 随机 van der Pol 系统 Hopf 分岔的数值模拟

当系统(1)的参数为确定性, $\mu_c = 0$ 时, 确定性 van der Pol 系统会在 $(x, y) = (0, 0)$ 点发生 Hopf 分岔, 如图 1(a)和(b). 当参数 $\mu = -0.02 < \mu_c = 0.0, a = 1.0, b = 1.0$ 时, 相轨图如图 1(a), 系统轨线都收敛到 $(0, 0)$ 点. 随着分岔参数的增大 $\mu = 0.02 > \mu_c = 0.0$ 时, 系统的轨线逐渐收敛到一个闭曲线上, 即出现了极限环. 由此说明在分岔参数由小于零增大到大于零的过程中, 确定性 van der Pol 系统发生了 Hopf 分岔.

令随机强度 $\delta = 0.1$, 则分岔参数临界值为 $\mu_c = -0.0866$. 当 $\mu = -0.1 < \mu_c$ 时, 随机系统的集合平均响应和样本均值响应相轨逐渐收敛到零点, 分别如图 2(a)和(b)所示, 对应的时间历程图如图 2(c)和(d). 由图可见随着时间的延长, 两种响应相轨一致地收敛到零点. 当 $0.0 > \mu = -0.02 > \mu_c$ 时, 如图 3(a)所示随机 van der Pol 系统的集合平均响应相轨逐渐收敛到一闭曲线上, 形成了极限环, 其对应的时间历程图如图 3(c). 图 3(b)和(d)分别为这一参数条件下随机 van der Pol 系统的样本均值响应的相轨图和时间历程图. 两种响应同样一致地逐渐收敛到极限环上. 由前面的理论分析可知随着随机参数的影响, 随机 van der Pol 系统的 Hopf 分岔提前发生了.

由图 1—3 说明在分岔参数值变化过程中, 随机 van der Pol 系统发生了 Hopf 分岔. 与确定性相比, 随机参数的强度对随机系统的 Hopf 分岔影响比较显著, 分岔参数的临界点随着随机强度的改变而改

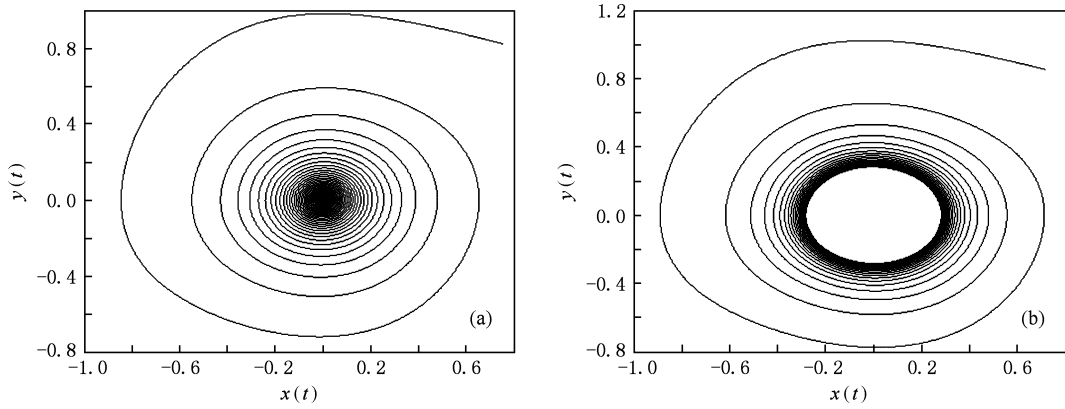


图1 确定性 van der Pol 系统的 Hopf 分岔相轨图 (a) Hopf 分岔前 $\mu = -0.02 < \mu_c = 0.0$; (b) Hopf 分岔后 $\mu = 0.02 > \mu_c = 0.0$

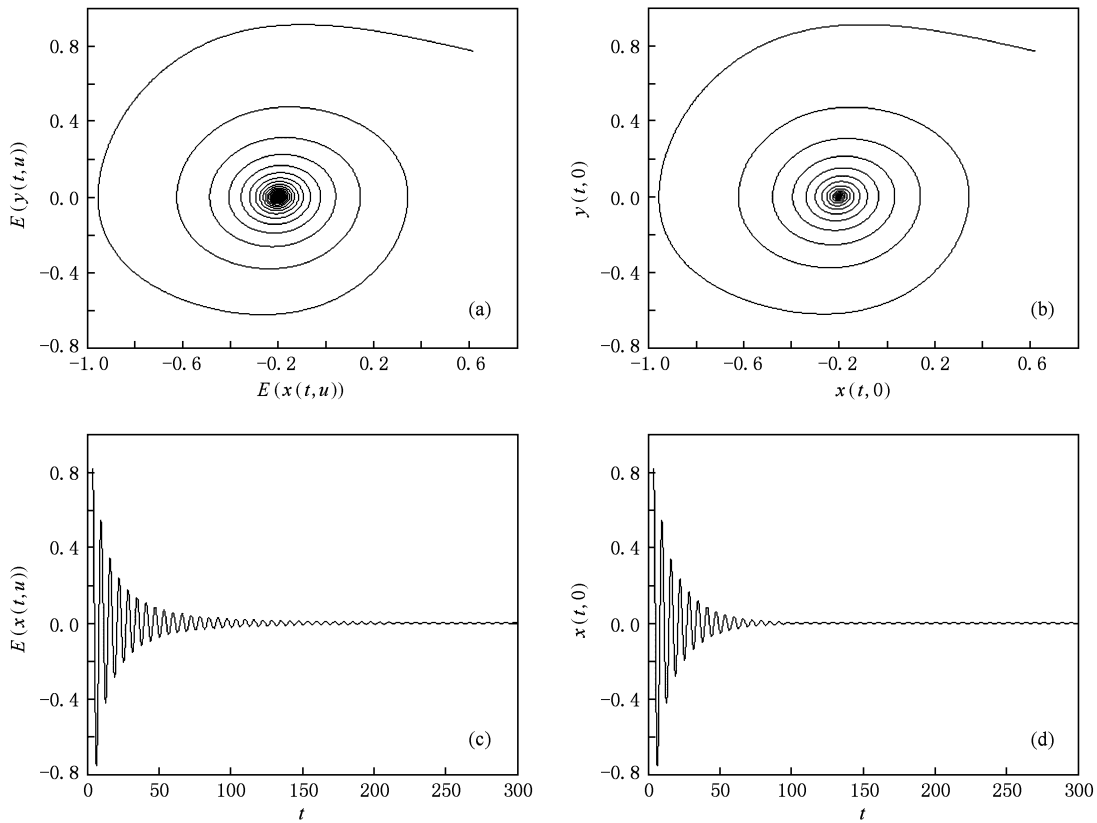


图2 随机 van der Pol 系统 Hopf 分岔前的相轨图(a,b)及时间历程图(c,d) ($\delta = 0.1, \mu = -0.1$) (a, c) 集合平均响应; (b, d) 样本均值响应

变. 确定性 van der Pol 系统发生 Hopf 分岔时, 受随机参数影响的 van der Pol 系统不一定会发生 Hopf 分岔. 数值模拟进一步验证了理论分析结果.

5. 结 论

对于含有随机参数的随机 van der Pol 系统, 正

交多项式逼近提供了一种有效地分析方法, 根据泛函分析中的逼近理论把含有随机参数的非线性随机动力学系统约化成等价的确定性扩阶系统, 再结合传统的理论分析和数值方法来研究其动力学行为. 文中以含有拱形分布随机变量的 van der Pol 系统为例, 应用 Chebyshev 多项式逼近, 确定性分岔理论及数学分析工具研究了随机参数系统的 Hopf 分

岔行为. 求得到确定性等价 van der Pol 系统 Hopf 分岔的参数临界值后, 文章研究了随机参数对系统 Hopf 分岔的影响, 同时通过数值模拟验证了理论分析. 研究结果说明随机参数可以使随机系统的 Hopf 分岔参数值发生改变, 并且随着随机强度的改变而改变. 这一结果与确定性 van der Pol 的

Hopf 分岔有着显著的不同, 更清晰地说明了研究含有随机参数的非线性系统动力学行为及对其更准确控制的必要性. 由此可见, 正交多项式逼近是一种探索非线性系统丰富现象的有效方法, 通过此法得到的研究结果有助于我们更准确的认识和改造客观世界.

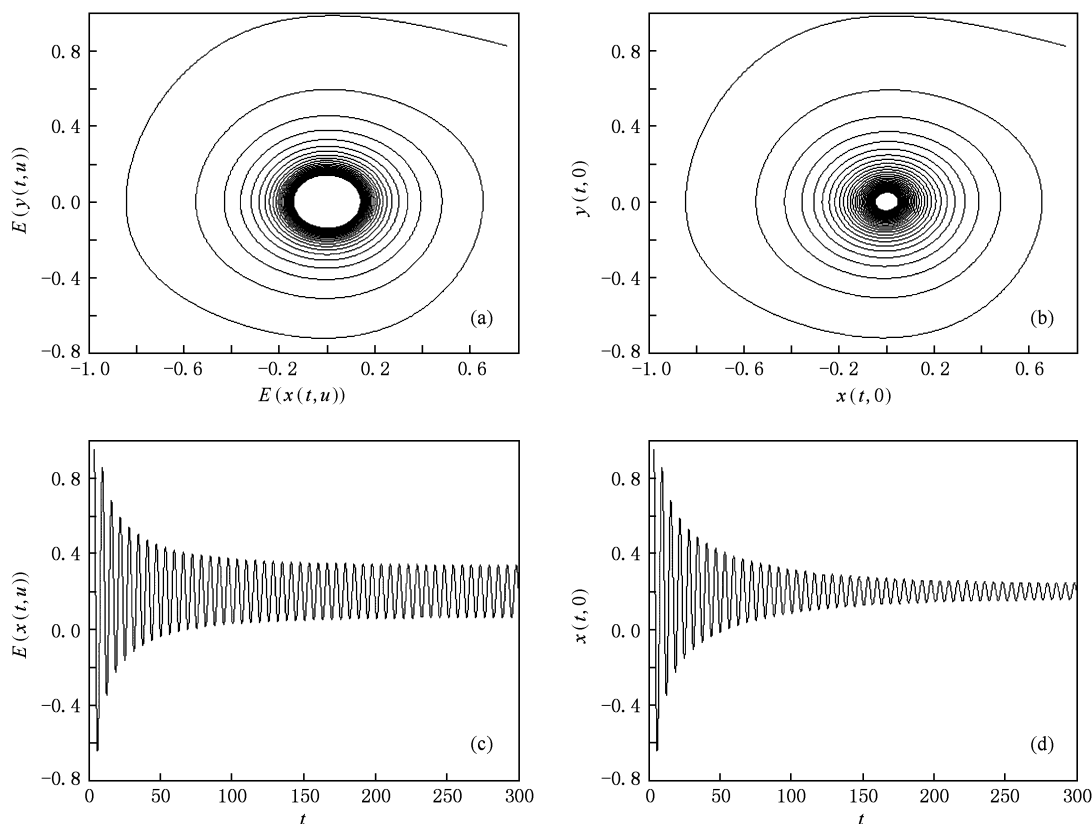


图3 随机 van der Pol 系统 Hopf 分岔后的相轨图(a,b)及时间历程图(c,d) ($\delta = 0.1, \mu = -0.02$) (a, c) 集合平均响应; (b, d) 样本均值响应

[1] Van der Pol B 1927 *Phil. Mag.* **7** 3
 [2] Venkatasubramanian V 1994 *IEEE Trans. Circuits System* **1** 41 765
 [3] Buonomo A 1998 *SIAM J. Appl. Math.* **59** 156
 [4] Qin Q, Gong D, Li R, Wen X 1989 *Phys. Lett. A* **141** 412
 [5] Parlitz U, Lauterborn W 1987 *Phys. Rev. A* **36** 1428
 [6] Mettin R, Parlitz U, Lauterborn W 1993 *International Journal of Bifurcation and Chaos* **36** 1529
 [7] Xu J X, Jiang J 1996 *Chaos, Solitons and Fractals* **7** 3
 [8] Liao X, Wong K, Wu Z 2001 *Nonlinear Dynamics* **26** 23
 [9] Leung H K 1998 *Physica A* **254** 146
 [10] Shinozuka M 1972 *Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE* **98** 1433
 [11] Ghamem R, Spans P 1991 *Stochastic finite element: a spectral approach.* (Berlin: Springer)
 [12] Jensen H, Iwan W D 1992 *ASCE. Eng. Mech.* **118** 1012
 [13] Xiu D B, Karniadakis G E 2002 *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **191** 4927
 [14] Le Maître O P, Najm H N, Ghanem R G, Knio O M 2004 *Journal of Computational Physics* **197** 502
 [15] Wan X L, Karniadakis G E 2005 *Journal of Computational Physics* **209** 617
 [16] Pulch R 2009 *Applied Numerical Mathematics* **59** 2610
 [17] Li J 1996 *Stochastic Structural System-Analysis and Modeling* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [李杰 1996 随机结构系统-分析与建模 (北京: 科学出版社)]

- [18] Fang T, Leng X L, Song C Q 2003 *J. Sound Vib.* **226** 198
- [19] Leng, X L, Wu C L, Ma X P, Meng G, Fang T 2005 *Nonlinear Dynamics* **42** 185
- [20] Wu C L, Ma S J, Sun Z K, Fang T 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 6253 (in Chinese) [吴存利、马少娟、孙中奎、方同 2006 物理学报 **55** 6253]
- [21] Ma S J, Xu W, Li W, Jin Y F 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3508 (in Chinese) [马少娟、徐伟、李伟、靳艳飞 2005 物理学报 **54** 3508]
- [22] Ma S J, Xu W, Jin Y F, Li W, Fang T 2007 *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* **12** 366
- [23] Ma S J, Xu W, Li W, Fang T 2006 *Chin. Phys.* **15** 1231
- [24] Ma S J, Xu W, Li W 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4013 (in Chinese) [马少娟、徐伟、李伟 2006 物理学报 **55** 4013]
- [25] Sun X J, Xu W, Ma S J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 610 (in Chinese) [孙小娟、徐伟、马少娟 2006 物理学报 **55** 610]
- [26] Xu W, Ma S J, Xie W X 2008 *Chin. Phys. B* **17** 857
- [27] Liu B C 2004 *Functional analysis* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [刘炳初 2004 泛函分析 (北京: 科学出版社)]
- [28] Borwein P, Erdélyi T 1995 *Polynomials and Polynomial Inequality* (New York: Springer)
- [29] Liu S K, Liu S D 1988 *Special Function* (Beijing: China Meteorological Press) (in Chinese) [刘式适、刘式达 1988 (特殊函数, 北京: 气象出版社)]
- [30] Kamberich E 1999 *A Guide to Maple* (New York: Springer).
- [31] Guckenheimer J, Holmes P J 1983 *Nonlinear oscillators, Dynamical system and bifurcation of vector fields* (New York: Spring-Verlag)
- [32] Hassard B, Kazarinoff N, Wan Y 1981 *Theory and application of Hopf bifurcation* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [33] Shen J, Jing Z J 1993 *Acta Mathematica Application Sinica* **11** 79

Hopf bifurcation in a kind of stochastic van der Pol system*

Ma Shao-Juan[†]

(School of Information & Computation Science, North University for Nationalities, Yinchuan 750021 China)

(Received 15 December 2009; revised manuscript received 20 April 2010)

Abstract

The Hopf bifurcation of van der Pol system with random parameter is studied. Firstly according to the orthogonal polynomial approximation in Hilbert space, the van der Pol system with random parameter can be reduced into the equivalent deterministic system. Then the Hopf bifurcation can be explored by the traditional methods in deterministic bifurcation theory. After the critical point of Hopf bifurcation in stochastic van der Pol system is obtained, the influence of the random parameter on Hopf bifurcation in stochastic van der Pol system is analyzed. At last we verified these results by numerical simulations.

Keywords: stochastic van der Pol system, Hopf bifurcation, orthogonal polynomial approximation

PACS: 05.45.-a

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grants Nos. 10872165, 10972181, 11002001) and the Research Foundation for State Nationalities Affairs Commission of China (Grant No. 08XBEO), the Research Foundation for Higher Education of Ningxia Hui Autonomous Region of China (Grant No. 2008JY007).

[†] E-mail: dr. sjma@gmail.com