

# 耦合发电机系统的分岔和双参数特性<sup>\*</sup>

吴淑花<sup>1)2)</sup> 孙毅<sup>1)†</sup> 郝建红<sup>1)</sup> 许海波<sup>3)</sup>

1)(华北电力大学电气与电子工程学院, 北京 102206)

2)(石家庄学院物理与电气信息工程系, 石家庄 050035)

3)(北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088)

(2010年1月15日收到; 2010年4月26日收到修改稿)

在综合分析系统基本动力学特性的基础上, 通过数值计算 Lyapunov 指数谱、分岔图等, 讨论了耦合发电机系统的混沌分岔行为和周期窗口的性态变化; 计算和分析了系统在二维参数空间的双参数特性. 结果显示系统在倍周期分岔中会出现缺边现象, 在双参数空间系统出现复杂的分岔结构, 两个控制参数对系统动力学行为的影响特性有所差别.

**关键词:** 耦合发电机系统, 分岔, 周期窗口, 双参数特性

**PACS:** 05.45.-a, 41.20.Gz, 05.45.Pq

## 1. 引言

由于非线性动力学系统的运动状态失稳而出现分岔以至于混沌状态是非常普遍的现象<sup>[1-3]</sup>. 混沌行为表现为对初值的敏感性、遍历性、貌似随机性, 并具有非常复杂的分形和自相似结构. 在对混沌行为逐步深入地研究过程中, 揭示出了混沌行为隐藏在表面混乱后面的有序现象, 并且发现混沌行为对模拟自然界的许多现象有很多好处.

混沌已是许多物理学、化学、生命科学等系统工作的普遍特性, 因为较之稳定定态和极限环形振荡, 具有随机性的混沌在较广泛条件下(如动力学方程中的参数可在较大范围取值)出现的运动状态<sup>[4]</sup>, 普遍具有较高的实用价值.

不同领域中的许多过程都是非线性过程, 表现为各种各样的非线性振荡和混沌运动. 如连接在一起的两个发电机, 其中任意一个发电机电流都会对另一个产生磁场, 这个耦合发电机系统的电流和磁场相互作用关系可以唯象的表述成一个三维的耦合非线性系统, 此系统的动力学行为和控制行为的研究对实际工程中的机电控制有重要的理论研究意义和实际应用价值. 已有作者采用不同的方法分别对此系统的混沌控制和混沌同步进行了研

究<sup>[5-11]</sup>. 但对此系统的混沌分岔、周期窗口的性态及系统的双参数特性进行深入细致分析的报道还不多. 耦合发电机系统的非线性图像、各种动力学行为, 尤其是系统分岔过程和控制参数的影响分析将有助于认识和有效地进行混沌控制<sup>[12,13]</sup>. 本文就该系统模型, 分别从 Lyapunov 指数谱、最大 Lyapunov 指数分区图、相轨迹图、Poincaré 截面图等几个方面深入系统地分析了其在参数空间的分岔结构、周期窗口的动力学特性以及二维参数空间的物理特性, 发现形成的混沌吸引子不但具有复杂的结构, 同时具有其特有的性态. 概括分析了系统的双参数对混沌动力学行为的影响规律.

## 2. 耦合发电机系统的混沌模型及基本动力学特性

### 2.1. 耦合发电机系统的混沌模型

耦合发电机系统由两个相连的发电机组组成, 其中任何一台发电机都处于另一台发电机产生的电流所形成的磁场之中. 该系统可以用下面的一个四维常微分方程组来表示:

$$\dot{x}_1 = \omega_1 x_2 - \mu_1 x_1, \quad \dot{x}_2 = \omega_2 x_1 - \mu_2 x_2,$$

\* 华北电力大学博士基金(批准号:kH0433)和国际科技合作项目(批准号:2007DFA71250)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: sy@ncepu.edu.cn

$$\dot{\omega}_1 = q_1 - \varepsilon_1 \omega_1 - x_1 x_2, \quad \dot{\omega}_2 = q_2 - \varepsilon_2 \omega_2 - x_1 x_2.$$

其中  $\omega_1, \omega_2$  分别表示两个发电机转子的角速度,  $x_1, x_2$  分别表示两台发电机的电流变量,  $q_1, q_2$  为转子受到的扭力,  $\mu_1, \mu_2$  和  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  是表征发电机耗散效果的正参数. 令  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ . 则耦合发电机系统可用一个具有混沌特征的三维自治方程组来描述<sup>[11]</sup>:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\mu x_1 + x_2(x_3 + \alpha), \\ \dot{x}_2 &= -\mu x_2 + x_1(x_3 - \alpha),\end{aligned}$$

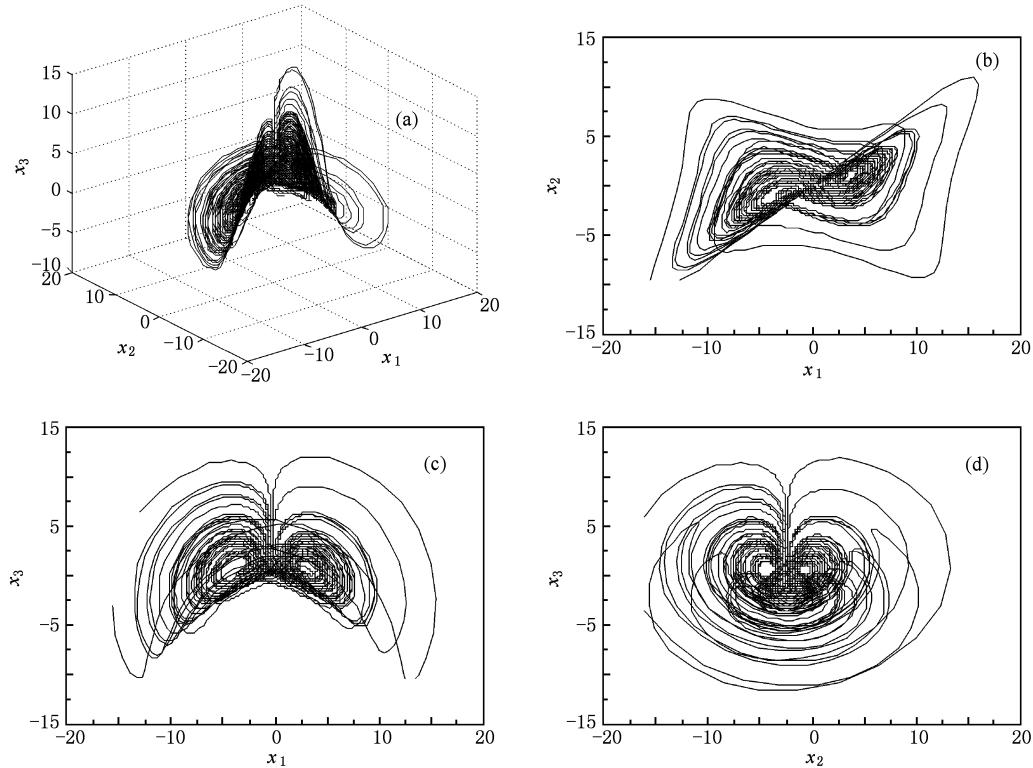


图1 当  $\mu = 2, \alpha = 3$  时系统(1)的典型混沌吸引子 (a)  $x_1 x_2 x_3$  三维空间相图;(b)  $x_1 x_2$  平面相图;(c)  $x_1 x_3$  平面相图;(d)  $x_2 x_3$  平面相图

## 2.2. 耦合发电机系统的基本动力学特性

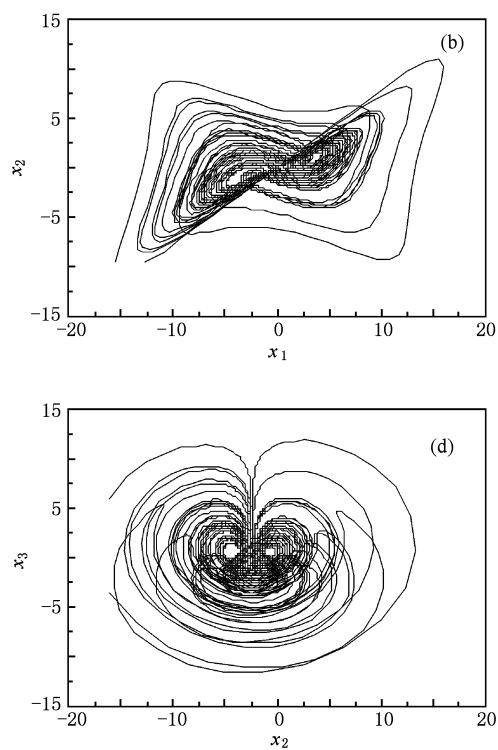
### 2.2.1. 对称性

首先, 系统(1)具有自然的变量对称性, 做变换  $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (-x_1, -x_2, x_3)$ , 系统(1)保持不变, 即系统关于  $x_3$  轴对称, 且这种对称性对所有参数均成立.

其次, 系统(1)还具有参数  $\alpha$  的对称性, 做变换  $(x_1, x_2, x_3, \alpha) \rightarrow (x_1, x_2, x_3, -\alpha)$ , 系统(1)保持不变. 由图2(a)和(c)可观察到系统的分岔图对参数  $\alpha$  对称. 另外, 从下面  $E_1-E_4$  四个平衡点的多样化对称也可以说明这一点. 故该系统具有多种对

$$\dot{x}_3 = x_3 - x_1 x_2, \quad (1)$$

其中  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ ,  $q_1 = q_2 = x_3$  并且  $\omega_1 = x_3 + \alpha$ ,  $\omega_2 = x_3 - \alpha$ ,  $\alpha$  为运动常数. 在系统(1)中  $\mu$  和  $\alpha$  分别作为系统的控制参数( $\mu$  为正数参数,  $\alpha$  为非零参数). 将系统参数  $\mu$  和  $\alpha$  放在较宽区域内研究, 发现系统由多个混沌带组成并具有非常复杂的动力学行为, 包括混沌态、周期态、准周期态以及倍周期分岔、二次 Hopf 分岔等. 当  $\mu = 2, \alpha = 3$  时系统(1)的典型混沌吸引子如图1所示.



称性.

### 2.2.2. 耗散性

散度

$$\nabla V = \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_3} = -2\mu + 1.$$

在  $\mu > 1/2$  的条件下, 系统(1)是耗散的, 并以指数形式  $\frac{dV}{dt} = e^{-(2\mu-1)t}$  收敛. 也就是一个初始体积为  $V(0)$  的体积元在时刻  $t$  时收缩为体积元  $V(0)e^{-(2\mu-1)t}$ . 这意味着, 当  $t \rightarrow \infty$  时, 包含系统轨线的每个小体积元以指数速率  $-(2\mu-1)$  收缩到零, 所有系统的轨线最终会被限制在一个体积为零的极限子集上, 其渐近运动将被固定在一个吸引子

上. 这说明了吸引子的存在性.

### 2.2.3. 平衡点

令系统(1)的右端为零, 得到系统(1)的五个平衡点

$$E_0 = (0, 0, 0), E_1 = (-\beta_2, \beta_1, -\gamma),$$

$$E_2 = (\beta_2, -\beta_1, -\gamma),$$

$$E_3 = (\beta_2, \beta_1, \gamma), E_4 = (-\beta_2, -\beta_1, \gamma),$$

其中  $\beta_1 = \sqrt{\gamma(\gamma + \alpha)/\mu}, \beta_2 = \sqrt{\gamma(\gamma - \alpha)/\mu}, \gamma = \sqrt{\alpha^2 + \mu^2}$ .

将系统(1)在各平衡点处的线性化系统的特征多项式统一表示为

$$f(\lambda) = \lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C. \quad (2)$$

用  $E(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$  表示平衡点, 在该平衡点处把系统(1)线性化, 得 Jacobian 矩阵

$$J(E) = \begin{bmatrix} -\mu & \bar{x}_3 + \alpha & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 - \alpha & -\mu & \bar{x}_1 \\ -\bar{x}_2 & -\bar{x}_1 & 1 \end{bmatrix}$$

和特征多项式

$$\begin{aligned} f(\lambda) = & \lambda^3 + (2\mu - 1)\lambda^2 + (\alpha^2 + \mu^2 - 2\mu + \bar{x}_1^2 \\ & + \bar{x}_2^2 - \bar{x}_3^2)\lambda + (\mu\bar{x}_1^2 + \mu\bar{x}_2^2 \\ & + \bar{x}_3^2 + 2\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 - \alpha^2 - \mu^2). \end{aligned} \quad (3)$$

由(3)式计算得到  $E_0(0, 0, 0)$  处的特征多项式

$$\begin{aligned} f(\lambda) = & \lambda^3 + (2\mu - 1)\lambda^2 + (\alpha^2 + \mu^2 - 2\mu)\lambda \\ & + (-\alpha^2 - \mu^2). \end{aligned}$$

由(2)可知, 此时

$$A = 2\mu - 1, B = \alpha^2 + \mu^2 - 2\mu,$$

$$C = -\alpha^2 - \mu^2, AB - C = 2\mu(\alpha^2 + (\mu - 1)^2).$$

根据 Routh - Hurwitz 条件, 当仅当  $A > 0, B > 0, C > 0, AB - C > 0$  时, 所有的特征值才都具有负实部. 本系统在  $\mu > 1/2$  的条件下,  $C < 0$ . 也就是说, 不是所有的特征值都具有负实部, 因此平衡点  $E_0(0, 0, 0)$  是三维相空间中的一个不稳定鞍点.

把系统(1)分别在平衡点  $E_1, E_2, E_3, E_4$  处线性化, 可以得到如下相同的特征多项式:

$$\begin{aligned} f(\lambda) = & \lambda^3 + (2\mu - 1)\lambda^2 + 2\alpha^2\lambda/\mu \\ & + 4(\alpha^2 + \mu^2). \end{aligned}$$

此时

$$A = 2\mu - 1, B = 2\alpha^2/\mu, C = 4(\alpha^2 + \mu^2),$$

$$AB - C = -2\alpha^2/\mu - 4\mu^2.$$

在  $\mu > 1/2$  条件下,  $AB - C = -2\alpha^2/\mu - 4\mu^2 < 0$ . 根据 Routh-Hurwitz 条件, 这四个平衡点都不稳定.

下面我们通过计算两个参数变化时分岔图的

结构、Lyapunov 指数谱及窗口内的动力学行为来分析系统参数对其动力行为的影响.

### 3. 耦合发电机系统单参数变化特性

#### 3.1. 参数 $\alpha$ 的变化特性

保持  $\mu = 2.0$  不变, 计算得到  $\alpha$  在  $[0.5, 10.5]$  范围变化时的系统分岔情况如图 2(a) 所示. 图 2

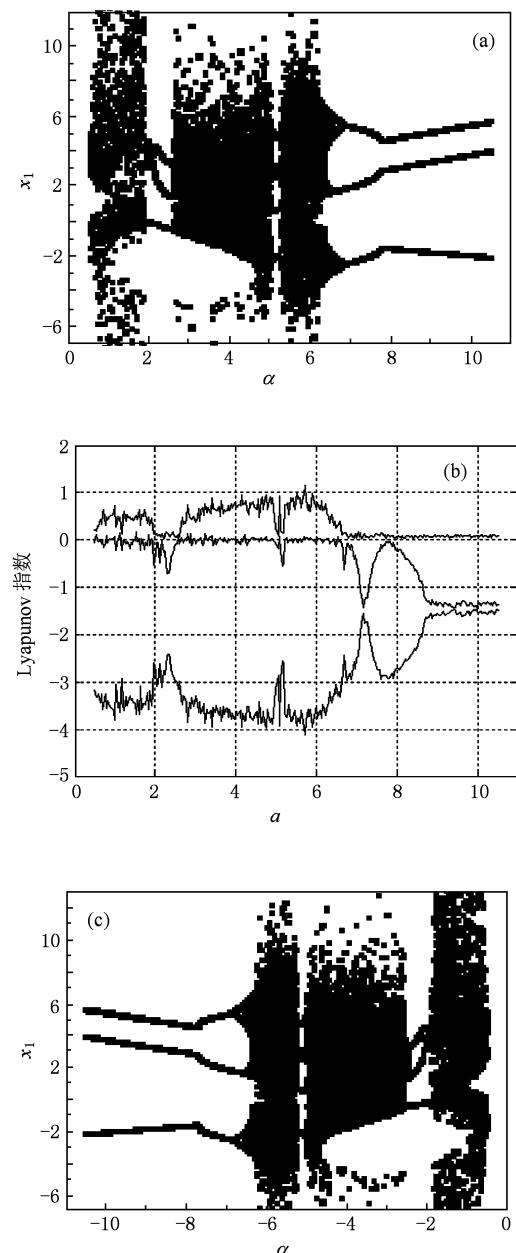


图 2 系统(1)在参数  $\mu = 2.0$  时随  $\alpha$  变化的分岔图和 LE 谱  
(a)  $\alpha \in [0.5, 10.5]$  的  $x_1$  分岔图; (b) 与 (a) 对应的 LE 谱; (c)  
 $\alpha \in [-10.5, -0.5]$  的  $x_1$  分岔图

(b)是利用奇异值法求出的系统在  $\alpha \in [0.5, 10.5]$  范围内的 Lyapunov 指数谱. 从图 2(a)中可以看到系统的混沌状态类似于倒分岔, 在混沌带中镶嵌有多个大小不同的周期窗口, 其中在参数  $\alpha = 2.3$  和  $\alpha = 5.2$  附近呈现出的两个较大周期窗口清晰可见, 若将分岔图部分放大, 显示其精细结构后可观察到其他较小窗口. 系统由周期 3 开始, 在  $\alpha = 7.75$  位置发生叉式分岔, 出现“缺边现象”<sup>[14]</sup>, 而后经倍周期分岔进入混沌. 由 Lyapunov 指数谱和分岔图的演化来看, 随着参数  $\alpha$  的变化, 系统(1)出现混沌、周期和准周期三种状态. 对照图 2(a)和(b), 系统(1)的

Lyapunov 指数谱与其分岔图描述的动力学行为是完全符合的.

下面从周期窗口进行动力学分析. 观察局部放大的分岔图和对应部分的 Lyapunov 指数谱图 3(a)和(b), 该系统在  $\alpha = 1.855$  附近通过切分岔退出混沌<sup>[15]</sup>, 在  $[1.855, 2.56]$  区间出现了最大的混沌周期窗口. 在窗口内, 系统随着  $\alpha$  的增加而不断演变: 系统从周期 3 开始倍周期分岔, 随参数  $\alpha$  的增加发生二次 Hopf 分岔进入准周期轨道, 在  $\alpha = 1.95$  系统又回到周期状态; 在  $\alpha = 2.05$  发生叉式分岔, 系统收敛为周期 3, 在  $\alpha = 2.15$  出现了三个拐点; 在  $\alpha = 2.38$

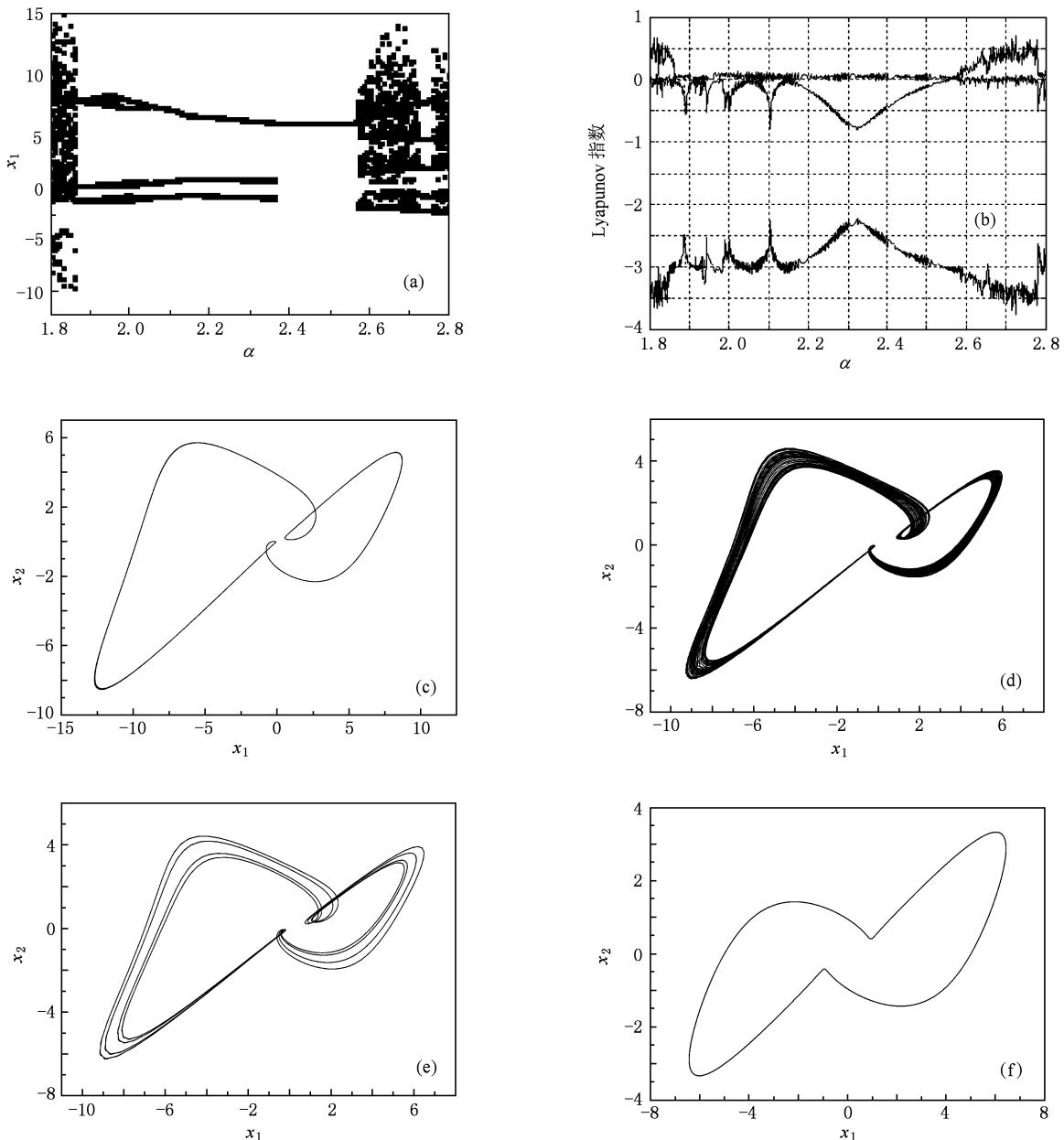


图 3 系统(1)在  $\mu = 2.0$ ,  $\alpha \in [1.8, 2.8]$  的周期窗口 (a) 窗口的精细结构图; (b) LE 谱; (c)  $\alpha = 1.855$  的相图; (d)  $\alpha = 1.93$  的相图; (e)  $\alpha = 1.97$  的相图; (f)  $\alpha = 2.5$  的相图;

附近周期 3 轨道突然减为单周期, 最后在  $\alpha = 2.56$  时系统经切分岔再次进入混沌状态. 从窗口的

Lyapunov 指数谱和分岔图可以看到, 系统(1)在这个窗口中处于周期或准周期状态. 图3(c)一(f)给

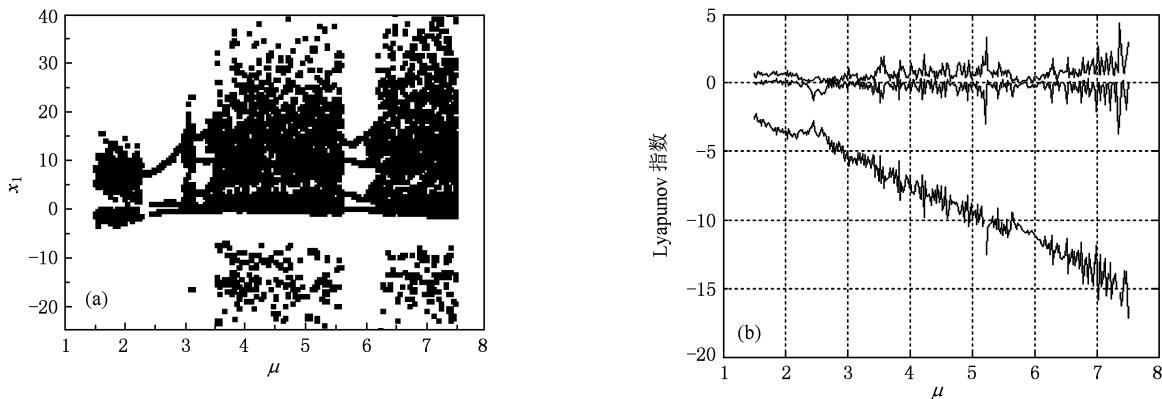


图4 系统(1)在参数  $\alpha = 3$ ,  $\mu \in [1.5, 7.5]$  范围的分岔图和 LE 谱 (a)  $x_1$  的分岔图;(b) LE 谱

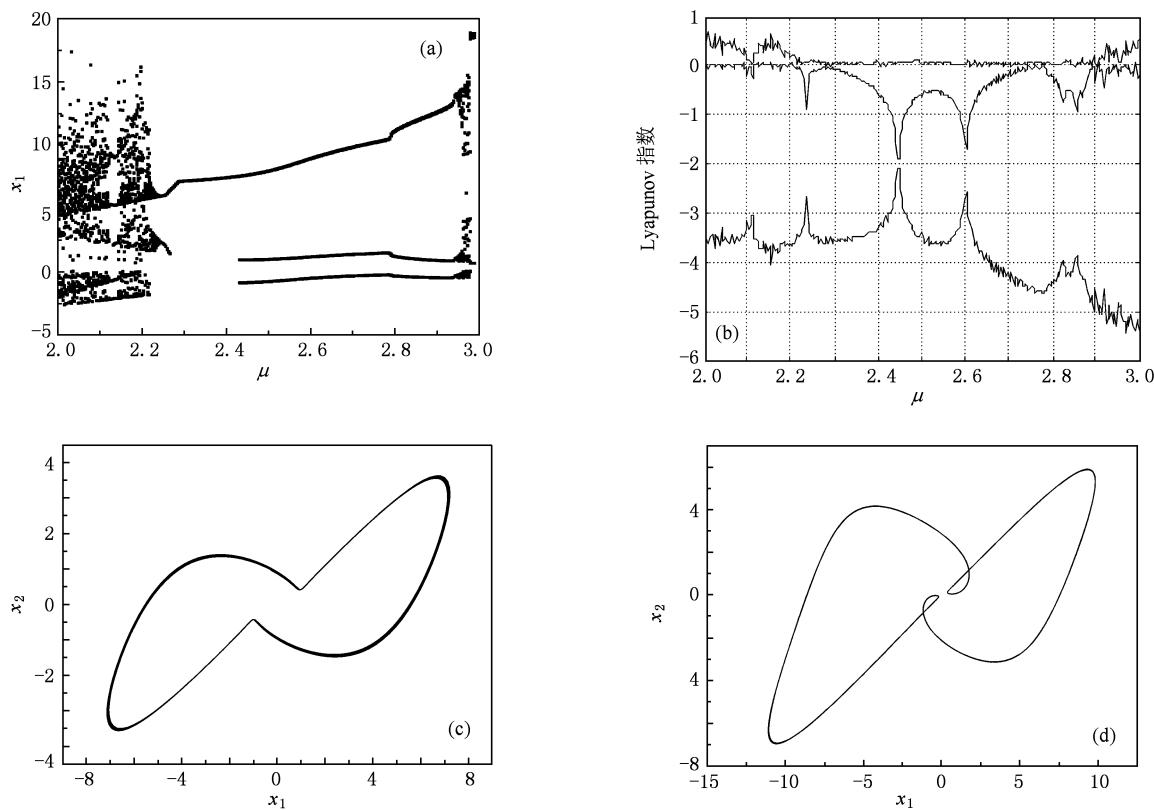


图5 系统(1)在  $\alpha = 3$ ,  $\mu \in [2.0, 3.0]$  的周期窗口 (a) 窗口的精细结构图;(b) LE 谱;(c)  $\mu = 2.3$  的相图;(d)  $\mu = 2.8$  的相图

出了系统在窗口处不同参数的极限环(或环面), 反映了窗口内的周期变化.

同理可以计算得到  $\alpha$  在  $[-10.5, -0.5]$  之间变化时系统的分岔图(见图2(c)), 与图2(a) 比较发现, 系统随着参数  $\alpha$  从  $\pm 0.5$  向两边变化, 系统在分岔序列和吸引子上表现出相同的行为走向, 嵌入

在混沌带上的窗口极具对称性, 其反映了系统动力学的对称性行为(见 2.2.1 部分的分析).

### 3.2. 参数 $\mu$ 的变化特性

保持参数  $\alpha = 3$  不变, 计算得到系统在  $\mu \in [1.5, 7.5]$  范围内变化时的分岔图和 Lyapunov 指数

谱,如图4(a)和(b)所示.随着 $\mu$ 的变化,系统(1)的最大Lyapunov指数时而大于零,时而等于零,说明系统随 $\mu$ 变化的过程中混沌与周期窗口交替出现.分岔图4(a)清晰地显示出三个最大的周期窗口,三个窗口内系统的状态变化不尽相同.在 $\mu=$

3.2附近的窗口内系统一直保持准周期态;在 $\mu=6$ 附近的窗口内系统经历了倍周期分岔通向混沌的道路;而在 $\mu=2.5$ 附近的窗口内系统经历了由周期到周期的叉式分岔过程.下面将分别细致分析系统两个较大窗口内复杂的动力学行为.

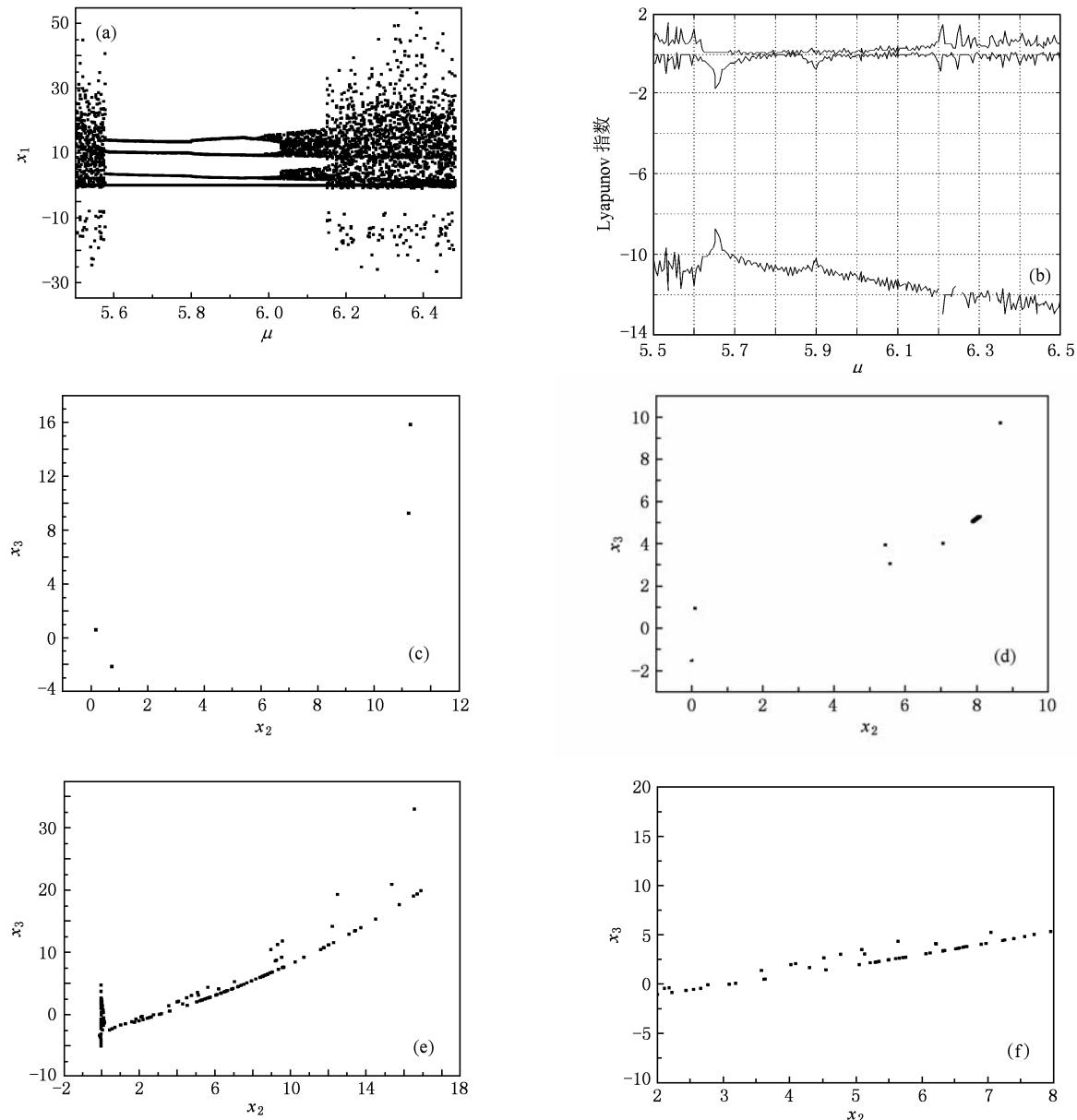


图6 系统(1)在 $\alpha=3, \mu \in [5.5, 6.5]$ 的周期窗口 (a)窗口的精细结构图;(b)LE谱;(c) $\mu=5.7$ 的Poincaré映射;(d) $\mu=6.0$ 的Poincaré映射;(e) $\mu=6.2$ 的Poincaré映射;(f)是(e)的局部放大

观察 $\mu=2.5$ 附近的窗口内的分岔图和对应的Lyapunov指数谱(见图5(a)和(b)),系统在 $\mu=2.22$ 经切分岔进入周期窗口,开始步入周期2轨道,在 $\mu=2.26$ 突然减为周期1轨道,在 $\mu=2.43$ 系统轨道数又增加为3.系统分别在 $\mu=2.28$ 和 $\mu=2.78$ 发生叉式分岔,呈现“缺边现象”.系统在 $\mu=$

2.92经切分岔重新回到混沌状态,周期窗口结束.图5(c)和(d)分别给出了 $\mu=2.3$ 和 $\mu=2.8$ 时系统的相轨道图,其周期分别为1和3,与分岔图相符合.

在 $\mu=6$ 附近的窗口,系统在 $\mu=5.6$ 附近经切分岔退出混沌,系统进入周期4轨道;在 $\mu=5.8$ 出

现拐点,在  $\mu = 5.96$  开始发生倍周期分岔,经过  $\mu = 6.04$  的临界点后,形成了多个次级混沌带,最后各次级混沌带在  $\mu = 6.18$  通过危机合并为一个混沌带,周期窗口结束. 图 6(a)和(b)为窗口的分岔图和对应的 Lyapunov 指数谱. 图 6(c)–6(f)展示了该窗口内取不同参数值时在  $x_1 = 0$  截面的庞加莱映射. 由图 6(c)和(d)可见,Poincaré 截面上只有少数离散的点,表明系统的运动是周期的;而图 6(e)的 Poincaré 截面上有一些成片的密集点,并具有一定的分形结构(图 6(f)是(e)的局部放大,可以发现其具有自相似结构),说明此时系统的运动是混沌的.

从系统定义看,  $\alpha$  表征了耦合发电机两个转子的角速度的差异,  $\mu$  是表征发电机耗散性能的参数.无论哪个参数发生变化,都会对系统的动力学行为产生显著的影响.

从分岔图 2(a)和(c)可以看出,在  $|\alpha|$  较小时,系统更容易工作在混沌态,而  $|\alpha|$  较大时,在一个较大的参数空间,系统处于周期态. 从分岔图上来看,系统的状态变化对参数  $\mu$  的反应更敏感,随着  $\mu$  的变化,系统呈现周期窗口与混沌态相间分布的态势,混沌态与周期态转换频繁.

在实际工程中,可以根据工作的需要,控制参数使系统工作在需要的状态.

#### 4. 耦合发电机系统双参数变化特性

在实际应用上,耦合发电机系统往往工作在参数随时变化的复杂环境中. 为了更清楚地讨论系统双参数对系统特性的影响,我们利用文献[16]的方法计算了系统最大李雅普诺夫指数  $\lambda_1$  在双参数空间的分布情况,如图 7 所示.

当  $\lambda_1 = 0$  时,系统处于周期状态或准周期振荡(极限环或二维环面),对应分岔图的周期窗口和倍周期分岔位置;由于该系统没有出现超混沌现象,当  $\lambda_1 > 0$  时,系统处于混沌状态,对应分岔图的混沌区域;当  $\lambda_1 < 0$  时,吸引子只可能是稳定不动点. 如图 7 所示,颜色越深  $\lambda_1$  越大;颜色越浅  $\lambda_1$  越小. 图中清楚的显示了参数变化时耦合发电机系统状态特性的变化情况:条形的周期窗口与混沌带相间分布.  $\lambda_1 = 0$  的点分布在白色条形区域,对应系统的周期(或准周期)状态;  $\lambda_1 > 0$  的点分布在与窗口并行

的深色带形区域,对应于混沌态. 混沌带内携带丰富信息,带上颜色的深浅表示系统的混乱程度不同,带内嵌有许多条形或零星的窗口.  $\mu$  较小时,随  $\alpha$  的增大混沌区域变宽,从边缘到带中颜色逐渐变深,系统状态的变化随着参数是循序渐进的,表明系统状态对参数的反应迟缓;  $\alpha$  较小时,随着  $\mu$  的增大,图中下方混沌带也逐渐增大,而且镶嵌着许多杂散的周期窗口,与上方的混沌带相比,  $\lambda_1$  较小,系统状态对参数反应比较敏感. 在图 7 上沿  $\mu = 2$  方向观察系统的状态变化,与分岔图 2(a)是符合的.

通过对比分析还发现,由倍周期分岔通向混沌,多发生在系统对参数反映不敏感的混沌带边缘上;间歇混沌是由周期运动分岔和失稳而形成的<sup>[17]</sup>,从周期(或准周期)通向混沌,多发生在系统对参数反应敏感的混沌带上.

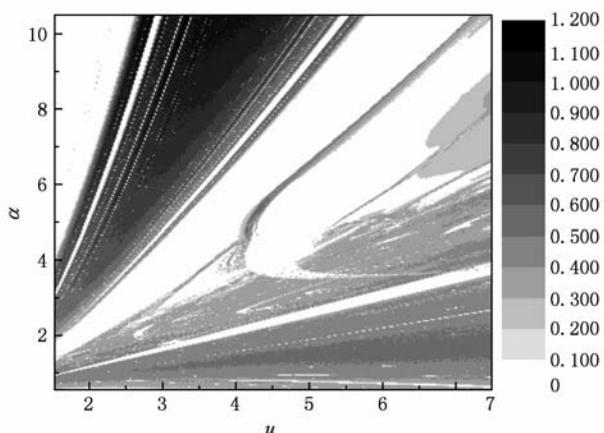


图 7 双参数控制的系统(1)最大 Lyapunov 指数谱  $\lambda_1$  分区图

图 8(a)–(d)是系统参数分别取  $\mu = 4.2$ ,  $\alpha \in [0.5, 10.5]$  和  $\alpha = 7.0$ ,  $\mu \in [1.5, 7.5]$  时的分岔图,其动力学行为走向、分岔序列、窗口位置与图 7 完全符合;在左上方混沌带边缘发生倍周期分岔,在右下方混沌带边缘发生间歇混沌. 图 8(e)和(f)分别是  $\mu = 3.5$ ,  $\alpha = 9.0$  和  $\mu = 5.0$ ,  $\alpha = 6.0$  系统的相图,前者处于混沌状态,后者处于周期状态. 可见,图 7 和图 8 是完全符合的.

以上研究发现,在耦合发电机系统(1)里,两个参数  $\alpha$  和  $\mu$  都对系统行为有显著的影响,使得系统的运动变得十分复杂,形成混沌与周期窗口交替的现象,不同窗口的性态变化各异,从而使系统(1)具有复杂的动力学特性.

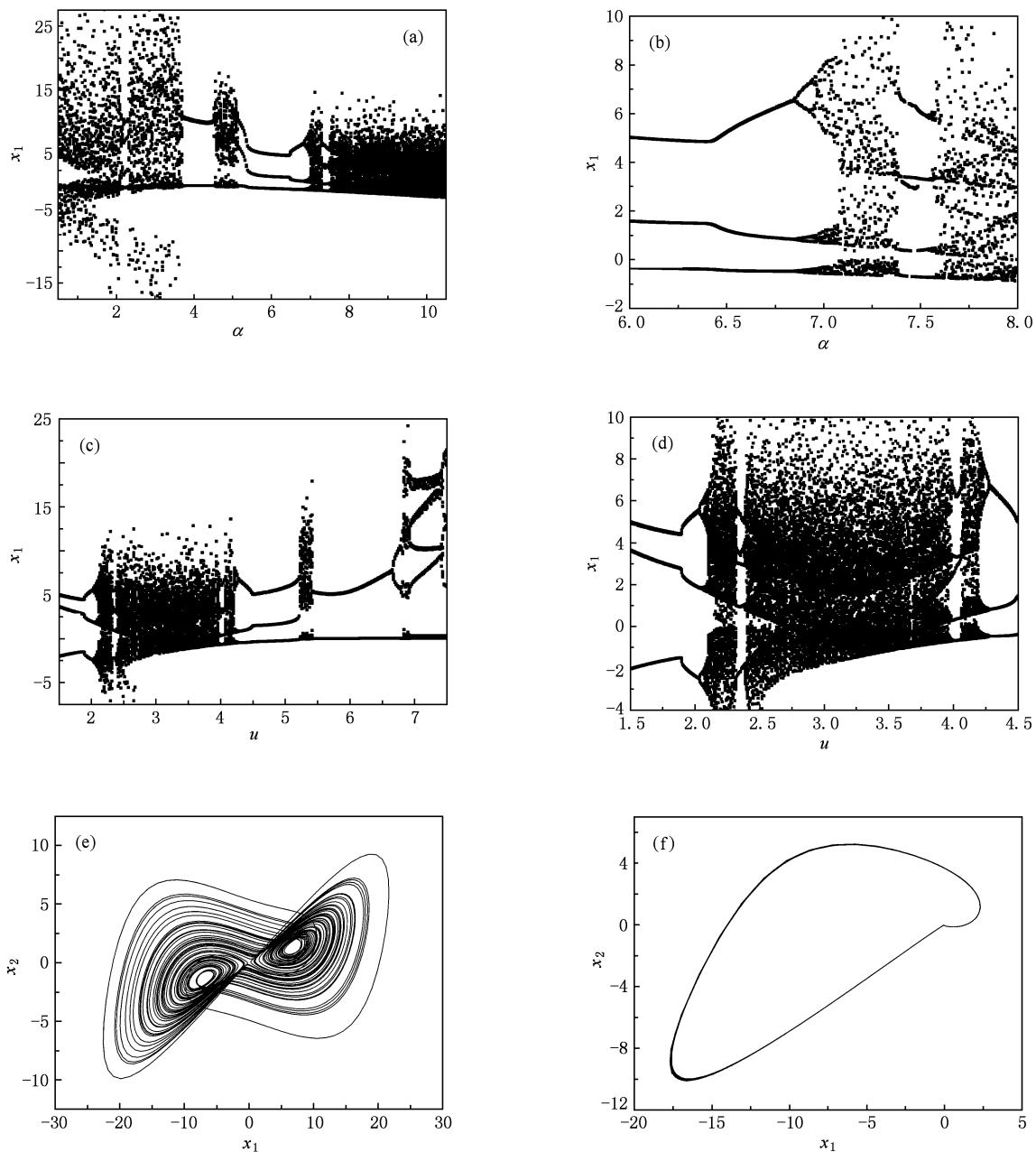


图8 系统参数 $\mu, \alpha$ 取不同值时的相图 (a) 在参数 $\mu = 4.2, \alpha \in [0.5, 10.5]$ 范围的分岔图; (b) 是(a)的部分精细结构图; (c) 在参数 $\alpha = 7.0, \mu \in [1.5, 7.5]$ 范围的分岔图; (d) 是(c)的部分精细结构图; (e) $\mu = 3.5, \alpha = 9.0$ 系统相图; (f) $\mu = 5.0, \alpha = 6.0$ 系统相图

## 5. 结 论

详细分析了耦合发电机系统对称、耗散、平衡点等基本动力学特性;通过计算 Lyapunov 指数谱、相图及 Poincaré 截面图等,系统讨论了控制参数变

化时的分岔图和周期窗口内的形态变化;计算得到双参数空间的最大李雅普诺夫指数分布图,讨论了系统在双参数空间的状态变化、周期分岔序列及混沌吸引子的特点.以上研究对多个参数的耦合发电机系统在较宽条件下的非线性动力学行为研究及其混沌控制具有参考价值.

- [1] Kennedy M P 1993 *IEEE Trans. Circ. Syst. I* **40** 657  
[2] Matias M A, Guemez J 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 1455  
[3] Liu Y, Barbosa L C, Riosleite J R 1994 *Phys. Rev. Lett.* **A 193** 259  
[4] Liu B Z, Peng J H 2004 *Nonlinear Dynamics* (Beijing: Higher Education Press) p317 (in Chinese) [刘秉正、彭建华 2004 非线性动力学 (北京: 高等教育出版社) 第 317 页]  
[5] Agiza H N 2002 *Chaos, Solitons & Fractals* **13** 341  
[6] Li S H, Tian Y P 2003 *Chaos, Solitons & Fractals* **16** 787  
[7] Awad E G, Rizk Y 2006 *Chaos, Solitons & Fractals* **29** 1085  
[8] Wang X D, Tian L X 2004 *Chaos, Solitons & Fractals* **21** 193  
[9] Mahmoud G M, Aly S A, Farghaly A A 2007 *Chaos, Solitons & Fractals* **33** 178  
[10] Agiza H N 2004 *Int. J. Modern Phys. C* **15** 873  
[11] Wang X Y, Wu X J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5083 (in Chinese) [王兴元、武相军 2006 物理学报 **55** 5083 ]  
[12] Zhang X F, Chen Z Y, Bi Q S 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2963 (in Chinese) [张晓芳、陈章耀、毕勤胜 2009 物理学报 **58** 2963 ]  
[13] Luo S Y, Shao M Z, Luo X H 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2685 (in Chinese) [罗诗裕、邵明珠、罗晓华 2010 物理学报 **59** 2685 ]  
[14] Yu J J, Cao H F, Xu H B, Xu Q 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 29 (in Chinese) [于津江、曹鹤飞、许海波、徐权 2006 物理学报 **55** 29 ]  
[15] Zhang Y, Lei Y M, Fang T 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3799 (in Chinese) [张莹、雷佑铭、方同 2009 物理学报 **58** 3799 ]  
[16] Yang S Q, Zhang X H, Zhao C A 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 636 (in Chinese) [杨绍清、张新华、赵长安 2000 物理学报 **49** 636 ]  
[17] Rasband S N 1990 *Chaotic Dynamics* (New York: John Wiley & Sons) p36

## Bifurcation and dual-parameter characteristic of the coupled dynamos system\*

Wu Shu-Hua<sup>1) 2)</sup> Sun Yi<sup>1)†</sup> Hao Jian-Hong<sup>1)</sup> Xu Hai-Bo<sup>3)</sup>

1) (School of Electric and Electronic Engineering, North China Electric Power University, Beijing 102206, China)

2) (Department of Physics and Electrical Information Engineering, Shijiazhuang Normal College, Shijiazhuang 050035, China)

3) (Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100088, China)

(Received 15 January 2010; revised manuscript received 26 April 2010)

### Abstract

Based on the comprehensive analysis of the basic dynamic characters of the coupled dynamos system, we have calculated the Lyapunov exponent spectra, bifurcation diagrams and so on, and discussed the chaotic bifurcation and mutative characteristic thoroughly in the periodic windows of the system, and the dual-parameter characteristic is also analyzed. It is found that a boundary line is absent in period-doubling bifurcations and a complicated bifurcation structure appears in 2D parameter space, the influences of two control parameters to the dynamic behavior are different.

**Keywords:** coupled dynamos system, bifurcation, periodic window, dual-parameter characteristic

**PACS:** 05.45.-a, 41.20.Gz, 05.45.Pq

\* Project supported by the Doctoral Foundation of North China Electric Power University (Grant No. kh0433) and the International Science and Technology Cooperation Program (Grant No. 2007DFA71250).

† Corresponding author. E-mail: sy@ncepu.edu.cn