

# 二维抛物线离散映射的动力学研究\*

孟继德<sup>1)†</sup> 包伯成<sup>1)</sup> 徐强<sup>2)</sup>

1) (江苏技术师范学院电气信息工程学院, 常州 213001)

2) (常州工学院计算机信息工程学院, 常州 213002)

(2010年4月6日收到; 2010年5月6日收到修改稿)

由两个一维抛物线离散映射作推广并非线性耦合, 实现了一个新的二维抛物线离散映射. 利用不动点稳定性分析和映射分岔分析, 研究了所提出的二维离散映射的复杂动力学行为及其吸引子的演变过程, 阐述了它所特有的共存分岔模式和快慢周期振荡效应等动力学特性. 研究表明: 二维抛物线离散映射具有动力学特性调节和动态幅度调节的两个功能不同的控制参数, 存在 Hopf 分岔、分岔模式共存、锁频和周期振荡快慢效应等非线性物理现象. 并基于微控制器实现的数字电路验证了相应的理论分析和数值仿真结果.

**关键词:** 二维离散映射, 分岔, 吸引子, 参数

**PACS:** 05.45.-a

## 1. 引言

近几十年来, 非线性科学获得了前所未有的蓬勃发展, 非线性科学的研究不仅具有重大的科学意义, 而且具有广泛的应用前景. 大量的研究工作表明, 混沌在生物工程、力学工程、电子工程、数据加密、保密通信、决策预测、系统和模式识别、电力电网动态分析和保护等领域存在着广阔的应用前景<sup>[1-5]</sup>. 自从 May<sup>[6]</sup> 提出用于刻画生态学中虫口模型的 Logistic 映射和 Feigenbaum<sup>[7]</sup> 在 May 的基础上发现倍周期分岔现象中的标度性和普适常数等以来, 一维离散迭代映射得到了广泛深入的研究<sup>[8-12]</sup>. 然而, 在自然界和实际工程应用中, 一般物理系统是由两个或多个变量构成的, 它们之间互相作用, 使得二维或高维离散映射比一维离散映射具有更加丰富且复杂的动力学行为. 而二维离散映射起着从一维到高维的衔接作用, 对二维离散映射中混沌现象和混沌控制等进行研究有助于揭示和控制更复杂的高维动力学混沌系统的性态. 因此, 近年来对二维离散映射的研究也取得了很大的进展<sup>[12-16]</sup>. 此外, 应用具有复杂动力学特性的二维和高维离散映射的迭代序列进行数据加密或保密通信, 有着更好的安全性能<sup>[17]</sup>.

一般的二维离散映射都存在 Hopf 分岔、锁频等非线性动力学现象, 并能生成复杂的奇怪吸引子<sup>[12, 13, 15]</sup>. 然而, 在非自治连续混沌系统中因外在周期信号激励出现的一些特殊物理现象<sup>[18]</sup>, 例如分岔模型共存、周期振荡快慢效应等现象, 在离散迭代映射中尚未见有此类现象的文献报道. 此外, 最近文献<sup>[19, 20]</sup> 提出了一类具有恒 Lyapunov 指数谱的连续混沌系统, 这类系统存在一个局部变幅参数, 在一定范围内调整时, 系统可保持动力学特性不变, 这种独特的特性使得这类混沌系统具有实际的工程应用价值. 本文由两个一维抛物线离散映射作推广并非线性耦合生成了一个新的二维抛物线离散映射, 通过分析得知该二维离散映射具有分岔模型共存和周期振荡快慢效应等非线性物理现象, 同时该二维离散映射还存在一个全局动态幅度调节参数, 在全局范围内调整时, 不改变映射的动力学特性. 利用对映射的不动点稳定性分析、分岔分析和数字电路实验, 本文对所提出的二维抛物线离散映射进行了全面且深入的分析.

## 2. 映射模型及其基本分析

### 2.1. 数学模型

典型的 Logistic 映射和平方映射均是一维抛物

\* 江苏省自然科学基金(批准号: BK2009105)资助的课题.

†E-mail: mjd@jstu.edu.cn

线离散映射,由它们作推广并非线性耦合,可得到一个简单的二维抛物线离散映射,其方程表达如下:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= ay_n^2, \\ y_{n+1} &= by_n(1-x_n), \end{aligned} \quad (1)$$

式中两个控制参数  $a$  和  $b$  为正实数. 由(1)式可知,这里所提出的二维离散映射是一个二维双参数离散迭代映射,从下面分析结果可知, $a$  具有全局动态幅度调节功能,我们把  $a$  称之为幅度调节参数;而  $b$  具有动力学特性调节功能,我们把  $b$  称之为特性调节参数.

## 2.2. 不动点及其稳定性

令  $S = (x^*, y^*)$  为二维抛物线离散映射(1)的不动点,则不动点满足

$$\begin{aligned} x^* &= ay^{*2}, \\ y^* &= by^*(1-x^*). \end{aligned} \quad (2)$$

当  $0 < b \leq 1$  时,(2)式只有零解,即映射(1)只有一个原点不动点  $S_0 = (0, 0)$ ;当  $b > 1$  时,除了一个零解外,(2)式还有两个非零的实解,即映射(1)有三个不动点,分别为

$$\begin{aligned} S_0 &= (0, 0), \\ S_+ &= (1-1/b, \sqrt{(1-1/b)/a}), \\ S_- &= (1-1/b, -\sqrt{(1-1/b)/a}). \end{aligned} \quad (3)$$

在不动点  $S$  处映射(1)的 Jacobi 矩阵为

$$J_S = \begin{bmatrix} 0 & 2ay^* \\ -by^* & b(1-x^*) \end{bmatrix}, \quad (4)$$

其特征方程为

$$\lambda^2 - \lambda b(1-x^*) + 2aby^{*2} = 0. \quad (5)$$

对于原点不动点  $S_0$ ,有特征值  $\lambda_1 = 0$  和  $\lambda_2 = b$ . 当  $0 < b < 1$  时,两个特征值满足  $|\lambda_{1,2}| < 1$ ,这时原点不动点是吸引的;而当  $b > 1$  时,  $|\lambda_1| < 1$  且  $|\lambda_2| > 1$ ,所以这时原点不动点是鞍点,且是不稳定的,但不是排斥的.

对于两个非零不动点,其特征方程有相同的形式,(5)式可简化为

$$\lambda^2 - \lambda + 2(b-1) = 0, \quad (6)$$

上式有两个特征值

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.5 + 0.5 \sqrt{1-8(b-1)}, \\ \lambda_2 &= 0.5 - 0.5 \sqrt{1-8(b-1)}. \end{aligned} \quad (7)$$

可分为以下三种情况进行分析:

1) 当  $1 < b \leq 1.125$  时,(7)式的两个特征值为实数,且满足  $|\lambda_{1,2}| < 1$ ,这时两个非零不动点

是稳定的鞍点,是吸引的;

2) 当  $1.125 < b < 1.5$  时,(7)式的两个特征值为一对共轭复数,且满足  $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{2(b-1)} < 1$ ,这时两个非零不动点是稳定的焦点,是吸引的;

3) 当  $b > 1.5$  时,(7)式的两个特征值为一对共轭复数,且满足  $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{2(b-1)} > 1$ ,这时两个非零不动点是不稳定的焦点,是排斥的.

从上述分析可知,两个非零不动点随着控制参数  $b$  的增加,在  $b = 1.5$  时到达映射的临界点,这时  $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ ,不动点开始失稳,映射发生 Hopf 分岔,从一个有界点逐步形成不稳定的闭合极限环,极限环经过不断演变后最终形成了混沌吸引子. 因此,参数  $b$  具有动力学特性调节功能,可定义  $b$  为特性调节参数. 同时,映射不动点的特征值与控制参数  $a$  无关,从下面的数值仿真结果可知, $a$  具有动态幅度调节功能,可定义  $a$  为幅度调节参数.

## 3. 分岔分析

利用分岔图、最大 Lyapunov 指数和相轨图等常规的动力学分析手段,可对所提出的二维抛物线离散映射进行动力学分析.

### 3.1. 共存的分岔模式

固定参数  $a = 1$ ,二维抛物线离散映射随参数  $b$  变化的分岔图如图 1 所示. 从图 1 中可观察到,对于不同的初始条件,二维抛物线离散映射存在两种不同的分岔模式. 这两种共存的分岔模式是由于映射(1)存在两个不同的非零不动点引起的.

特性调节参数在  $1 < b < 1.711$  区间内变化时,两个不同的非零不动点对称地位于状态变量  $y$  的正负值区间,它们都是吸引的,在各自邻域形成一个吸引域,但彼此之间存在着一个较大的间隙. 从位于不同区域内的初始条件出发的映射运行轨线,随着迭代次数的增加,很快地落入各自的吸引域中,其由 Poincaré 截面截取的轨迹点在图 1(a) 和 (b) 的分岔图上分别形成了上吸引区域或下吸引区域. 图 2(a) 显示了当  $b = 1.51$  时的映射迭代序列,图 2(a) 说明了映射(1)的运行轨线从初始条件  $(0, 0.1)$  出发,经迭代后最终落入状态变量  $y$  的正值区

间(图中正值区间的黑色曲线  $S_1$ ), 而从初始条件  $(0, -0.1)$  出发, 经迭代后则最终落入状态变量  $y$  的负值区间(图中负值区间的灰色曲线  $S_2$ ).

特性调节参数在  $b > 1.711$  区间内变化时, 从初始条件位于状态变量  $y$  的正负值区间出发的映射运行轨线可以自由穿越上下吸引域, 表现为其穿过 Poincaré 截面上的无数个周期点在图 1(a) 和(b) 的分岔图上, 上下两个吸引区域连成了一片. 图 2(b) 显示了当  $b = 1.72$  时的映射迭代序列, 图中黑色曲线  $S_1$  表示从初始条件  $(0, 0.1)$  出发的运行轨线, 而

灰色曲线  $S_2$  表示从初始条件  $(0, -0.1)$  出发的运行轨线. 需说明的是: 这里为了图示清晰, 有意将黑色曲线  $S_1$  和灰色曲线  $S_2$  在图中分别作了上下偏移. 图 2(b) 说明了映射运行轨线从  $(0, 0.1)$  和  $(0, -0.1)$  这两个不同的初始条件出发时可以自由穿越状态变量  $y$  的正负值区间, 但两条运行轨线存在完全倒相关系. 其实, 该二维映射状态变量  $y$  的运行轨线仅从两个镜像初始值  $(x_0, y_0)$  和  $(x_0, -y_0)$  出发时才有镜像现象发生, 一般情况下运行轨线不存在完全倒相关系.

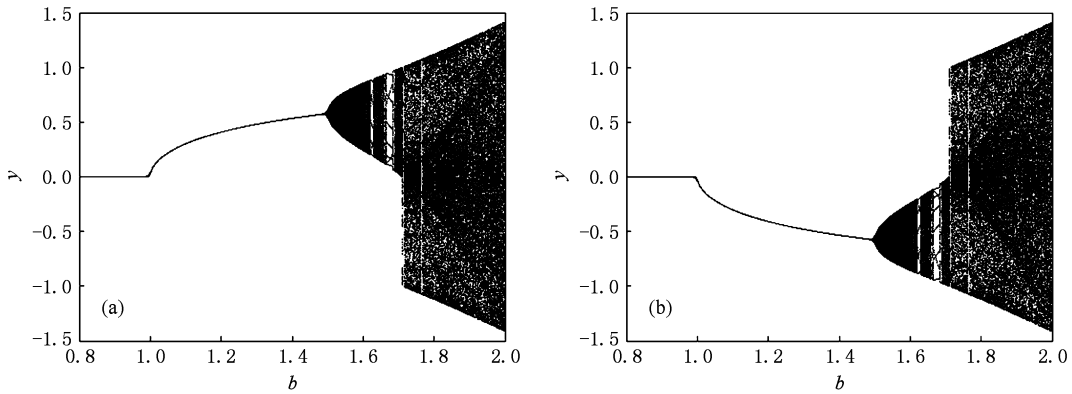


图 1 随  $b$  变化的分岔图 (a) 初始条件为  $(0, 0.1)$ ; (b) 初始条件为  $(0, -0.1)$

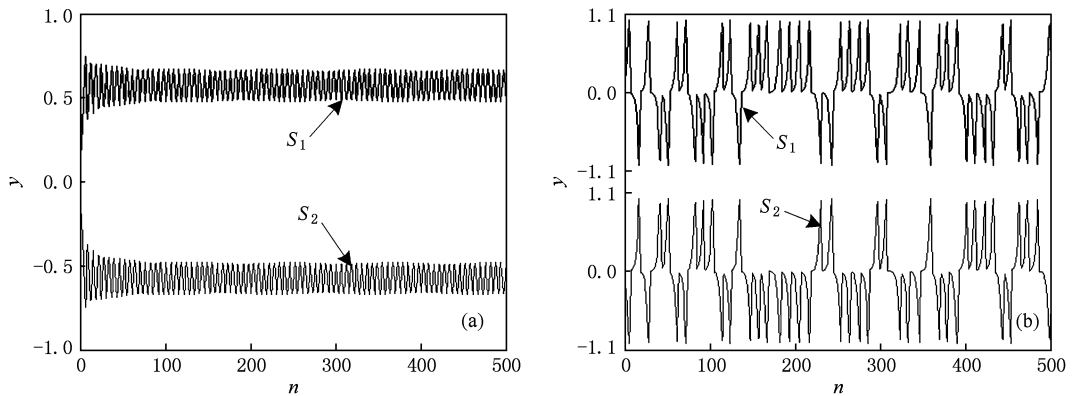


图 2 二维映射的迭代序列 (a)  $b = 1.51$ ; (b)  $b = 1.72$

### 3.2. 吸引子的演变

图 3(a) 给出了二维抛物线离散映射随参数  $b$  变化的最大 Lyapunov 指数. 从图中结果可观察到, 在  $b < 1.56$  区间内, 最大 Lyapunov 指数是负值, 表明二维映射是稳定的, 在此区间内, 最大 Lyapunov 指数分别在  $b = 1$  和  $b = 1.5$  处从负值逐步向零值趋近, 然后又回到负值, 表现为二维映射的运行轨线在  $b < 1$  区间内收敛于不动点  $S_0 = (0, 0)$ , 而在

$1 < b < 1.5$  区间内因初始条件的不同分别渐近趋向不动点  $S_+$  或  $S_-$ . 当  $b > 1.56$  时, 最大 Lyapunov 指数从负值穿过零值到达正值区间, 二维映射进入混沌状态.

图 3(b) 给出了二维抛物线离散映射在  $1.61 \leq b \leq 1.73$  区间内的局部分岔图. 由局部分岔图可见, 在  $1.62 \leq b \leq 1.629$ ,  $1.652 \leq b \leq 1.655$  和  $1.665 \leq b \leq 1.684$  等区间, 分别出现了 7, 14 和 8 周期窗, 存在锁频、边界危机分岔等物理现象.

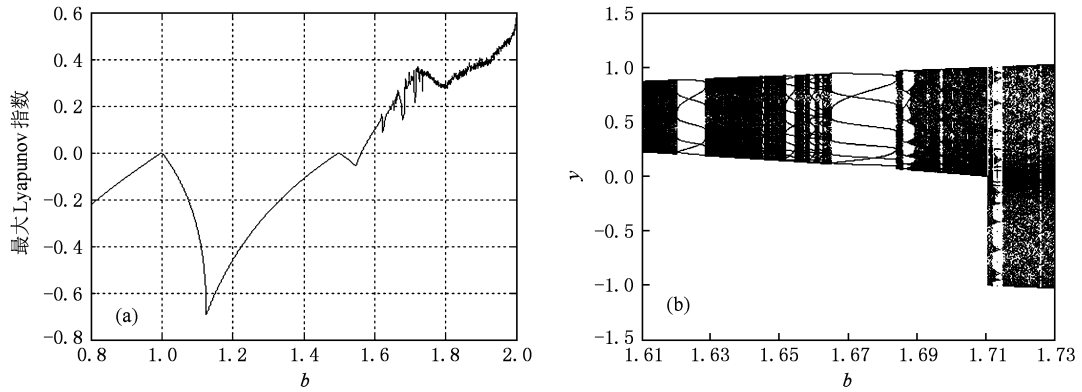


图3 随  $b$  变化的最大 Lyapunov 指数和局部分岔图 (a) 最大 Lyapunov 指数; (b) 局部分岔图

图 4 给出了二维抛物线离散映射随特性调节参数  $b$  变化时吸引子的演变过程. 在  $1 < b < 1.711$  区间内变化时, 图中黑色轨线代表初始条件为  $(0, 0.1)$  时形成的吸引子, 灰色轨线则代表初始条件为  $(0, -0.1)$  时形成的吸引子, 它们对称地位于状态变量  $y$  的正负值区间. 而在  $1.711 < b < 2$  区间内变化时, 从两个对称的初始条件  $(0, 0.1)$  和  $(0, -0.1)$  出发的运行轨线所形成的吸引子则完全重

叠. 从图中可见奇异吸引子是一种始终限于有限区域且轨道永不重复的、形态复杂的运动. 它所具有的精细结构在所有尺度上都存在, 甚至在无穷长时间极限下, 吸引子也不会相平面内形成一个实体.

观察图 4, 可知二维映射最初在两个非零不动点失稳后直接发生 Hopf 分岔, 随不同的初始条件其运行轨线逐渐演变成围绕上或下不动点的极限环. 随  $b$  增加, 上或下极限环增大变形, 形成了奇异的极

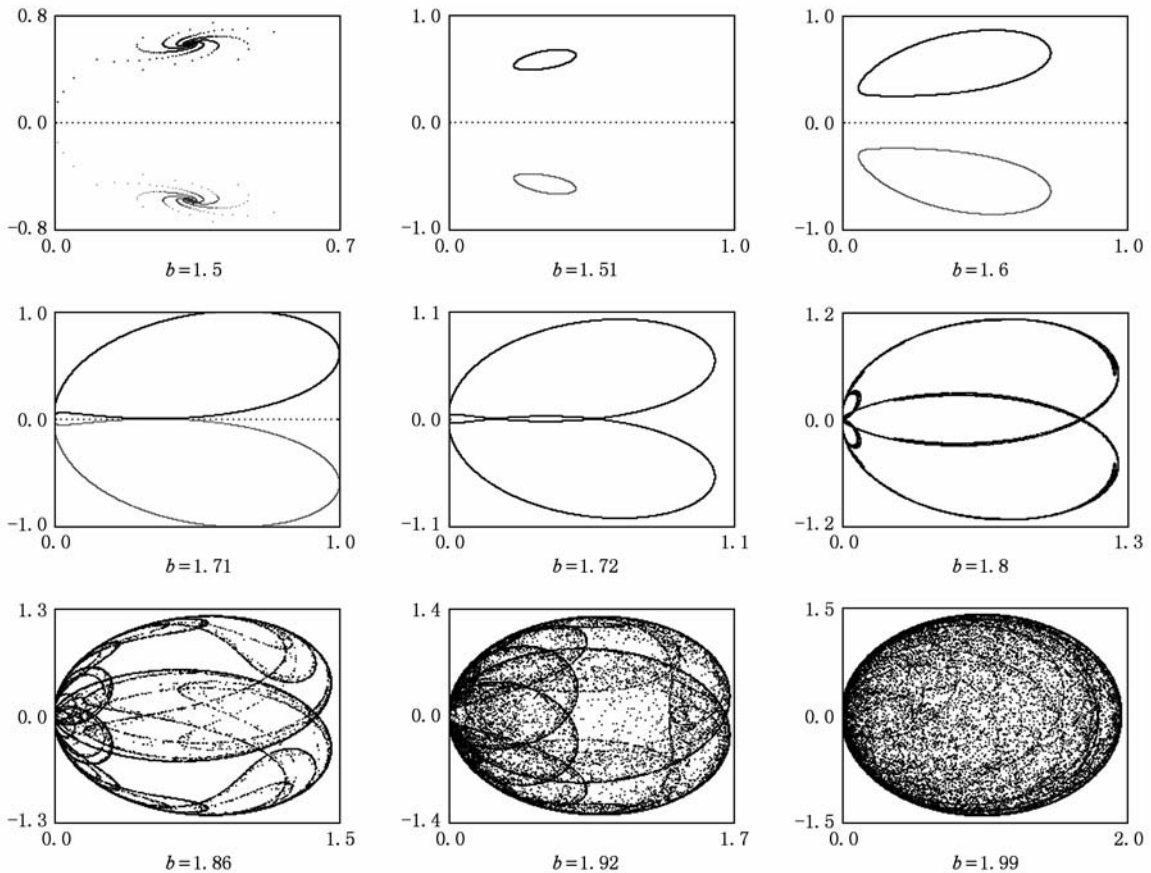


图 4 随  $b$  变化时  $x-y$  平面上相轨的演化

限环吸引子. 当  $b$  增加到 1.71 后, 运行轨线从两个不同的初始条件出发时可以自由穿越状态变量  $y$  的正负值区间, 形成上下完全对称的、互相交叠的奇异混沌吸引子<sup>[12]</sup>. 随着  $b$  的进一步增加, 混沌吸引子互相交叠并逐步融合成一个整体, 当  $b$  接近 2 时, 上下对称的混沌吸引子完全趋于重合, 直至当  $b = 2$  时二维映射运行轨线趋向无穷并发散.

### 3.3. 幅度调节特性

从上述理论分析可知, 二维抛物线离散映射不动点的特征值与控制参数  $a$  无关, 这意味着映射的动力学特性不随该参数的变化而变化, 但控制参数

$a$  的变化会改变非零不动点在变量  $y$  坐标上的位置, 且呈现反比例变化, 因此控制参数  $a$  具有吸引子在纵向上的动态幅度调节功能. 固定参数  $b = 1.8$ , 二维抛物线离散映射随参数  $a$  变化时状态变量  $x$  和  $y$  的分岔图分别如图 5(a) 和(b) 所示. 从图 5 中容易看出, 控制参数  $a$  可以调节变量  $y$  的动态幅度而不改变映射的动力学特性, 但不具有对变量  $x$  的动态幅度的调节功能. 幅度调节参数  $a$  使得新提出的二维抛物线离散映射具有实际的工程应用价值, 在基于混沌的信息工程领域应用时, 通过调节参数  $a$  就可以动态调节混沌信号的输出幅度, 而不需要外接额外的比例器来调整幅度大小.

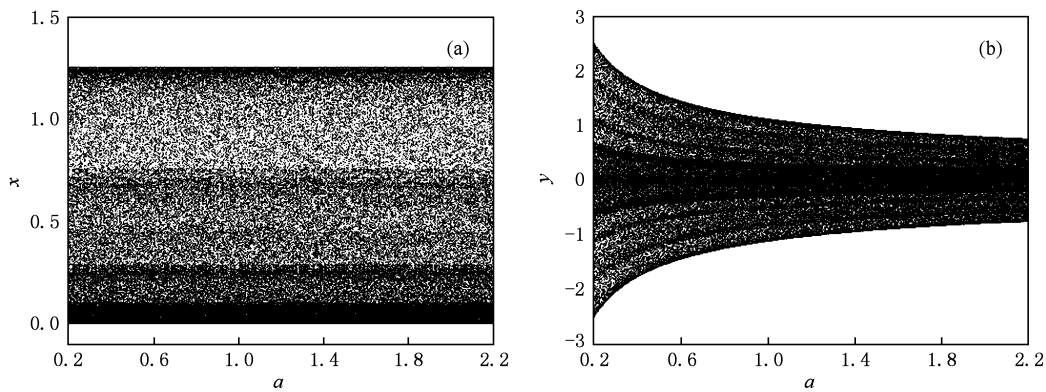


图 5 随  $a$  变化的分岔图 (a) 变量  $x$ ; (b) 变量  $y$

### 3.4. 快慢周期振荡效应

在  $1.5 < b < 1.56$  区间内, 二维抛物线离散映射存在明显的快慢周期振荡效应, 且随着  $b$  增加, 其迭代序列的慢变化频率将迅速增大, 如图 6 所示. 图 6(a) 和(b) 分别显示的是在  $b = 1.51$  和  $b = 1.53$  时二维映射的迭代序列 (这里固定  $a = 1$ ). 图 6(a)

中慢变化频率是快变化频率的  $1/39$ , 而图 6(b) 中慢变化频率则是快变化频率的  $1/12.5$ . 快慢周期振荡效应的出现, 是由于在此参数区间内, 二维映射的最大 Lyapunov 指数为负值而导致的, 此时其运行轨线所形成的极限环是稳定的. 当  $b > 1.56$  时, 极限环失稳并不断扭扩, 直至最终形成奇异的混沌吸引子.

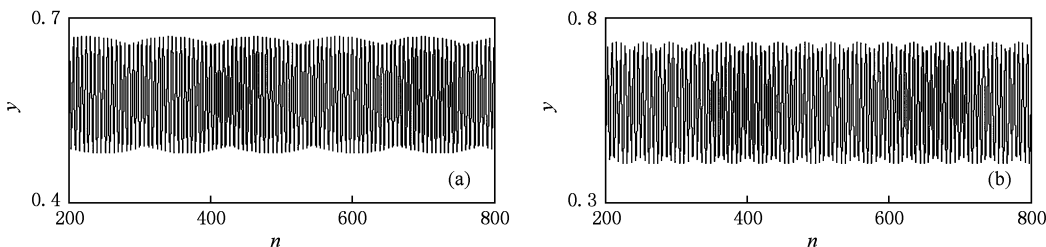


图 6 二维映射的迭代序列 (a)  $b = 1.51$ ; (b)  $b = 1.53$

## 4. 数字电路实验验证

离散迭代映射最适合用数字电路来实现, 它不

需要对映射模型作离散化处理. 本文基于微控制器芯片制作了一个实现新提出的二维抛物线离散映射的实验电路, 这里核心电路采用高性能、低功耗 8 位 ATmega128L 微控制器, 经过 ADUM1410 磁耦合

数字隔离器,由 AD420 数模转换器实现模拟电压信号输出. 该电路通用性强,不受硬件资源的限制,软件可移植性好,可以适用于其他一般混沌电路的数字电路实现.

根据二维抛物线离散映射的数学模型,用 C 语言编制出基于微控制器芯片运行的程序,对数字电路的时序进行控制,并采用 Tektronix 数字示波器作为实验输出设备.

首先采用与图 2 数值仿真结果所对应的两个参数,程序中两个状态变量分别赋初始值(0, 0.1)和

(0, -0.1),二维抛物线离散映射状态变量  $y$  的时域波形实验输出如图 7 所示,图 7 中位于上半部的波形  $S_1$  对应于初始值(0, 0.1),而位于下半部的波形  $S_2$  对应于初始值(0, -0.1). 同样地,为了图示清晰,将实验输出波形  $S_1$  和  $S_2$  在示波器的显示屏上分别作了上下偏移. 从实验中可观察到二维映射运行轨线从两个镜像对称于坐标  $y$  的初始条件出发时也存在镜像关系,并在  $b = 1.72$  时运行轨线可以穿越状态变量  $y$  的正负值区间,与图 2 数值仿真结果相吻合.

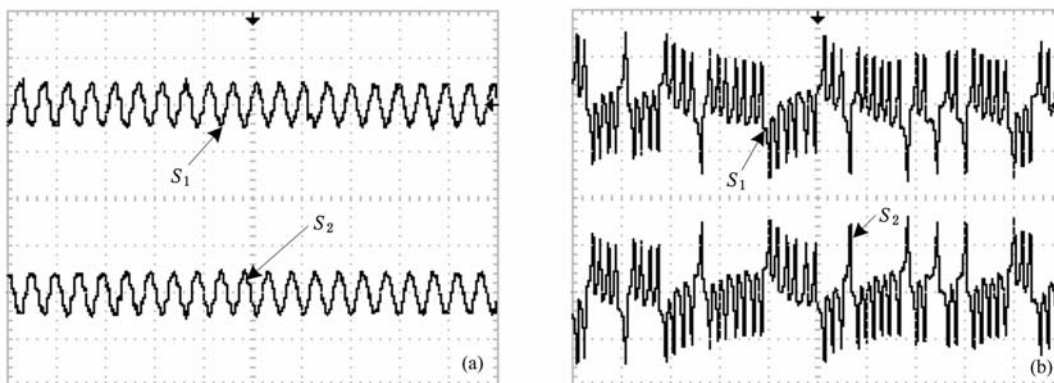


图 7 二维映射时域波形的实验输出 (a)  $b = 1.51$ ; (b)  $b = 1.72$

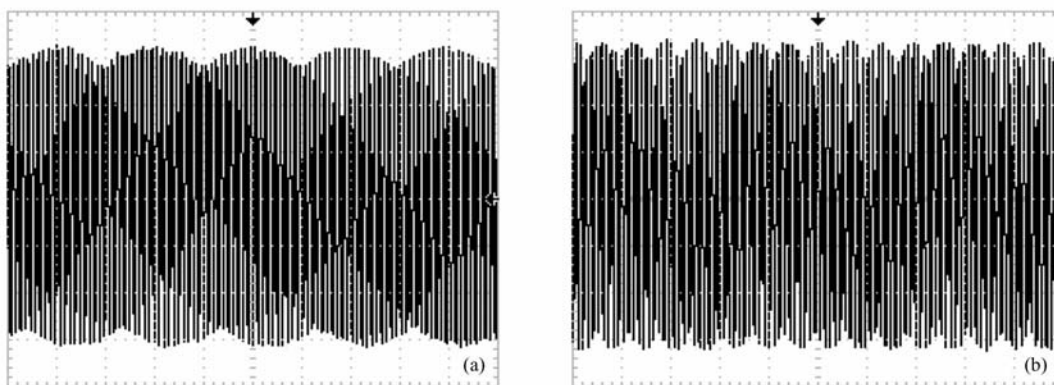


图 8 二维映射时域波形的实验输出 (a)  $b = 1.51$ ; (b)  $b = 1.53$

其次采用与图 6 数值仿真结果所对应的两个参数,程序中两个状态变量均赋初始值(0, 0.1),二维映射时域波形的实验输出如图 8 所示. 不难发现,实验输出的时域波形也具有快慢周期振荡效应,且随参数  $b$  的增加慢变化频率快速增加,这与图 6 所描述的数值仿真结果完全一致.

## 5. 结 论

由两个一维抛物线离散映射作推广并非线性耦合获得的二维抛物线离散映射具有十分丰富的动力学行为,除了存在一般二维离散映射所固有的 Hopf 分岔、锁频等物理现象外,还具有分岔模型共

存和周期振荡快慢效应等独特的物理现象. 通过对映射的不动点稳定性分析, 并借助分岔图、最大 Lyapunov 指数、迭代序列、相轨图等常规的动力学分析手段, 探讨了这类非线性现象的形成机理以及吸引子的演变过程, 指出了二维映射中两个控制参

数所具有的性态. 因此, 本文所提出的二维离散映射有着较好的物理意义和工程应用价值. 此外, 基于微控制器芯片, 数字化实现了新提出的二维抛物线离散映射, 实验观察很好地验证了相应的理论分析和数值仿真结果.

- [1] Liu Z, Zhu X H, Hu W, Jiang F 2007 *Int. J. Bifur. Chaos* **17** 1735
- [2] Lin F Y, Liu J M 2004 *IEEE J. Quantum Electron.* **40** 815
- [3] Long M, Qiu S S 2007 *Chin. Phys.* **16** 2254
- [4] Bao B C, Xu J P, Liu Z 2009 *Chin. Phys. B* **18** 4742
- [5] Zheng F, Tian X J, Li X Y, Wu B 2008 *Chin. Phys. B* **17** 1685
- [6] May R M 1976 *Nature* **261** 459
- [7] Feigenbaum M J 1978 *J. Statistical Phys.* **19** 25
- [8] Yu W P, Wei X P 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3969 (in Chinese) [于万波、魏小鹏 2006 物理学报 **55** 3969]
- [9] Bao B C, Hu W, Liu Z, Kang Z S, Xu J P 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2440 (in Chinese) [包伯成、胡文、刘中、康祝圣、许建平 2009 物理学报 **58** 2440]
- [10] Bao B C, Xu J P, Liu Z 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2949 (in Chinese) [包伯成、许建平、刘中 2009 物理学报 **58** 2949]
- [11] Wang X Y, Liang Q Y 2005 *Chin. J. Theoretical and Applied Mechanics* **37** 522 (in Chinese) [王兴元、梁庆永 2005 力学学报 **37** 522]
- [12] Bao B C, Kang Z S, Xu J P, Hu W 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 1420 (in Chinese) [包伯成、康祝圣、许建平、胡文 2009 物理学报 **58** 1420]
- [13] Wang X Y, Luo C 2005 *Chin. J. Theoretical and Applied Mechanics* **37** 346 (in Chinese) [王兴元、骆超 2005 力学学报 **37** 346]
- [14] Wang X Y, Wang M J 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 731 (in Chinese) [王兴元、王明军 2008 物理学报 **57** 731]
- [15] Wang L M 2009 *J. Northwest Normal Univ. (Natural Science)* **45** 26 (in Chinese) [王立军 2009 西北师范大学学报(自然科学版) **45** 26]
- [16] Wang X Y, Luo C 2006 *J. Software* **17** 729
- [17] Li Z G, Xu D L 2004 *Chaos, Solitons and Fractals* **22** 477
- [18] Zhang X F, Chen Z Y, Ji Y, Bi Q S 2009 *Chin. J. Theoretical and Applied Mechanics* **41** 765 (in Chinese) [张晓芳、陈章耀、季颖、毕勤胜 2009 力学学报 **41** 765]
- [19] Li C B, Wang D C 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 764 (in Chinese) [李春彪、王德纯 2009 物理学报 **58** 764]
- [20] Li C B, Wang H K, Chen S 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 783 (in Chinese) [李春彪、王翰康、陈谥 2010 物理学报 **59** 783]

## Dynamics of two-dimensional parabolic discrete map<sup>\*</sup>

Meng Ji-De<sup>1)†</sup> Bao Bo-Cheng<sup>1)</sup> Xu Qiang<sup>2)</sup>

1) (*School of Electrical and Information Engineering, Jiangsu Teachers University of Technology, Changzhou 213001, China*)

2) (*School of Computer and Information Engineering, Changzhou Institute of Technology, Changzhou 213002, China*)

(Received 6 April 2010; revised manuscript received 6 May 2010)

### Abstract

By extending and nonlinearly coupling two one-dimensional parabolic discrete maps, a new two-dimensional parabolic discrete map is achieved. By using stability analysis of fixed points and bifurcation analysis of map, the complex dynamical behavior and attractor evolution of the proposed two-dimensional discrete map are investigated, and its peculiar dynamical characteristics, such as the coexisting bifurcation modes and fast-slow periodic oscillation effects, etc., are illustrated. The research results indicate that two-dimensional parabola discrete map has two control parameters with different functions of adjustable dynamical behaviors and adjustable dynamic amplitudes, and there emerge nonlinear physical phenomena of Hopf bifurcation, bifurcation mode coexisting, locked-frequency and periodic oscillation fast-slow effect. Furthermore, the corresponding theoretical analysis and numerical simulation results are verified based on a digital circuit realized by microcontroller.

**Keywords:** two-dimensional discrete map, bifurcation, attractor, parameter

**PACS:** 05.45.-a

---

<sup>\*</sup> Project supported by the Natural Science Foundations of Jiangsu Province, China (Grant No. BK2009105).

<sup>†</sup> E-mail: mjd@jstu.edu.cn