

## 一个三时滞生物捕食被捕食系统分岔的混合控制\*

张丽萍<sup>1)2)†</sup> 王惠南<sup>2)</sup> 徐敏<sup>3)</sup>

1)(南京航空航天大学理学院, 南京 210016)

2)(南京航空航天大学自动化学院, 南京 210016)

3)(南京航空航天大学信息科学与技术学院, 南京 210016)

(2008年8月6日收到;2010年6月24日收到修改稿)

针对多时滞捕食被捕食系统的 Hopf 分岔控制问题, 提出一种基于状态反馈和参数调节的混合控制方法, 这种混合控制方法可以延迟有害 Hopf 分岔的发生或使 Hopf 分岔消失. 分析了该控制系统的稳定性和 Hopf 分岔的存在性, 并通过规范型理论和中心流形定理, 给出了分岔周期解的稳定性和分岔方向的计算公式. 最后通过数值模拟验证了该理论的正确性.

**关键词:** 时滞, 捕食被捕食系统, Hopf 分岔, 混合控制

**PACS:** 05.45.-a, 02.30.KS

## 1. 引言

分岔是一种重要的非线性现象, 与混沌有着密切的联系, 而这种现象的发生可能对生物医学等造成难以估计的有害影响<sup>[1]</sup>. 例如, 水华是湖泊中某些浮游藻类、原生动物和细菌在一定的条件下爆发性聚集而引起水体变色的一种有害生态异常现象, 研究发现某些参数变化可以导致生态系统发生分岔乃至混沌行为<sup>[2]</sup>, 在实际意义上也就是导致了藻类发生爆发性增长(水华发生).

分岔控制的目的是对给定的非线性动力系统设计一个控制器, 用来改变系统的分岔特性, 从而消除系统中有害的动力学行为, 使之产生人们需要的动力学行为. 非线性系统的分岔控制在国际上正在形成一个专门的、全新的研究方向. 由于倍周期分岔可以导致混沌发生, 所以研究分岔控制不仅可以更好地掌握和改变分岔性态, 还可以利用它来实现对混沌的有效控制. 最近 Luo 等<sup>[3]</sup>提出了一种新的控制策略——混合控制策略; Liu 等<sup>[4]</sup>进一步给出了无时滞连续系统的混合控制策略. 混合控制是在反馈控制器的基础上增加一补偿结构(参数扰动)以实现精度或干扰能力较高的控制任务<sup>[5]</sup>. 应用混合控制可以更好地考虑到系统参数的不确定

性, 使得控制策略更加适用.

目前涉及时滞和生物捕食系统的研究已经有很多工作<sup>[6-17]</sup>, 关于时滞生物捕食系统的控制主要集中在状态反馈控制, 这也是目前生物控制常用的方法, 生物控制方式是生态系统控制方法中非常有效适用的一种方法, 主要通过改变生物群落的结构, 增加对被捕食者的牧食压力; 比如在水华的控制中, 通常增加湖泊中以浮游生物为食的鱼类(鲢鱼、鳙鱼)来控制水华. 但生物捕食系统的混合控制所做的工作还为之甚少. 本文就是把混合控制的方法用在生物捕食系统中.

1973年 May<sup>[1]</sup>提出如下的捕食-被捕食系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t) [r_1 - a_{11}x(t - \tau) - a_{12}y(t)], \\ \dot{y}(t) &= y(t) [-r_2 + a_{21}x(t) - a_{22}y(t)], \end{aligned} \quad (1)$$

$x(t)$ ,  $y(t)$  分别表示  $t$  时刻被捕食者和捕食者的密度,  $r_i > 0 (i=1, 2)$  表示被捕食者和捕食者的内禀增长率;  $a_{11}$ ,  $a_{22}$ , 表示种内作用系数,  $a_{12}$ ,  $a_{21}$  表示种间作用系数;  $\tau$  表示被捕食者的成熟时间, 即被捕食者的密度变化对于自身增长率的消极反馈时间.

颜和李<sup>[14]</sup>在(1)式的基础上进一步考虑捕食者的密度变化对于自身增长率的消极反馈时间, 即考虑如下的系统:

$$\dot{x}(t) = x(t) [r_1 - a_{11}x(t - \tau) - a_{12}y(t)],$$

\* 南京航空航天大学基本科研业务费专项科研项目(批准号: NS2010112)资助的课题.

† E-mail: lpzhang0818@yahoo.com.cn.

$$\dot{y}(t) = y(t)[-r_2 + a_{21}x(t) - a_{22}y(t - \tau)]. \quad (2)$$

Faria<sup>[6]</sup>考虑狩猎时滞,即考虑种群  $x(t)$  和  $y(t)$  之间的影响不是瞬时发生作用而是有一定的时间延迟,此时系统如下:

$$\dot{x}(t) = x(t)[r_1 - a_{11}x(t) - a_{12}y(t - \tau_1)],$$

$$\dot{y}(t) = y(t)[-r_2 + a_{21}x(t - \tau_2) - a_{22}y(t)]. \quad (3)$$

2008年,颜和张<sup>[16]</sup>综合两种时滞,考虑如下系统:

$$\dot{x}(t) = x(t)[r_1 - a_{11}x(t - \tau) - a_{12}y(t - \tau)],$$

$$\dot{y}(t) = y(t)[-r_2 + a_{21}x(t - \tau) - a_{22}y(t - \tau)]. \quad (4)$$

考虑到不同的生物成熟时间和狩猎时间是不同的,本文考虑了多时滞的情况,另外,对于生态系统控制的研究,以前主要考虑状态反馈控制,例如为了消除水华的发生,一种有效的办法是在方程中引入反馈控制变量(如鲢鱼、鳙鱼)以改变系统的平衡态.在实际中,种内作用系数和种间作用系数等参数(如温度,光照等)受很多因素的影响,所以也可以通过改变参数来调节系统.本文综合考虑参数和状态反馈控制,提出如下多时滞的捕食被捕食混合控制系统:

$$\dot{x}(t) = \alpha x(t)[r_1 - a_{11}x(t - \tau_1) - a_{12}y(t - \tau_3)] + \beta x(t - \tau_1),$$

$$\dot{y}(t) = \alpha y(t)[-r_2 + a_{21}x(t - \tau_2) - a_{22}y(t - \tau_1)] + \beta y(t - \tau_1). \quad (5)$$

$\alpha > 0, \beta \in R$  是控制参数; $\tau_1$  表示种群的成熟时间,即种群的密度变化对于自身增长率消极反馈时间, $\tau_2$  和  $\tau_3$  表示狩猎时间; $\alpha > 0$  可以进行参数调节,这些参数包括种内作用系数,种间作用系数,还有出生率、死亡率,在具体调节中,可以考虑影响这些参数的因素,比如温度可以影响出生率,则可以通过控制温度达到调节出生率的目的.  $\beta x(t - \tau_1)$  是改变  $t - \tau_1$  时刻被捕食者的数量,  $\beta y(t - \tau_1)$  是改变  $t - \tau_1$  时刻捕食者的数量,  $\beta > 0$  表示增加其数量,如放养,  $\beta < 0$  表示减少其数量,如捕捞.通过对系统参数的调节和  $t - \tau_1$  时刻捕食者和被捕食者数量的改变来调节系统.当  $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau$  且  $\alpha = 1, \beta = 0$  时,就成为文献[16]研究的系统,该文把时滞  $\tau$  作为分岔参数研究了系统的 Hopf 分岔.当  $\alpha = 1, \beta \neq 0$  时,就是对捕食被捕食系统给予状态反馈控制,由于多

时滞系统的特征方程是一个超越方程,目前还没有有效的方法求解此类超越方程,为方便讨论,本文令  $2\tau_1 = 2\tau = \tau_2 + \tau_3$ ,当  $r_1 a_{21} - r_2 a_{11} > 0$  时,系统(7)存在唯一的正平衡点  $E_*(x^*, y^*)$ <sup>[17]</sup>,其中

$$x^* = \frac{r_1 a_{22} + r_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} + a_{12} a_{21}}, y^* = \frac{r_1 a_{21} - r_2 a_{11}}{a_{11} a_{22} + a_{12} a_{21}}.$$

## 2. 捕食被捕食系统分岔的混合控制

令  $u_1(t) = x(t) - x^*, u_2(t) = y(t) - y^*$ , 系统(5)在平衡点的线性化系统如下:

$$\begin{aligned} \dot{u}_1(t) &= (\beta - \alpha a_{11} x^*) u_1(t - \tau_1) \\ &\quad - \alpha a_{12} x^* u_2(t - \tau_3), \\ \dot{u}_2(t) &= \alpha a_{21} y^* u_1(t - \tau_2) \\ &\quad + (\beta - \alpha a_{22} y^*) u_2(t - \tau_1). \end{aligned} \quad (6)$$

其特征方程为

$$\begin{aligned} \lambda^2 + (\alpha(a_{11} x^* + a_{22} y^*) + 2\beta) \lambda e^{-\lambda\tau} \\ + ((\alpha a_{11} x^* + \beta)(\alpha a_{22} y^* + \beta) \\ + \alpha^2 a_{12} a_{21} x^* y^*) e^{-2\lambda\tau} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

经过简单变换,(7)式可以改写为

$$\lambda^2 e^{2\lambda\tau} + 2T \lambda e^{\lambda\tau} + D = 0, \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} T &= \alpha \frac{(a_{11} x^* + a_{22} y^*)}{2} + \beta > 0, \\ D &= (\alpha a_{11} x^* + \beta)(\alpha a_{22} y^* + \beta) \\ &\quad + \alpha^2 a_{12} a_{21} x^* y^* > 0. \end{aligned}$$

方程(8)是关于  $\lambda e^{\lambda\tau}$  二次方程,对应的特征根为

$$\lambda e^{\lambda\tau} = -T \pm \sqrt{T^2 - D}. \quad (9)$$

当  $\tau = 0$  时,方程(8)的特征根为  $\lambda_1 = -T + \sqrt{T^2 - D}, \lambda_2 = -T - \sqrt{T^2 - D}$ ,所以容易知道当  $\tau = 0$  时方程(8)的特征根有负实部.接下来考虑  $\tau \neq 0$  时,方程(7)的根是否递增到零或是穿过虚轴.利用  $\tau = 0$  时的两个特征根  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$ , 方程(8)可以写成

$$(\lambda - \lambda_1 e^{-\lambda\tau})(\lambda - \lambda_2 e^{-\lambda\tau}) = 0.$$

记  $\lambda = \rho + i\omega$  是方程(7)的一个特征根,事实上,稳定性的变化只可能发生在  $\rho = 0$  时,而  $\lambda = i\omega$  是方程(7)的根当且仅当下面的公式成立:

$$i\omega - \lambda_1 e^{-i\omega\tau} = 0 \text{ 或 } i\omega - \lambda_2 e^{-i\omega\tau} = 0. \quad (10)$$

当  $T^2 - D \geq 0$  时,则  $\lambda_2 \leq \lambda_1 < 0$ , 方程(8)等价于如下的方程:

$$i\omega - \lambda_1 (\cos\omega\tau - i\sin\omega\tau) = 0$$

和

$$i\omega - \lambda_2(\cos\omega\tau - i\sin\omega\tau) = 0. \quad (11)$$

分离(9)式的实部和虚部可以得到如下的方程:

$$\begin{aligned} \omega\sin(\omega\tau) &= -T \pm \sqrt{D - T^2}, \\ \omega\cos(\omega\tau) &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

即

$$\begin{aligned} \omega &= -\lambda_1, \\ \tau = \tau_j^{(1)} &= -\frac{1}{\lambda_1}\left(2j\pi + \frac{\pi}{2}\right), j = 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} \omega &= -\lambda_2, \\ \tau = \tau_j^{(2)} &= -\frac{1}{\lambda_2}\left(2j\pi + \frac{\pi}{2}\right), j = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (13)$$

注意到  $\lambda_2 \leq \lambda_1 < 0$ , 所以我们有  $\tau_j^{(2)} \leq \tau_j^{(1)}, j = 0, 1, \dots$ .

当  $T^2 - D < 0$  时, 那么  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  是一对纯虚根, 方程(9)等价于如下的方程:

$$i\omega + (T - i\sqrt{D - T^2})(\cos\omega\tau - i\sin\omega\tau) = 0, \quad (14)$$

和

$$i\omega + (T + i\sqrt{D - T^2})(\cos\omega\tau - i\sin\omega\tau) = 0. \quad (15)$$

分离方程(9)的实部和虚部可以得到如下方程:

$$\begin{aligned} \omega\sin(\omega\tau) &= -T, \\ \omega\cos(\omega\tau) &= \pm\sqrt{D - T^2}, \end{aligned} \quad (16)$$

也就是  $\omega = \sqrt{D}$ , 并且

$$\begin{aligned} \tau = \tau_j^{(3)} &= \frac{1}{\sqrt{D}}\left[\arccos\left(\sqrt{1 - \frac{T^2}{D}}\right) + 2j\pi\right], j = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (17)$$

和

$$\begin{aligned} \tau = \tau_j^{(4)} &= \frac{1}{\sqrt{D}}\left[-\arccos\left(\sqrt{1 - \frac{T^2}{D}}\right) + (2j + 1)\pi\right], \\ j &= 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (18)$$

显而易见  $\tau_j^{(3)} \leq \tau_j^{(4)} (j = 0, 1, 2, \dots)$ . 所以当  $T^2 - D \geq 0$  时, 方程(7)在  $\tau = \tau_j^{(k)} (k = 1, 2)$  时有一对纯虚根  $\pm i\lambda_k (k = 1, 2)$ . 当  $T^2 - D < 0$  时, 方程(7)在  $\tau = \tau_j^{(k)} (k = 3, 4)$  时有一对纯虚根  $\pm i\sqrt{D}$ .

综上所述, 我们得到如下结论:

**定理 1**

1) 当  $T^2 - D \geq 0 (T^2 - D < 0), \tau \in [0, \tau_0^{(2)}] (\tau$

$\in [0, \tau_0^{(3)})$ ) 时, 系统(5)的平衡点  $E_*(x^*, y^*)$  是渐近稳定的.

2) 当  $T^2 - D \geq 0 (T^2 - D < 0), \tau > \tau_0^{(2)} (\tau > \tau_0^{(3)})$  时, 系统(5)的平衡点  $E_*(x^*, y^*)$  是不稳定的.

3) 当  $T^2 - D \geq 0 (T^2 - D < 0), \tau \in \{\tau_j^{(2)}, \tau_j^{(1)}\} (\tau \in \{\tau_j^{(3)}, \tau_j^{(4)}\}), j = 0, 1, 2, \dots$  时, 系统(5)发生 Hopf 分岔.

令  $\lambda(\tau) = \alpha(\tau) \pm i\omega(\tau)$  是方程(7)当  $\tau = \tau_j^{(k)} (k = 1, 2, 3, 4)$  时的特征根, 其中  $\alpha(\tau_j^{(k)}) = 0, \omega(\tau_j^{(k)}) = -\lambda_k (k = 1, 2)$  和  $\omega(\tau_j^{(k)}) = \sqrt{D} (j = 0, 1, 2, \dots)$ . 可以验证如下的横截性条件  $(d\text{Re}\lambda(\tau)/d\tau)|_{\tau=\tau_j^{(k)}} > 0 (k = 1, 2, 3, 4; j = 0, 1, 2, \dots)$  成立.

**3. 分岔方向和稳定性**

借助于中心流形定理和规范型理论以及 Hopf 分岔理论<sup>[7]</sup>研究分岔周期解的方向和稳定性. 以下假设  $f_i \in C^2(R), i = 1, 2$ . 为计算方便, 在系统(5)中不妨令  $\tau_2 \leq \tau_1 \leq \tau_3, \tau_1 = \tau = \tau_0 + \mu, \mu \in R$ . 则系统(5)可以写为  $C = C([- \tau_3, 0], R^2)$  中的泛函微分方程.

令  $u = (u_1, u_2)^T, \phi = (\phi_1, \phi_2)^T \in C([- \tau_3, 0], R^2)$ , 则系统(5)可以进一步写为如下向量形式:

$$\dot{u}(t) = L_\mu(u_t) + F(\mu, u_t). \quad (19)$$

显然  $L_\mu$  是一簇定义在  $C$  上的单参数有界线性算子. 根据 Riesz 表示定理, 在  $[- \tau_3, 0]$  上存在有界变差函数  $\eta(\theta, \mu)$  使得

$$\begin{aligned} L_\mu\varphi &= \int_{-\tau_3}^0 d\eta(\theta, \mu)\varphi(\theta), \varphi \in C, \\ \phi &= (\phi_1, \phi_2)^T \in C([- \tau_3, 0], R^2). \end{aligned} \quad (20)$$

选取

$$\eta(\theta, \mu) = \begin{cases} 0, & \theta = 0, \\ C_2\delta(\theta + \tau_2), & \theta \in [- \tau_2, 0), \\ C\delta(\theta + \tau), & \theta \in [- \tau, - \tau_2), \\ C_1\delta(\theta + \tau_3), & \theta \in [- \tau_3, - \tau), \end{cases}$$

其中

$$C = \begin{pmatrix} -a_{11}x^* & 0 \\ 0 & -a_{22}y^* \end{pmatrix}, C_1 = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12}y^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21}x^* & 0 \end{pmatrix}, \delta(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta \neq 0, \\ 1, & \theta = 0, \end{cases}$$

对任意的  $\phi = (\phi_1, \phi_2)^T \in C([- \tau_3, 0], R^2)$ , 定义

$$A_\mu \phi = \begin{cases} \frac{d\phi}{d\theta}, & \theta \in [- \tau_3, 0], \\ \int_{-\tau_3}^0 d\eta(\xi, \mu)\phi(\xi) = L_\mu \phi, & \theta = 0, \end{cases} \quad (21)$$

和

$$R_\mu \phi = \begin{cases} 0, & \theta \in [- \tau_3, 0], \\ F(\mu, \phi), & \theta = 0. \end{cases} \quad (22)$$

注意到  $\frac{du_t}{d\theta} = \frac{du_t}{dt}$ , 那么系统 (19) 改写为

$$\dot{u}_t = A_\mu u_t + R_\mu u_t. \quad (23)$$

记  $A_{\mu=\mu_0} = A_0, R_{\mu=\mu_0} = R_0, L_{\mu=\mu_0} = L_0, \eta(0, \theta) = \eta(\theta)$ . 对任意的  $\psi \in C^1([0, \tau_3], R^2)$ , 定义  $A_0$  的伴随算子  $A_0^*$  如下:

$$A_0^* \psi = \begin{cases} -\frac{d\psi(s)}{d\theta}, & s \in [0, \tau_3], \\ \int_{-\tau_3}^0 d\eta^T(t)\psi(-t), & s = 0. \end{cases} \quad (24)$$

对  $\varphi \in C$  和  $\psi \in C^1([0, \tau_3], R^2)$ , 定义如下内积:

$$\langle \psi(s), \varphi(\theta) \rangle = \bar{\psi}^T(0)\varphi(0) - \int_{\theta=-\tau_3}^0 \int_{\xi=0}^\theta \bar{\psi}^T \times (\xi - \theta) d\eta(\theta)\varphi(\xi) d\xi, \quad (25)$$

因此  $A_0$  和  $A_0^*$  是一对共轭算子, 故  $\pm i\omega$  既是  $A_0$  的一对特征根, 又是  $A_0^*$  的一对特征根.

### 引理 1

$q(\theta) = Ve^{i\omega\theta}, \theta \in [- \tau_3, 0]$  是  $A_0$  对应于  $i\omega$  的特征向量;  $q^*(s) = V^*e^{i\omega s}, s \in [0, \tau_3]$  是  $A_0^*$  对应于  $-i\omega$  的特征向量, 并且有  $\langle q^*, q \rangle = 1, \langle q^*, \bar{q} \rangle = 0$ , 其中

$$V = (1, \rho_1)^T, \rho_1 = \frac{i\omega + (\alpha a_{11}x^* + \beta)e^{-i\omega\tau}}{\alpha a_{12}y^*} e^{i\omega\tau_3},$$

$$V^* = (\rho_2, 1)^T,$$

$$\rho_2 = \frac{(\alpha a_{22}y^* + \beta)e^{i\omega\tau} - i\omega}{\alpha a_{12}y^* e^{i\omega\tau_3}}.$$

接下来计算  $\langle q^*, q \rangle$  式如下

$$\begin{aligned} \langle q^*, q \rangle &= \bar{q}^{*T}(0)q(0) - \int_{\theta=-\tau_3}^0 \int_{\xi=0}^\theta \bar{q}^{*T} \\ &\quad \times (\xi - \theta) d\eta(\theta)q(\xi) d\xi \\ &= \bar{D} [ \bar{V}^{*T}V + \tau_3 e^{-i\omega\tau_3} \bar{V}^{*T}C_1V \\ &\quad + \tau e^{-i\omega\tau} \bar{V}^{*T}CV + \tau_2 e^{-i\omega\tau_2} \bar{V}^{*T}C_2V ]. \end{aligned}$$

因此, 当选取

$$\begin{aligned} \bar{D} &= [ \bar{V}^{*T}V + \tau_3 e^{-i\omega\tau_3} \bar{V}^{*T}C_1V \\ &\quad + \tau e^{-i\omega\tau} \bar{V}^{*T}CV + \tau_2 e^{-i\omega\tau_2} \bar{V}^{*T}C_2V ]^{-1}, \end{aligned}$$

结合上式可知  $\langle q^*, q \rangle = 1$ . 另一方面, 因为

$$\begin{aligned} -i\omega \langle q^*, \bar{q} \rangle &= \langle q^*, A_0 \bar{q} \rangle = \langle A_0 q^*, \bar{q} \rangle \\ &= \langle -i\omega q^*, \bar{q} \rangle = i\omega \langle q^*, \bar{q} \rangle, \end{aligned}$$

故可知  $\langle q^*, \bar{q} \rangle = 0$ .

下面计算中心流形  $C_0$  在  $\mu = \mu_0$  处的坐标, 令  $u_t$  为方程(23)的解, 定义

$$z(t) = \langle q^*, u_t \rangle,$$

$$W(t, \theta) = u_t(\theta) - 2\text{Re}\{z(t)q(\theta)\}. \quad (26)$$

在中心流形  $C_0$  上有  $W(t, \theta) = W(z(t), \bar{z}(t), \theta)$ , 其中

$$\begin{aligned} W(z, \bar{z}, \theta) &= W_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + W_{11}(\theta) z\bar{z} \\ &\quad + W_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + W_{03}(\theta) \frac{z^3}{6} + \dots, \end{aligned}$$

将上式简记为

$$\dot{z}(t) = i\omega z(t) + g(z, \bar{z}),$$

其中

$$\begin{aligned} g(z, \bar{z}) &= \bar{q}^{*T}(0)f_0(z, \bar{z}) = \bar{q}^{*T}(0)F(W(z, \bar{z}, \theta) \\ &\quad + 2\text{Re}\{zq(\theta)\}, 0) \\ &= g_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + g_{11}(\theta) z\bar{z} + g_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} \\ &\quad + g_{21}(\theta) \frac{z^2\bar{z}}{6} + \dots. \end{aligned} \quad (27)$$

注意到

$$\begin{aligned} u_1(0) &= W^{(1)}(0, 0) + z(t) + \bar{z}(t), \\ u_2(0) &= W^{(2)}(0, 0) + z(t)Ne^{i\omega\tau_3} + \bar{z}(t)\bar{N}e^{-i\omega\tau_3}, \\ u_1(-\tau_2) &= W^{(1)}(0, -\tau_2) + z(t)e^{-i\omega\tau_2} + \bar{z}(t)e^{i\omega\tau_2}, \\ u_2(-\tau_3) &= W^{(2)}(0, -\tau_3) + z(t)N + \bar{z}(t)\bar{N}, \\ u_1(-\tau) &= W^{(1)}(0, -\tau) + z(t)e^{-i\omega\tau} + \bar{z}(t)e^{i\omega\tau}, \\ u_2(-\tau) &= W^{(2)}(0, -\tau) + z(t)Ne^{i\omega(\tau_3-\tau)} \\ &\quad + \bar{z}(t)\bar{N}e^{-i\omega(\tau_3-\tau)}, \end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned} N &= q^{(2)}(-\tau_3) \\ &= \frac{1}{\alpha_{12}y^*} (1 + i\omega - (\alpha a_{11}x^* + \beta)e^{-i\omega\tau}), \end{aligned}$$

其中

$$q(\theta) = Ve^{i\omega\theta}, \theta \in [- \tau_3, 0],$$

$$W^{(2)}(0, -\tau_3) = W_{20}^{(2)}(-\tau_3) \frac{z^2}{2} + W_{11}^{(2)}(-\tau_3) z\bar{z}$$

$$\begin{aligned}
 & + W_{02}^{(2)}(-\tau_3) \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots, \\
 W^{(1)}(0, -\tau_2) & = W_{20}^{(2)}(-\tau_2) \frac{z^2}{2} + W_{11}^{(2)}(-\tau_2) z\bar{z} \\
 & + W_{02}^{(2)}(-\tau_2) \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots, \\
 W^{(j)}(0, -\tau) & = W_{20}^{(j)}(-\tau) \frac{z^2}{2} + W_{11}^{(j)}(-\tau) z\bar{z} \\
 & + W_{02}^{(j)}(-\tau) \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots \quad (j = 1, 2),
 \end{aligned} \tag{28}$$

我们有

$$\begin{aligned}
 g(z, \bar{z}) & = \bar{q}^{*\text{T}}(0) f_0(z, \bar{z}) \\
 & = \frac{1}{2} \bar{D}(\bar{\alpha}^*, 1) \begin{pmatrix} f_{11}^\theta \\ f_{12}^\theta \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 f_{11}^\theta & = -\alpha a_{11} u_1(0) u_1(-\tau) \\
 & \quad - \alpha a_{12} u_1(0) u_2(-\tau_3), \\
 f_{12}^\theta & = \alpha a_{21} u_1(0) u_1(-\tau_2) \\
 & \quad - \alpha a_{22} u_2(0) u_2(-\tau), \\
 g(z, \bar{z}) & = \bar{q}^{*\text{T}}(0) f_0(z, \bar{z}) \\
 & = \frac{1}{2} \bar{D}(\bar{\alpha}^*, 1) \begin{pmatrix} f_{11}^\theta \\ f_{12}^\theta \end{pmatrix} \\
 & = \frac{1}{2} \bar{D}[\bar{\alpha}^* f_{11}^\theta + f_{12}^\theta].
 \end{aligned}$$

把(28)式代入上式并与(26)式比较系数可得

$$\begin{aligned}
 g_{20} & = \alpha(-a_{11} \bar{\alpha}^* e^{-i\omega\tau} - a_{12} \bar{\alpha}^* N \\
 & \quad + a_{21} N e^{i\omega(\tau_3-\tau_2)} - a_{22} N^2 e^{i\omega(2\tau_3-\tau_2)}), \\
 g_{11} & = \alpha(a_{21} N e^{2i\omega\tau} + a_{21} N e^{-2i\omega\tau} - a_{11} \bar{\alpha}^* e^{i\omega\tau} \\
 & \quad - a_{11} \bar{\alpha}^* e^{-i\omega\tau} - a_{12} \bar{\alpha}^* N - a_{12} \bar{\alpha}^* N \\
 & \quad - a_{22} N N e^{i\omega\tau} - a_{22} N N e^{-i\omega\tau}), \\
 g_{02} & = \alpha(a_{21} N e^{i\omega(\tau_2-\tau_3)} - a_{11} \bar{\alpha}^* e^{i\omega\tau} \\
 & \quad - a_{12} \bar{\alpha}^* N - a_{22} N^2 e^{2i\omega\tau}), \\
 g_{21} & = -a_{11} \bar{\alpha}^* W_{11}^{(2)}(-\tau) \\
 & \quad - a_{11} \bar{\alpha}^* W_{11}^{(1)}(-\tau) e^{-i\omega\tau} \\
 & \quad - \frac{a_{11} \bar{\alpha}^* W_{20}^{(1)}(-\tau) e^{i\omega\tau}}{2} - \frac{a_{11} \bar{\alpha}^* W_{20}^{(2)}(-\tau)}{2} \\
 & \quad - a_{12} \bar{\alpha}^* W_{11}^{(2)}(-\tau_3) - a_{12} \bar{\alpha}^* W_{11}^{(1)}(-\tau) N \\
 & \quad - \frac{a_{12} \bar{\alpha}^* W_{20}^{(2)}(-\tau_3)}{2} - \frac{a_{12} \bar{\alpha}^* W_{20}^{(1)}(-\tau) N}{2} \\
 & \quad - a_{22} N W_{11}^{(2)}(-\tau_2) e^{i\omega\tau_3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - a_{22} N W_{11}^{(1)}(-\tau) e^{i\omega(\tau_3-\tau)} \\
 & - \frac{a_{22} N W_{20}^{(2)}(-\tau_2) e^{-i\omega\tau_3}}{2} \\
 & - \frac{a_{22} N W_{20}^{(1)}(-\tau) e^{-i\omega(\tau_3-\tau)}}{2}.
 \end{aligned}$$

为了计算  $g_{21}$ , 仍然需要计算  $W_{11}(t, \theta)$  和  $W_{20}(t, \theta)$ . 事实上我们知道

$$\begin{aligned}
 W & = \dot{u}_t - zq - \bar{z}q \\
 & = A_0 u_t + R_0 u_t - 2\text{Re}\{\bar{q}^{*\text{T}}(0) f_0(z, \bar{z}) q\} \\
 & = \begin{cases} A_0 u_t - 2\text{Re}\{\bar{q}^{*\text{T}}(0) f_0(z, \bar{z}) q\}, \\ \theta \in [-\tau_3, 0], \\ A_0 u_t - 2\text{Re}\{\bar{q}^{*\text{T}}(0) f_0(z, \bar{z}) q\} + f_0(z, \bar{z}), \\ \theta = 0, \end{cases} \\
 & \stackrel{\text{def}}{=} A_0 W + H(z, \bar{z}, \theta),
 \end{aligned} \tag{29}$$

其中

$$\begin{aligned}
 H(z, \bar{z}, \theta) & = H_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + H_{11}(\theta) z\bar{z} \\
 & \quad + H_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + H_{21}(\theta) \frac{z\bar{z}}{6} + \dots.
 \end{aligned} \tag{30}$$

注意到在中心流形  $C_0$  上满足  $W = W_z z + W_{\bar{z}} \bar{z}$ , 由此得到

$$\begin{aligned}
 (A_0 - 2i\omega) W_{20}(\theta) & = -H_{20}(\theta), \\
 A_0 W_{11}(\theta) & = -H_{11}(\theta), \\
 (A_0 + 2i\omega) W_{02}(\theta) & = -H_{02}(\theta),
 \end{aligned} \tag{31}$$

根据(29)式, 由于  $\theta \in [-\tau_3, 0]$ ,

$$\begin{aligned}
 H(z, \bar{z}, \theta) & = -2\text{Re}\{\bar{q}^{*\text{T}}(0) f_0(z, \bar{z}) q(\theta)\} \\
 & = -2\text{Re}\{g(z, \bar{z}) q(\theta)\} \\
 & = -\left(\bar{g}_{20} \frac{z^2}{2} + \bar{g}_{11} z\bar{z} + \bar{g}_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots\right) \bar{q}(\theta),
 \end{aligned} \tag{32}$$

与(26)式比较系数, 得到如下的方程:

$$\begin{aligned}
 H_{20}(\theta) & = -g_{20} q(\theta) - \bar{g}_{02} \bar{q}(\theta), \\
 H_{11}(\theta) & = -g_{11} q(\theta) - \bar{g}_{11} \bar{q}(\theta).
 \end{aligned} \tag{33}$$

根据(31)和(33)式, 得到

$$\begin{aligned}
 W_{20}(\theta) & = A_0 W_{20} = 2i\omega W_{20}(\theta) - H_{20}(\theta) \\
 & = 2i\omega W_{20}(\theta) + g_{20} q(0) e^{i\omega\theta} + \bar{g}_{02} \bar{q}(0) e^{-i\omega\theta}.
 \end{aligned}$$

注意到  $q(\theta) = V e^{i\omega\theta}$ ,  $\theta \in [-\tau_3, 0]$ , 可求得

$$W_{20}(\theta) = \frac{i g_{20}}{\omega} q(0) e^{i\omega\theta} + \frac{i \bar{g}_{02}}{3\omega} \bar{q}(0) e^{-i\omega\theta} + E_1 e^{2i\omega\theta}. \tag{34}$$

同理可得

$$W_{11}(\theta) = \frac{ig_{11}}{\omega}q(0)e^{i\omega\theta} + \frac{ig_{11}^-}{\omega}q^-(0)e^{-i\omega\theta} + E_2, \quad (35)$$

其中  $E_1, E_2$  是两个二维向量, 同时它可以由  $H(z, \bar{z}, \theta)$  在  $\theta = 0$  时的取值来决定.

$$\begin{aligned} & \frac{ig_{20}}{\omega} [i\omega I - B_1 e^{-i\omega\tau_3} - B_2 e^{-i\omega\tau_2} - B e^{-i\omega\tau}] \\ & + \frac{ig_{20}^-}{3\omega} [i\omega I - B_1 e^{i\omega\tau_3} - B_2 e^{i\omega\tau_2} - B e^{i\omega\tau}] \\ & + [2i\omega I - B_1 e^{-2i\omega\tau_3} - B_2 e^{-2i\omega\tau_2} - B e^{-2i\omega\tau}] E_1 \\ = & -\alpha^2 \begin{pmatrix} a_{11} e^{-i\omega\tau} + a_{12} N \\ 2a_{12} \operatorname{Re}\{N\} + 2a_{11} \operatorname{Re}\{e^{i\omega\tau}\} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} & [i\omega I - B_1 e^{-i\omega\tau_3} - B_2 e^{-i\omega\tau_2} - B e^{-i\omega\tau}] q(0) \\ = & \Delta(\tau, i\omega) q(0) = 0, \\ & [i\omega I - B_1 e^{i\omega\tau_3} - B_2 e^{i\omega\tau_2} - B e^{i\omega\tau}] \overline{q(0)} \\ = & \Delta(\tau, -i\omega) \overline{q(0)} = 0, \\ & [2i\omega I - B_1 e^{-2i\omega\tau_3} - B_2 e^{-2i\omega\tau_2} - B e^{-2i\omega\tau}] \\ = & \Delta(\tau, 2i\omega), \end{aligned}$$

得到

$$\Delta(\tau, 2i\omega) E_1 = -\alpha^2 \begin{pmatrix} a_{11} e^{-i\omega\tau} + a_{12} N \\ 2a_{12} \operatorname{Re}\{N\} + 2a_{11} \operatorname{Re}\{e^{i\omega\tau}\} \end{pmatrix}.$$

进一步可以知道

$$E_1 = -\Delta^{-1}(\tau, 2i\omega) \alpha^2 \begin{pmatrix} a_{11} e^{-i\omega\tau} + a_{12} N \\ 2a_{12} \operatorname{Re}\{N\} + 2a_{11} \operatorname{Re}\{e^{i\omega\tau}\} \end{pmatrix}.$$

类似可得

$$E_2 = \Delta^{-1}(\tau, 0) \alpha^2 \begin{pmatrix} a_{21} e^{i\omega(\tau_3-\tau_2)} - a_{22} N^2 e^{i\omega(2\tau_3-\tau)} \\ 2a_{21} \operatorname{Re}\{N e^{i\omega\tau}\} - 2a_{22} \operatorname{Re}\{e^{i\omega\tau}\} \end{pmatrix}.$$

通过以上的分析, 可由系统(5)的系数和时滞来确定  $g_{ij}$ . 通过简单的计算可得

$$\begin{aligned} c_1(0) &= \frac{i}{2\omega} \left( g_{11} g_{20} - 2 |g_{11}|^2 - \frac{|g_{02}|^2}{3} \right) + \frac{g_{21}}{2}, \\ \kappa_2 &= -\frac{\operatorname{Re}\{c_1(0)\}}{\operatorname{Re}\{\lambda'(\tau_0)\}}, \\ \beta_2 &= 2 \operatorname{Re}\{c_1(0)\}, \\ T_2 &= -\frac{\operatorname{Im}\{c_1(0)\} + \kappa_2 \operatorname{Im}\{\lambda'(\tau_0)\}}{\omega}. \end{aligned} \quad (36)$$

根据 Hassard<sup>[6]</sup> 中的理论, 可得如下定理.

**定理 2**

在(36)式中,  $\kappa_2$  确定了 Hopf 分岔的方向: 如果  $\kappa_2 > 0$  ( $\kappa_2 < 0$ ), 那么 Hopf 分岔是超临界的(次临

界)的, 并且当  $\tau > \tau_0$  ( $\tau < \tau_0$ ) 时分岔周期解存在;  $\beta_2$  确定分岔周期解的稳定性: 如果  $\beta_2 < 0$  ( $\beta_2 > 0$ ), 那么分岔周期解是轨道稳定(不稳定)的;  $T_2$  确定分岔周期解的周期: 如果  $T_2 > 0$  ( $T_2 < 0$ ), 那么周期增加(减少).

**4. 数值仿真**

下面将通过数值模拟来说明混合控制策略的有效性. 考虑参数为  $r_1 = r_2 = 1, a_{11} = 1, a_{12} = 1, a_{21} = 2, a_{22} = 1, \alpha = 1, \beta = 0$  时, 此时系统(5)处于无控状态, 可以简写成系统

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t) [r_1 - a_{11} x(t - \tau_1) - a_{12} y(t - \tau_3)], \\ \dot{y}(t) &= y(t) [-r_2 + a_{21} x(t - \tau_2) - a_{22} y(t - \tau_1)]. \end{aligned} \quad (37)$$

当  $r_1 a_{21} - r_2 a_{11} > 0$  时, 系统(37)有唯一的正平衡点  $E_* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), T^2 - D = -0.4167 < 0$ , 由定理

1 可知  $\omega_0 = \sqrt{D} = 0.8165$ , 此时  $\tau_0 = 0.8072$ , 根据定理 2 和公式(36)可以得到  $\kappa_2 > 0$  和  $\beta_2 < 0$ , 所以, 当  $\tau \in [0, 0.8072)$  时,  $E_* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$  是渐近稳定的,

取  $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0.75 < \tau_0$ , 此时正平衡点  $E_*$  局部渐近稳定, 见图 1. 当  $\tau \geq 0.8072$  时, 正平衡点  $E_* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$  是不稳定的, 取  $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0.9 > \tau_0$ , 此时正平衡点  $E_*$  失去稳定性, 发生 Hopf 分岔, 产生稳定的周期解, 见图 2.

根据定理 1, 如果在系统(5)中选取  $\alpha = 0.1, \beta = 0.1$  时, 此时系统(5)处于受控状态, 可以简写成如下系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 0.1x(t) [r_1 - a_{11} x(t - \tau_1) - a_{12} y(t - \tau_3)] \\ & \quad + 0.1x(t - \tau_1), \\ \dot{y}(t) &= 0.1y(t) [-r_2 + a_{21} x(t - \tau_2) \\ & \quad - a_{22} y(t - \tau_1)] + 0.1y(t - \tau_1). \end{aligned} \quad (38)$$

根据文中给出的混合控制策略可以很容易使系统的 Hopf 分岔消失, 系统出现局部渐近稳定的正平衡点, 见图 3.

本文提出的混合控制策略较一般的单反馈控制可以更加有效的考虑到系数扰动的影响, 通过数值模拟可以发现该控制策略可以很好的改变分岔点的位置, 因此为分岔控制提供了一种很实用方法.

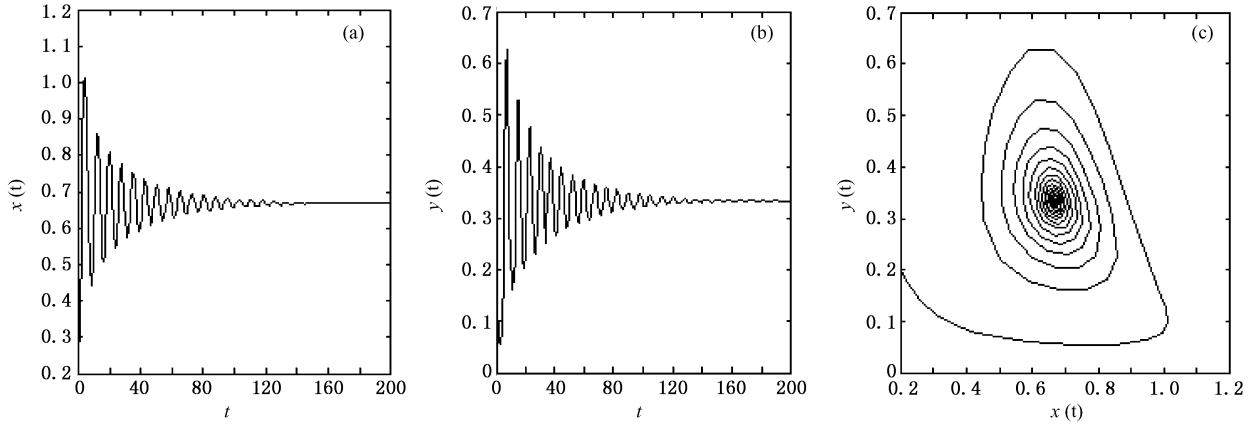


图1  $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0.75 < \tau_0$ , 无控系统的状态变量和相图, 正平衡点  $E_*$  局部渐近稳定 (a)  $t$ - $x$  平面; (b)  $t$ - $y$  平面; (c)  $x$ - $y$  平面

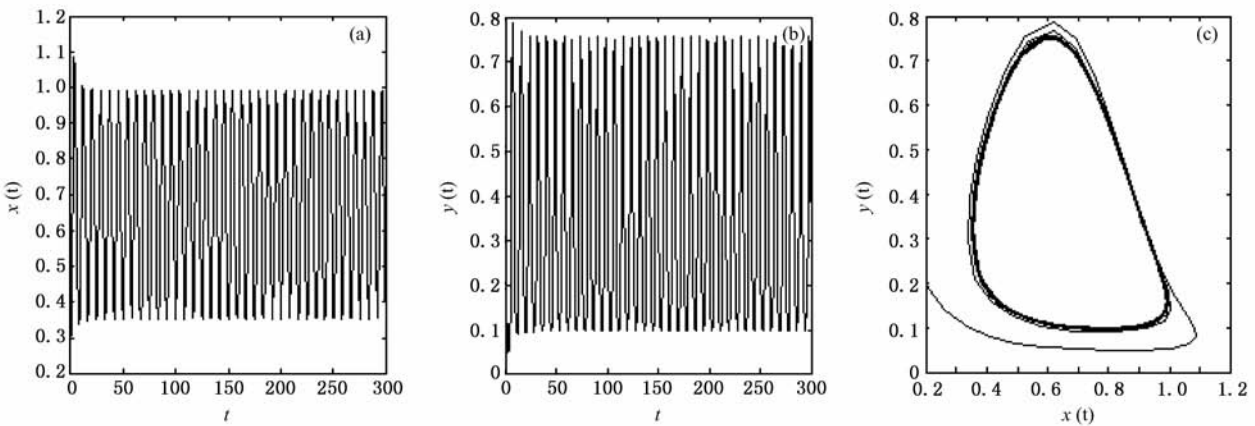


图2  $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0.9 > \tau_0$ , 无控系统的状态变量和相图, 正平衡点  $E_*$  失去稳定性, 发生 Hopf 分岔, 产生稳定的周期解 (a)  $t$ - $x$  平面; (b)  $t$ - $y$  平面; (c)  $x$ - $y$  平面

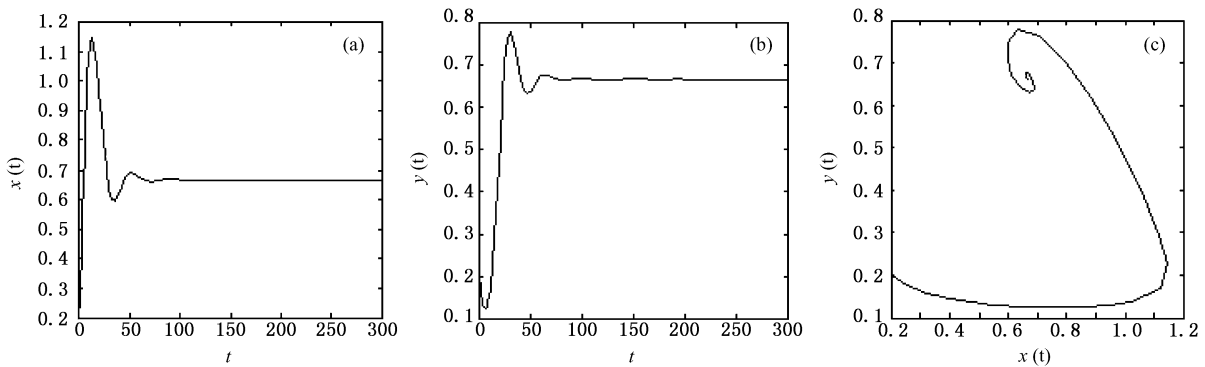


图3  $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0.9 > \tau_0$ , 受控系统的状态变量和相图, Hopf 分岔消失, 出现局部渐近稳定的正平衡点 (a)  $t$ - $x$  平面; (b)  $t$ - $y$  平面; (c)  $x$ - $y$  平面

### 5. 结 论

本文理论表明, 混合控制与种群的持续生存关系密切, 系统(37)不稳定的平衡点, 经过调节参数

和状态反馈混合控制后, 在受控系统(38)中变成了渐近稳定的平衡点, 即捕食者和被捕食者的数量最终稳定于一个常态, 能够共存, 永不绝灭. 数值模拟验证了理论的正确性, 具有一定的生态学意义, 为自然界中种群的持续生存提供了理论依据. 不仅可

以考虑状态反馈控制,而且可以考虑参数调节,便

- [1] May R M 1973 *Ecology* **54** 315  
 [2] Sarker R, Petrovskii S, Biswas M, Gupta A, Chattopadhyay J 2006 *Ecol Model* **193** 589  
 [3] Luo X S, Chen G R, Wang B H 2003 *Chaos Solit. Fract.* **18** 775  
 [4] Liu Z R, Chung K W 2005 *Int. J. Bifurcation Chaos* **15** 3895  
 [5] Sun B D 2005 *Principle of Automatic Control* (Beijing: China Machine Press) (in Chinese) [孙炳达 2005 自动控制原理 (北京: 机械工业出版社)]  
 [6] Faria T 2001 *Math. Anal. Appl.* **254** 433  
 [7] Hassard B D, Azarinoff N D K, Wan Y H 1981 *Theory and Applications of Hopf Bifurcation* (Cambridge University Press, Cambridge)

于实际控制中根据具体情况进行调节.

- [8] Freedman H I, Rao V S H 1986 *SIAM J. Appl. Math.* **46** 552  
 [9] Hale J K 1977 *Theory of Functional Differential Equations* (New York: Springer)  
 [10] He X 1996 *Math. Anal. Appl.* **198** 355  
 [11] Mao Z S, Zhao H Y 2007 *Phys. Lett. A* **364** 38  
 [12] Zhao H Y, Chen L, Mao Z S 2009 *Nonlinear Analysis: Real World Applications* **9** 663  
 [13] Song Y L, Wei J J 2005 *Math. Anal. Appl.* **301** 1  
 [14] Yan X P, Li W T 2006 *Appl. Math. Comput.* **177** 427  
 [15] Mao Z S, Zhao H Y, Wang X F 2007 *Physica D* **234** 11  
 [16] Yan X P, Zhang C H 2008 *Nonlinear Anal.* **9** 114  
 [17] Ruan S G, Wei J J 2003 *Dynamics Continuous, Discrete Impulsive Systems Ser. A: Math. Anal.* **10** 863

## Hybrid control of bifurcation in a predator-prey system with three delays \*

Zhang Li-Ping<sup>1)2)†</sup> Wang Hui-Nan<sup>2)</sup> Xu Min<sup>3)</sup>

1) (College of Science, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

2) (College of Automation Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

3) (College of Information Science and Technology, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

(Received 6 August 2008; revised manuscript received 24 June 2010)

### Abstract

The problem of Hopf bifurcation control for a predator – prey system with three delays is considered. A new hybrid strategy is proposed to control the Hopf bifurcation, in which the state feedback and parameter perturbation are used to delay the onset of an inherent bifurcation or make the bifurcation disappear. The stability and the existence of bifurcation are researched. In particular, the formulae determining the direction of the bifurcations and the stability of the bifurcating periodic solutions are derived by using the normal form theory and center manifold theorem. Finally, numerical simulation results confirm that the new hybrid controller is efficient in controlling Hopf bifurcation.

**Keywords:** delay, predator-prey system, Hopf bifurcation, hybrid control

**PACS:** 05.45. – a, 02.30. KS

\* Project supported by NUA A Research Funding (Grant No. NS2010112).

† E-mail: lpzhang0818@yahoo.com.cn