

## 一类 3D 混沌系统的异宿轨道和 backstepping 控制\*

王震<sup>†</sup> 李永新 惠小健 吕雷

(西京学院基础部, 西安 710123)

(2009 年 12 月 26 日收到; 2010 年 4 月 15 日收到修改稿)

基于异宿轨道 Shilnikov 准则, 分析了一类三维自治微分系统异宿环的存在性, 并证明了该系统具有 Smale 马蹄意义的混沌. 然后对系统的分岔, Lyapunov 指数, Poincare 映射进行了数值分析, 同时利用自适应反步控制方法, 对含有三个未知参数的系统给出了一种控制算法. 最后通过数值示例进行仿真, 对文中论述进行了验证.

**关键词:** 异宿环, 自适应反步, Shilnikov 准则, Poincare 映射

**PACS:** 05.45.Pq, 05.45.Gg

## 1. 引言

半个世纪以来, 经过无数科学工作者的艰苦研究和探索, 人们对混沌运动的特点、规律及其在各个学科领域的表现已经有了深刻的理解. 所谓混沌, 简单的说就是一种确定性系统中出现的无规则运动. 然而, 科学界对于混沌至今尚无一个公认的非常严格的标准定义. 这是因为混沌系统非常复杂, 从不同的侧面理解有不同的内涵. 数学上常用的定义有: Li-Yorke 混沌, Devaney 混沌等, 而物理上常用的混沌判据是其有界性并存在正的 Lyapunov 指数或正的信息熵. 一般认为, 混沌具有确定性, 初值敏感依赖性, 正的最大 Lyapunov 指数, 不可预测性, 遍历性等特征. 1963 年, Lorenz 在一个三维自治系统首次发现了混沌吸引子. 1999 年, Chen 和 Ueta 也发现了一种和 Lorenz 系统族相似但不同的混沌吸引子<sup>[1-3]</sup>. 近年来的大量研究工作表明, 混沌与工程技术联系越来越密切, 它在生物, 化学, 力学, 电子, 信息, 计算机工程, 以及应用数学和实验物理等领域都具有广泛的前景, 如混沌的遍历性可用于图像处理; 混沌的随机性可用于液体的充分混合, 保密通信等. 因此, 在一些混沌显得非常重要而且有用的领域, 有目的的产生或强化混沌现象已经成为一个关键性的课题. 又由于混沌运动具有初值敏感性和长时间发展趋势的不可预见性, 混沌控制就成

了混沌应用的关键环节. 到目前为止, 国内外的科学工作者基于不同的策略提出了大量的混沌控制方法, 如连续变量反馈控制方法、偶然正比反馈法、脉冲控制方法、自适应控制方法、线性反馈法、参数共振微扰法、神经网络法、非线性反馈控制法、外部噪声控制法等, 并在光学、等离子体、化学反应、流体、电子回路、人工神经网络、生物系统等大量实验和应用中得到验证.

尽管目前已经有很多混沌系统被研究, 但如何根据实际需要来构造所需的混沌系统以及阐述混沌产生的机理却没有深入的分析, 对混沌吸引子的分析及存在性很少有深入的数学证明. 最近文献[4, 5]利用 Shilnikov 定理分别对蔡氏电路和分段线性 Lorenz 系统进行分析, 证明了这些系统中存在 Smale 马蹄混沌. 文献[6-11]研究了相关类非线性控制系统的 Hopf 分岔、混沌现象、吸引子的结构等有关问题. 本文基于异宿轨道 Shilnikov 定理, 通过证明异宿环的存在性, 研究一类新的 3D 微分系统  $x' = a(y - x)$ ,  $y' = cx - axz$ ,  $z' = -bz + xy$ , (1) 其中  $a, b, c$  为实数,  $a \neq 0$ , 和 Lü 系统<sup>[12]</sup>相比, 该系统在参数选择上有很大的选择性, 因而它可表现出更加复杂的动力学行为.

## 2. 异宿环的存在性

对于系统(1), 如果  $abc > 0$ , 有三个平衡点

\* 西京学院科研基金(批准号:090107)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: williamwangz@126.com

$O(0,0,0), E_+ \left( \sqrt{bc/a}, \sqrt{bc/a}, \frac{c}{a} \right), E_- \left( -\sqrt{bc/a}, \sqrt{bc/a}, \frac{c}{a} \right)$ , 同时可得在  $E_+$  处的特征方程为

$$f(\lambda) = \lambda^3 + (a+b)\lambda^2 + b(a+c)\lambda + 2abc = 0. \quad (2)$$

令  $\lambda = \eta - (a+b)/3$ , 则

$$\eta^3 + p\eta + q = 0, \quad (3)$$

其中,

$$q = 2a^3/27 - a^2b/9 - b^2a/9 + 5abc/3 + 2b^3/27 - b^2c/3,$$

$$p = bc - a^2/3 - b^2/3 + ab/3.$$

令  $\Delta = (q/2)^2 + (p/3)^3, \varepsilon = \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{\Delta}}, \sigma = \sqrt[3]{-q/2 - \sqrt{\Delta}}$ , 如果  $\Delta > 0$ , 方程(3)有负实数解  $\gamma$  和一对共轭解  $\alpha \pm i\beta$ , 其中  $\gamma = \varepsilon + \sigma, \alpha = -0.5(\varepsilon + \sigma), \beta = \sqrt{3}/2(\varepsilon - \sigma)$ . 又  $y = x + \dot{x}/a, z = -\frac{x'' + ax'}{a^2x}$

$+\frac{c}{a}$ , 将其代入系统(1)的最后一个方程得到

$$xx''' + (a+b)xx'' - x'x'' - ax'^2 + abxx' - abcx^2 + a^2x^4 + ax^3x' = 0. \quad (4)$$

考虑  $x(t) = \gamma(t) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n e^{n\omega t}$ ,  $\omega$  为实数, 并且

$d_0 = -\sqrt{bc/a}, d_n$  为未知的系数,  $n \geq 1$ , 将  $x(t)$  代入到方程(4), 比较  $e^{k\omega t} (k \geq 1)$  的同次幂的系数, 有

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^n h(n,i) \right) e^{n\omega t} = 0, \text{ 其中}$$

$$h(n,i) = g(n,i) + \left( \sum_{k=0}^i d_k d_{i-k} \right) \left( a^2 \left( \sum_{k=0}^{n-i} d_k d_{n-i-k} \right) + a \left( \sum_{k=0}^{n-i} d_k d_{n-i-k} (n-i-k)\omega \right) \right),$$

$$g(n,i) = d_i d_{n-i} \{ (n-i)^2 (n-2i)\omega^3 + (n-i) [(a+b)(n-i) - ai]\omega^2 + ab(n-i)\omega - abc \}.$$

同样可以确定  $d_n$  满足

$$d_0 d_n f(n\omega) + 2abc \sum_{i=1}^{n-1} d_i d_{n-i} + bc \sum_{i=1}^{n-1} d_i d_{n-i} (n-i)\omega + \sum_{i=1}^{n-1} h(n,i) = 0,$$

其中

$$f(n\omega) = (n\omega)^3 + (a+b)(n\omega)^2 + (ab+bc)n\omega + 2abc.$$

当  $n=1$  时,

$$d_0 d_1 (\omega^3 + (a+b)\omega^2 + (ab+bc)\omega + 2abc) e^{\omega t} = 0,$$

又  $d_1 \neq 0$ , 从而

$$\omega^3 + (a+b)\omega^2 + (ab+bc)\omega + 2abc = 0,$$

其中  $\omega$  是方程(2)的负根, 当  $\Delta > 0$  时(2)式有一个负的实数解, 故

$$f(n\omega) = (n\omega)^3 + (a+b)(n\omega)^2 + (ab+bc)n\omega + 2abc \neq 0, \quad n \geq 2.$$

因此  $d_n$  可以完全被  $a, b, c, \alpha$  和  $d_1$  决定, 且  $d_n = \varphi_n d_1^n$ . 对于  $n \geq 2, \varphi_n$  是关于  $a, b, c, \alpha$  的已知函数, 所以

当  $t > 0$ , 异宿轨道分支  $\sum_{n=0}^{\infty} d_n e^{n\omega t}$  被决定, 同样, 我们

可以得到当  $t < 0$  时的异宿轨道  $\sum_{n=0}^{\infty} -d_n e^{-n\omega t}$ , 这样就找到了连接  $E_+$  和  $E_-$  的异宿环.

**定理 1**<sup>[13,14]</sup> 如果  $\Delta > 0$  且  $\varepsilon + \sigma < -2(a+b)/3$ , 则系统(1)存在异宿轨道, 同时系统具有马蹄形混沌.

### 3. 计算分析

#### 3.1. 分岔图及 Lyapunov 指数谱

在参数  $a=2, b=1$  下, 从图 1 可以看出, 当  $c \in [4, 5.8]$  时, 系统(1)处于稳定周期状态; 当  $c \in (5.8, 6]$  时, 系统(1)处于拟周期状态; 当  $c \in (6, 10]$  时, 系统(1)处于混沌状态. 选取参数  $c=9$ , 可以很快计算出系统的三个 Lyapunov 指数(见图 2)  $LE_1 = 0.25631 > 0, LE_2 = 0, LE_3 = -3.255 < 0$ , 因为  $\sum_{i=1}^3 LE_i < 0$ , 故系统为非发散系统, 又由于有一个正的 Lyapunov 指数, 且 Lyapunov 维数  $D_L = 2.0787$ , 所以系统在上述参数下是混沌的.

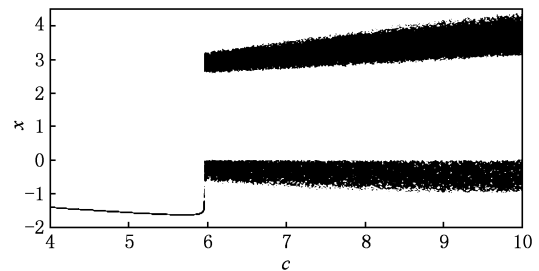


图 1 系统(1)在参数  $a=2, b=1$  下关于  $c$  的分岔图

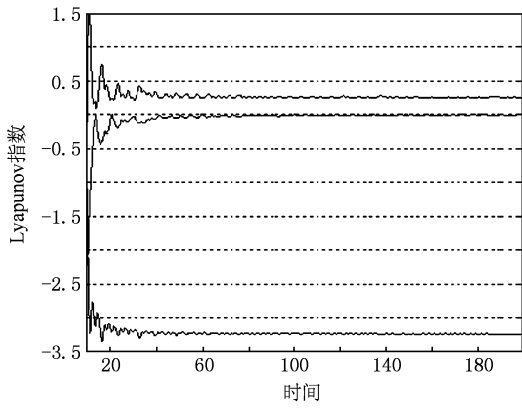


图2 系统(1)在参数  $a=2, b=1, c=9$  下的 Lyapunov 指数

### 3.2. Poincare 映射及相图

根据分岔图 1, 选取参数  $c=9$  和  $c=5$ , 可分别得到相应的 Poincare 映射图及相图(见图 3—6). 可以看到, 系统分别处于混沌, 稳定周期状态, 同时可知系统通向混沌的道路为准周期环面破裂进入混沌.

### 3.3. 异宿轨道

考虑情形  $a=2, b=1, c=9$ , 根据异宿环存在性分析, 可以计算出  $\lambda_1 = -2.1437, \lambda_{2,3} = 1.0718 \pm$

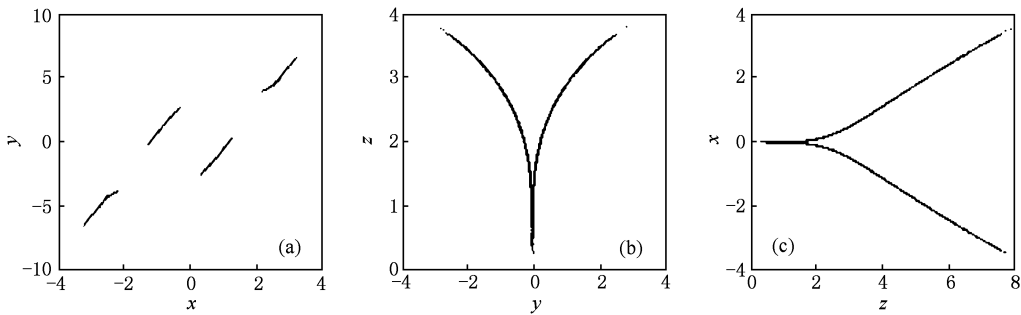


图3 系统(1)在参数  $a=2, b=1, c=9$  下的 Poincare 映射图 (a)  $z=4$  截面; (b)  $x=0$  截面; (c)  $y=0$  截面

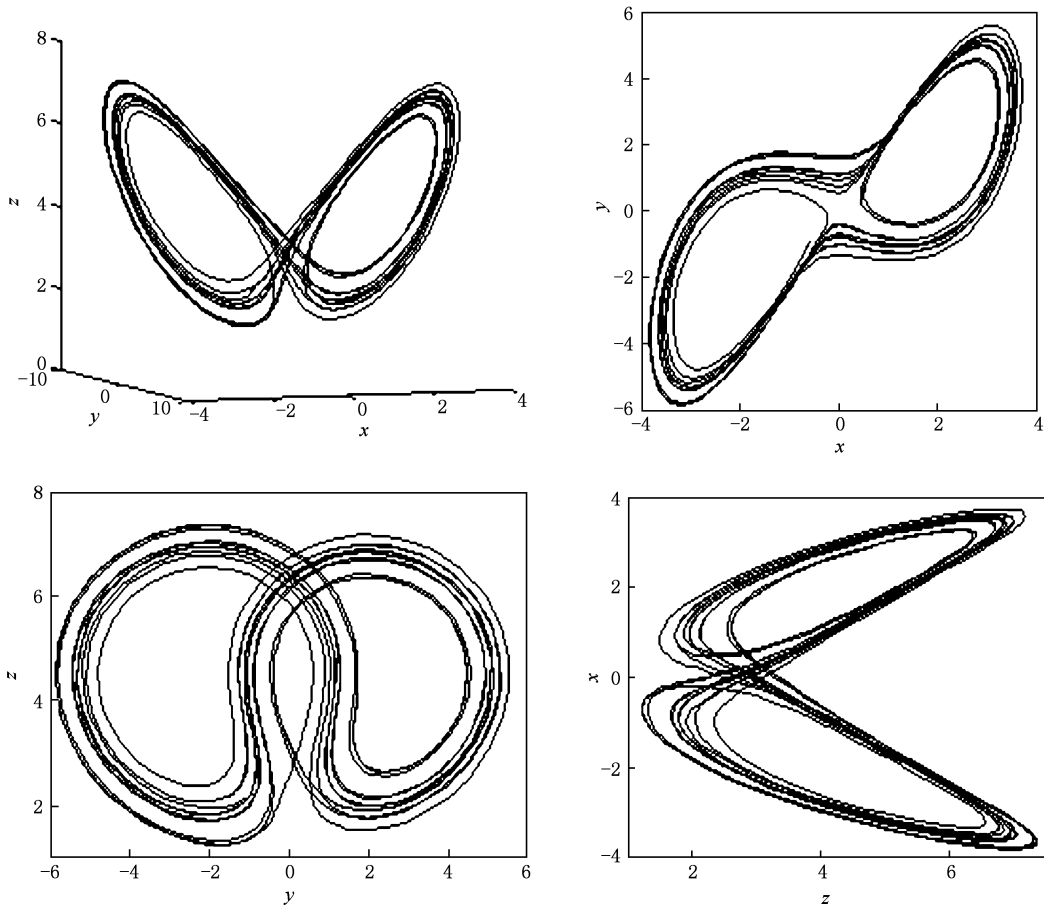


图4 系统(1)在参数  $a=2, b=1, c=9$  下的吸引子

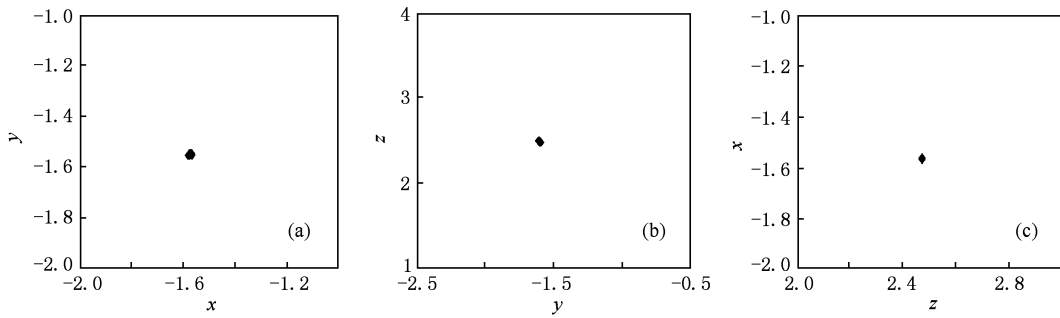


图5 系统(1)在参数  $a=2, b=1, c=5$  下的 Poincaré 映射图 (a)  $z=2.5$  截面; (b)  $x=-1.58$  截面; (c)  $y=-1.58$  截面

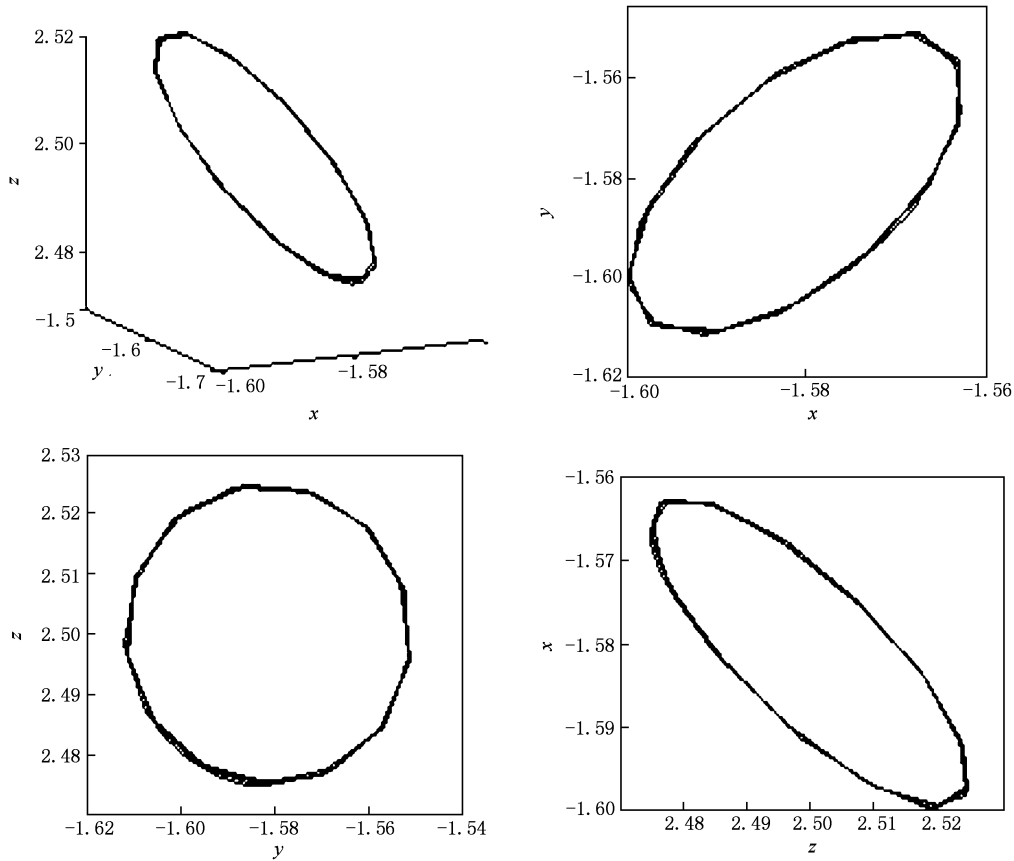


图6 系统(1)在参数  $a=2, b=1, c=5$  下的稳定周期

3.  $3833i, \Delta = 201.2 > 0, \varepsilon + \sigma = -2.1473 < -2(a + b)/3 = -2$ , 同时由于  $\sum_{i=0}^n d_i = 0$ , 其中  $n > 1, d_0 = -2.1213$ , 可知系统有马鞍平衡点, 并存在连接  $E_{+,-}$  的异宿环(见图7).

#### 4. 控制仿真

为了更加对系统(1)进行了解, 同时使混沌得

到控制, 下面针对未知系统参数的情况, 通过自适应反步控制方法<sup>[8]</sup>设计了一个控制器, 使系统可以快速达到稳定, 并对系统参数进行了估计. 考虑受控系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -ax_1 + ax_2, \quad \dot{x}_2 = cx_1 - ax_1x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - bx_3 + u, \end{aligned} \quad (5)$$

其中参数  $a, b, c$  未知.

##### Backstepping 算法

**Step1** 定义  $z_1 = x_1, z_2 = x_2 - \alpha_1$ , 选择 Lyapunov

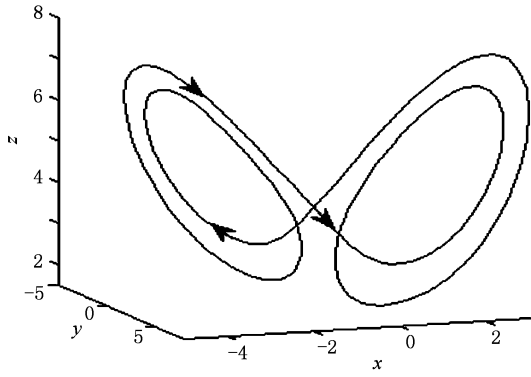


图7 系统(1)的异宿轨道

函数  $V_1 = 0.5z_1^2 + 0.5\gamma^{-1}(\hat{a} - a)^2$ , 其导数为  $\dot{V}_1 = -c_1z_1^2 + \hat{a}z_1z_2$ , 这里  $\alpha_1 = -c_0z_1, c_0 > -1, c_1 = \hat{a}(c_0 + 1), \dot{\hat{a}} = -\gamma(x_1z_1 - z_2z_1 - \alpha_1z_1)$ .

**Step2** 定义  $z_3 = x_3 - \alpha_2$ , 选择 Lyapunov 函数  $V_2 = V_1 + 0.5z_2^2 + 0.5\gamma^{-1}(\hat{c} - c)^2$ , 其导数为  $\dot{V}_2 = c_1z_1^2 - c_2z_2^2 - ax_1z_2z_3$ , 这里  $\alpha_2 = a^{-1}(\hat{a} + \hat{c}) - (c_0 + c_0^2), c_2 = -c_0a, \dot{\hat{c}} = \gamma z_2x_1$ , 由于  $a > 0$ , 则选择  $-1 < c_0 < 0$ , 使得  $c_1 > 0, c_2 > 0$ .

**Step3** 选择 Lyapunov 函数  $V_3 = V_2 + 0.5z_3^2 + 0.5\gamma^{-1}(\hat{b} - b)^2$ , 其导数为  $\dot{V}_3 = -c_1z_1^2 - c_2z_2^2 - c_3z_3^2$ , 这里  $c_3 > 0, \dot{\hat{b}} = -\gamma z_3^2 - \gamma z_3\alpha_2, u = -c_3z_3 + ax_1z_2 - x_1z_2 - x_1\alpha_1 + \hat{b}z_3 + \hat{b}\alpha_2 + \frac{\partial\alpha_2}{\partial\hat{a}}\dot{\hat{a}} + \frac{\partial\alpha_2}{\partial\hat{c}}\dot{\hat{c}}$ .

由于  $\dot{V}_3$  是负的, 故在坐标系中  $(z_1, z_2, z_3)$ , 平衡点  $(0, 0, 0)$  是全局渐进稳定, 并且  $(\hat{a}(t), \hat{c}(t), \hat{b}(t))$  是全局一致有界, 且当  $z_1, z_2, z_3$  向零逼近时,  $x_1, x_2$  逼近于零, 当  $t \rightarrow \infty$  时,  $x_3 \rightarrow a^{-1}(\hat{a} + \hat{c}) - (c_0 + c_0^2)$ , 即  $x_3$  保持有界, 控制器  $u$  也是有界的. 取  $\hat{a} = 1, \hat{c} = 1, \hat{b} = 2, x_1(0) = 1, x_2(0) = 2, x_3(0) = 1, c_0 = -0.5, c_3 = 0.5, \gamma = 1$ , 仿真结果见图 8 和图 9. 从图 8 可以观察, 状态  $x_1(t)$  和  $x_2(t)$  渐进稳定到零, 状态  $x_3(t)$  有界; 参数估计  $\hat{a}, \hat{c}, \hat{b}$  和控制器  $u$  分别见图 9.

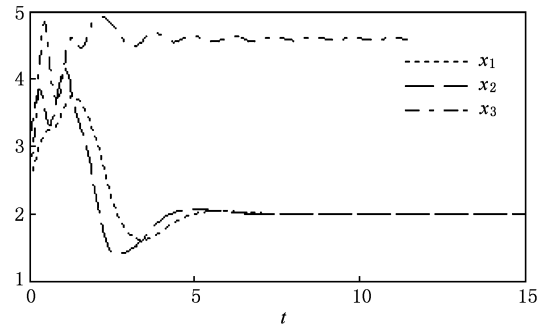


图8 受控系统(5)的响应

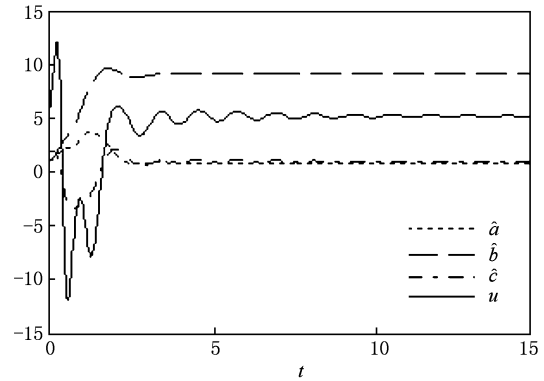


图9 系统参数估计  $\hat{a}, \hat{c}, \hat{b}$  和控制器  $u$

## 5. 结 论

利用异宿 Shilnikov 方法, 通过寻找一类多项式微分系统的异宿轨道, 证明了该系统具有 Smale 马蹄形混沌. 并通过符号与数值运算, 分析和计算了该系统的分岔图, LE 谱, 同时对系统的混沌机理进行了理论分析. 最后运用自适应反步控制技术, 对含有三个未知参数的系统给出了控制器设计算法, 并通过计算机进行了仿真实验. 当然, 对于这类新的混沌系统, 还有许多工作要做, 比如非线性控制的设计方法, 空间周期解的存在性, 唯 N 性等等, 由于篇幅有限, 此处讨论从略.

感谢西安交通大学航天学院何红亚博士的建议讨论.

- [1] Sparrow C 1982 *The Lorenz Equation: bifurcation, chaos, and strange attractor* (New York: Springer).
- [2] Chen G R, Dong X 1998 *From Chaos to Order: Methodologies, Perspectives and Applications* (Singapore, world Scientific).
- [3] Lü J H, Lu J A, Chen S H 2002 *Chaotic Time Series Analysis and Application* (Wuhan, Wuhan University Press).
- [4] Li Z, Chen G R, Halang W A 2004 *Information Sciences* **165** 235
- [5] Chua L O, Komuro M, Matsumoto T 1986 *IEEE Trans. on Circuits and Systems* **33** 1073
- [6] Ueta T, Chen G R 2000 *International Journal of Bifurcation and Chaos* **10** 1917
- [7] Wang Z 2007 *Analysis in Theory and Applications* **23** 343
- [8] Wang Z, Wu Y T, Li Y X, Zou Y J 2009 *Proceedings of the 4 th ICCSE* 441
- [9] Lü J H, Chen G R, Zhang S C 2002 *Chaos, Solitons and Fractals* **14** 669
- [10] Chen J J, Yu S M 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 7525 (in Chinese) [陈建军、禹思敏 2009 物理学报 **58** 7525]
- [11] Wang Z, Mao P W 2008 *Journal of Dynamics and Control* **6** 16 (in Chinese) [王震、毛鹏伟 2008 动力学与控制学报 **6** 16]
- [12] Lü J H, Chen G R, Zhang S C 2002 *International Journal of Bifurcation and Chaos* **12** 659
- [13] Chen X Y, Li G L 2008 *Journal of Electronics & Information Technology* **30** 1932 (in Chinese) [陈希有、李冠林 2008 电子与信息学报 **30** 1932]
- [14] Zhou T S, Tang Y, Chen G R 2004 *International Journal of Bifurcation and Chaos* **14** 3167

## Heteoclinic orbit and backstepping control of a 3D chaotic system\*

Wang Zhen<sup>†</sup> Li Yong-Xin Xi Xiao-Jian Lü Lei

(Department of Foundation, Xijing University, Xi'an 710123, China)

(Received 26 December 2009; revised manuscript received 15 April 2010)

### Abstract

The existence of heteoclinic loop which connects the saddle focus equilibrium points is analyzed for a three-dimensional differential system based on heteoclinic orbit Shilnikov method, which proves the system possesses "horseshoe" chaos. Then the system bifurcation, Lyapunov exponent, Poincare mapping are studied by numerical analysis. In addition, adaptive backstepping design is used to control this system with three unknown key parameters, and an algorithm of this controller is presented. Finally, we make some numerical simulations of the system in order to verify the analytic results.

**Keywords:** heteoclinic loop, adaptive backstepping, Shilnikov criterion, Poincare mapping

**PACS:** 05.45.Pq, 05.45.Gg

\* Project supported by the Research Foundation of Xijing College (Grant No. 090107).

<sup>†</sup> E-mail: williamwangz@126.com