

## 参数未知分段混沌系统的时滞广义投影同步\*

陶洪峰<sup>1)†</sup> 胡寿松<sup>2)</sup>

1)(江南大学物联网工程学院, 无锡 214122)

2)(南京航空航天大学自动化学院, 南京 210016)

(2010年1月25日收到; 2010年5月11日收到修改稿)

研究了一类参数未知的分段修正 Lorenz-Stenflo 混沌系统的时滞广义投影同步问题. 基于 Lyapunov 稳定性理论, 提出了自适应非线性反馈控制器设计及其参数更新律, 能够根据误差大小和状态变化自动调节反馈系数, 在辨识出实时驱动系统和时滞响应系统多组未知参数的同时, 实现所有状态变量的不同比例广义投影同步. 仿真结果表明了该方法对分段混沌系统时滞同步的现实可行性和有效性.

**关键词:** 广义投影同步, 分段混沌系统, 时滞, 参数未知

**PACS:** 05.45.Xt

## 1. 引言

实际工程中的混沌系统往往具有复杂的非线性项, 因此若用电子电路来实现混沌系统一般都很困难. 学者们研究发现, 分段线性函数由于其结构的特殊性, 因此常被用于构造简单电子电路以生成混沌吸引子. 蔡式系统就是第一个用实际电子电路搭建出来的分段混沌系统. 近几年来, 修正 Lü 系统<sup>[1]</sup>、修正 Chen 系统<sup>[2]</sup>和修正 Lorenz-Stenflo (MLS) 系统<sup>[3]</sup>等分段混沌系统也相继被提出.

由于分段混沌系统的分段函数结构, 因此其可以分解为若干稳定子系统, 但是不同的初始条件就会使得混沌系统处于不同的分段状态, 其控制研究相比连续系统要难<sup>[4,5]</sup>.

众所周知, 混沌同步在保密通信和信号处理等领域都有着广泛应用<sup>[6-8]</sup>, 至今依然是研究热点. 文献[9,10]分别讨论了无时滞和变时滞混沌系统的自适应同步, 抑制未知参数的不确定性影响. 文献[11,12]通过改进脉冲控制和双极脉冲控制方法, 分别解决了变时滞非线性系统的稳定性和延迟同步问题. 文献[13]进一步讨论了混沌系统的容错性, 通过反馈控制器和补偿器, 保证多时滞故障系统的主从同步. 文献[14]利用网络拆分思想, 深入研究了多重边融合复杂网络的自适应同步问题. 最

近一些学者又进一步提出广义投影同步概念, 目的是实现两个初值不同的混沌系统每个对应状态向量的按比例投影同步. 该方法具有很强的抗破译能力, 已引起广泛重视<sup>[15-19]</sup>. 文献[15-17]考虑了驱动系统参数均已知的情形, 但是实际混沌系统的参数完全可能是未知或漂移的. 虽然文献[18,19]进一步研究了参数未知时的自适应同步问题, 但均没有考虑响应系统在同步于驱动系统过程中的未知时滞扰动影响.

本文考虑了一类以参数未知分段 MLS 混沌系统为驱动的广义投影同步问题, 研究了响应系统在受未知时滞扰动影响下的控制器设计, 所提出的非线性控制器能够根据误差大小和状态变化自适应地调节反馈系数, 以实现不同形式的投影同步.

## 2. 四维 MLS 混沌系统描述

1996年, Lennart Stenflo 重构传统的 Lorenz 系统<sup>[20]</sup>, 得到如下形式的 Lorenz-Stenflo 混沌系统:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y-x) + dw, \\ \dot{y} &= x(c-z) - y, \\ \dot{z} &= xy - bz, \\ \dot{w} &= -x - aw. \end{aligned} \quad (1)$$

进一步可得4维分段MLS混沌系统

\* 国家自然科学基金(批准号:60674092)资助的课题.

† E-mail: taohongfeng@hotmail.com

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y-x) + dw, \\ \dot{y} &= x(c-z) - y, \\ \dot{z} &= \text{sign}(y)x - bz, \\ \dot{w} &= -x - aw, \end{aligned} \quad (2)$$

其中  $\text{sign}(\cdot)$  为标准的线性符号函数,  $a, b, c, d \in R$  是 MLS 系统的未知常量系数.

当(2)式中的未知系数取  $a = 1, b = 0.7, c = 26, d = 1.5$  时, 该混沌系统的最大李雅普诺夫指数为 13.1. 图 1 和图 2 分别为该系统在  $(x, y, z)$  和  $(x, y, w)$  平面内的吸引子图形.

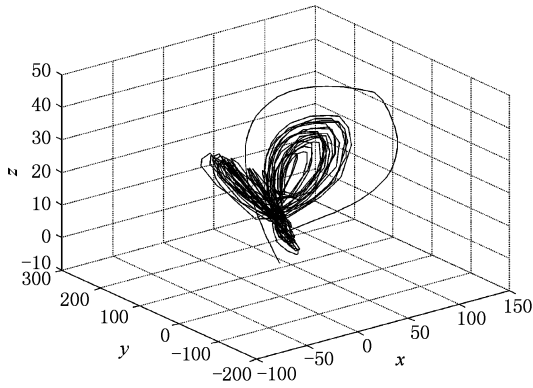


图 1 MLS 系统在  $(x, y, z)$  平面的吸引子图形

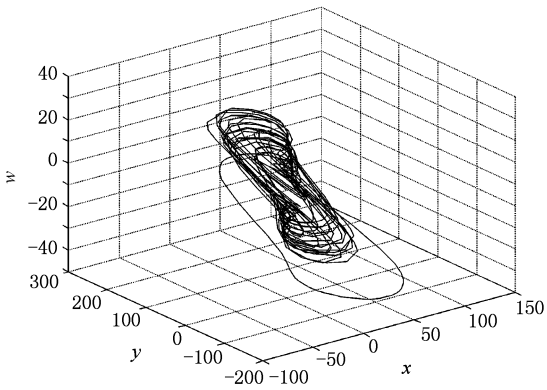


图 2 MLS 系统在  $(x, y, w)$  平面的吸引子图形

### 3. MLS 混沌系统的时滞广义同步

定义 考虑如下两个非线性动力学系统:

$$\dot{X} = F_1(X), \quad (3)$$

$$\dot{Y} = F_2(Y) + U(X, Y), \quad (4)$$

其中  $X \in R^n$  和  $Y \in R^n$  分别是驱动系统和响应系统的状态变量. 若存在控制器函数  $U$ , 在给定对角矩阵形式的尺度因子  $\alpha$  的前提下

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \| Y(t) - \alpha X(t) \| = 0, \quad (5)$$

则系统(3)和系统(4)达到广义投影同步.

考虑以(2)式形式的分段 MLS 混沌系统作为驱动系统, 其可进一步改写为

$$\dot{x}_m = f(x_m) + F(x_m)\theta, \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} x_m^T &= [x^T \quad y^T \quad z^T \quad w^T], \\ f(x_m) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -xz - y \\ \text{sign}(y)x \\ -x \end{bmatrix}, \quad \theta = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}, \\ F(x_m) &= \begin{bmatrix} y-x & 0 & 0 & w \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & -z & 0 & 0 \\ -w & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

针对驱动系统(6), 设计如下响应系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}_s &= a(y_s - x_s) + dw_s + u_1, \\ \dot{y}_s &= x_s(c - z_s) - y_s + u_2, \\ \dot{z}_s &= \text{sign}(y_s)x_s - bz_s + u_3, \\ \dot{w}_s &= -x_s - aw_s + u_4, \end{aligned} \quad (7)$$

式中  $u_i (i = 1, 2, 3, 4)$  为待定设计的同步控制器.

当响应系统受到未知时滞扰动影响时, 此时响应系统进一步可改写为

$$\dot{\hat{x}}_s = f(\hat{x}_s) + F(\hat{x}_s)\hat{\theta} + D(\hat{x}_s(t-\tau))\vartheta + u, \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{x}_s^T &= [x_s^T \quad y_s^T \quad z_s^T \quad w_s^T], \\ D(\hat{x}_s(t-\tau)) &= \text{diag} \{ x_s(t-\tau), y_s(t-\tau), \\ &\quad z_s(t-\tau), w_s(t-\tau) \}, \\ u^T &= [u_1^T \quad u_2^T \quad u_3^T \quad u_4^T], \\ f(\hat{x}_s) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -x_s z_s - y_s \\ \text{sign}(y_s)x_s \\ -x_s \end{bmatrix}, \quad \hat{\theta} = \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ \hat{c} \\ \hat{d} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\vartheta = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}, \quad F(\hat{x}_s) = \begin{bmatrix} y_s - x_s & 0 & 0 & w_s \\ 0 & 0 & x_s & 0 \\ 0 & -z_s & 0 & 0 \\ -w_s & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

而  $f(\hat{x}_s) \in R^n$  为非线性函数向量,  $D(\hat{x}_s(t-\tau))$  为

时滞扰动项,  $\tau$  为滞后时间,  $\hat{\theta}$  是响应系统对驱动系统未知系数  $\theta$  的估计向量,  $q_1, q_2, q_3$  和  $q_4$  为扰动的未知系数.

#### 4. 自适应同步控制器设计

**定义** 误差  $e = \hat{x}_s - \alpha x_m$ , 同时取  $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta, \vartheta = \hat{\vartheta} + \tilde{\vartheta}$ , 则可得误差动态方程

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{\hat{x}}_s - \alpha \dot{x}_m \\ &= f(\hat{x}_s) + F(\hat{x}_s)\hat{\theta} + D(\hat{x}_s(t-\tau))\vartheta \\ &\quad - \alpha f(x_m) + \alpha F(x_m)\tilde{\theta} - \alpha F(x_m)\hat{\theta} + u. \end{aligned} \quad (9)$$

设计控制器:

$$\begin{aligned} u &= -f(\hat{x}_s) + \alpha f(x_m) - F(\hat{x}_s)\hat{\theta} \\ &\quad + \alpha F(x_m)\hat{\theta} - D(\hat{x}_s(t-\tau))\hat{\vartheta} + A_m e, \end{aligned} \quad (10)$$

其中  $A_m$  是所有特征根均具有负实部的矩阵. 将 (10) 式代入 (9) 式后可得

$$\dot{e} = A_m e + \alpha F(x_m)\tilde{\theta} + D(\hat{x}_s(t-\tau))\tilde{\vartheta}. \quad (11)$$

针对 (11) 式所示系统, 若有 Lyapunov 函数  $V(e)$  连续可微, 并满足条件

$$\begin{aligned} V(e) &> 0, (e_1, e_2, e_3, e_4) \neq (0, 0, 0, 0), \\ V(e) &= 0, (e_1, e_2, e_3, e_4) = (0, 0, 0, 0), \end{aligned} \quad (12)$$

和

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) &< 0, (e_1, e_2, e_3, e_4) \neq (0, 0, 0, 0), \\ \dot{V}(e) &= 0, (e_1, e_2, e_3, e_4) = (0, 0, 0, 0), \end{aligned} \quad (13)$$

则 (11) 式系统全局渐近稳定.

**定理** 如果存在对称正定矩阵  $P$ , 使得下列矩阵不等式成立:

$$A_m^T P + P A_m < 0, \quad (14)$$

则误差动态方程 (9) 在非线形控制器 (10) 的作用下全局渐近稳定, 即驱动系统 (2) 和响应系统 (8) 从任意初始值均可达到广义投影同步, 而参数向量的自适应更新率为

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\theta}} &= -\alpha K_1 F^T(x_m) P e, \\ \dot{\tilde{\vartheta}} &= K_2 D^T(\hat{x}_s(t-\tau)) P e, \end{aligned} \quad (15)$$

其中  $K_i \in R^{4 \times 4} (i = 1, 2)$  为对称正定矩阵.

**证明** 选取满足 (12) 式条件的函数

$$V(e) = \frac{1}{2}(e^T P e + \tilde{\theta}^T K_1^{-1} \tilde{\theta} + \tilde{\vartheta}^T K_2^{-1} \tilde{\vartheta}), \quad (16)$$

则对 (16) 式求导后可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) &= \frac{1}{2}e^T(A_m^T P + P A_m)e \\ &\quad + \alpha \tilde{\theta}^T F^T(x_m) P e + \tilde{\theta}^T K_1^{-1} \dot{\tilde{\theta}} \\ &\quad + \tilde{\vartheta}^T D^T(\hat{x}_s(t-\tau)) P e - \tilde{\vartheta}^T K_2^{-1} \dot{\tilde{\vartheta}}. \end{aligned} \quad (17)$$

将 (15) 式代入 (17) 式, 最终可得

$$\dot{V}(e) = \frac{1}{2}e^T(A_m^T P + P A_m)e \leq 0, \quad (18)$$

其满足如 (13) 式所示的 Lyapunov 稳定性条件, 则由驱动系统和响应系统构建的广义投影同步误差系统渐近稳定. 定理得证.

#### 5. 仿真实验

针对 MLS 驱动系统 (2) 和时滞响应系统 (8), 设定系统“未知”参数  $a = 1, b = 0.7, c = 26, d = 1.5, q_1 = 1, q_2 = 2, q_3 = 3, q_4 = 4$ , 滞后时间  $\tau = 2$ , 而驱动系统的初始状态  $x_m^T(0) = [0.1 \ 0.3 \ -0.1 \ -0.2]$ , 响应系统的初始状态  $\hat{x}_s^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$ . 根据定理可得控制器 (10) 中满足式 (14) 和式 (15) 条件的矩阵  $A_m = \text{diag}\{-10, -10, -10, -10\}$ , 对称正定矩阵  $P = \text{diag}\{0.01, 0.01, 0.01, 0.01\}, K_1 = \text{diag}\{10, 10, 10, 10\}, K_2 = \text{diag}\{5, 1, 5, 5\}$ .

1) 当尺度因子  $\alpha = 1$  时, 图 3 和图 4 分别是 MLS 驱动和响应系统的运动轨迹和误差曲线, 而图 5 和图 6 则分别是驱动和响应系统的未知参数辨识曲线. 从仿真结果看出, 系统的时滞同步误

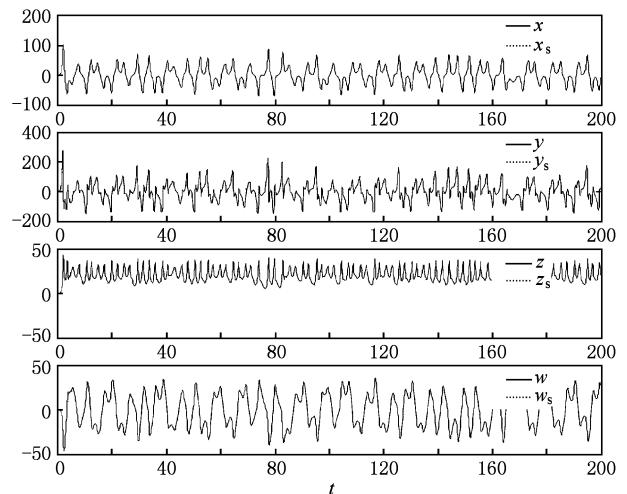


图 3 当  $\alpha = 1$  时 MLS 驱动和响应系统的运动轨迹

差快速减小, 而自适应控制器最终也准确辨识出了 8 个未知参数, 从而使得驱动和响应系统达到完全同步.

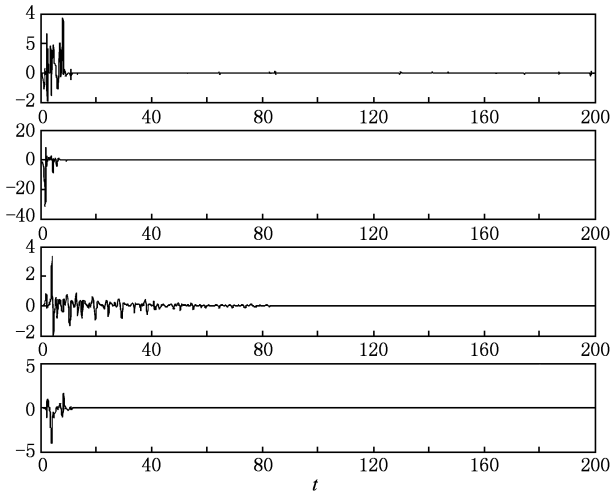


图 4 当  $\alpha = I$  时 MLS 驱动和响应系统的误差曲线

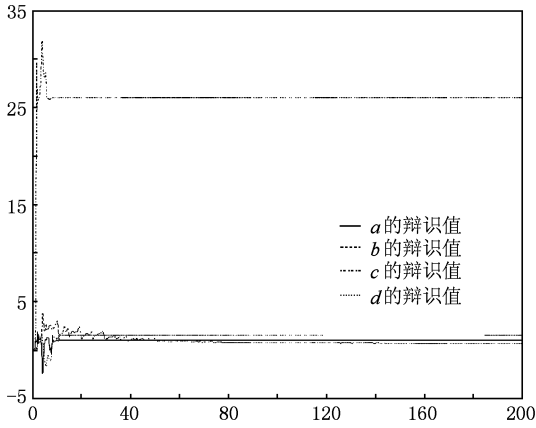


图 5 当  $\alpha = I$  时 MLS 驱动系统的未知参数辨识

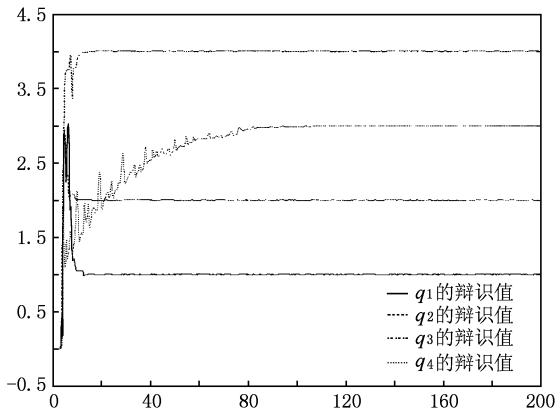


图 6 当  $\alpha = I$  时时滞响应系统的未知参数辨识

2) 当  $\alpha = \Lambda = \text{diag} \{-0.5, -1, -0.5, -0.5\}$  时, MLS 混沌系统要求达到广义反相位同步, 即  $x_s = -0.5x, y_s = -y, z_s = -0.5z, w_s = -0.5w$ . 仿真结果分别如图 7—10 所示.

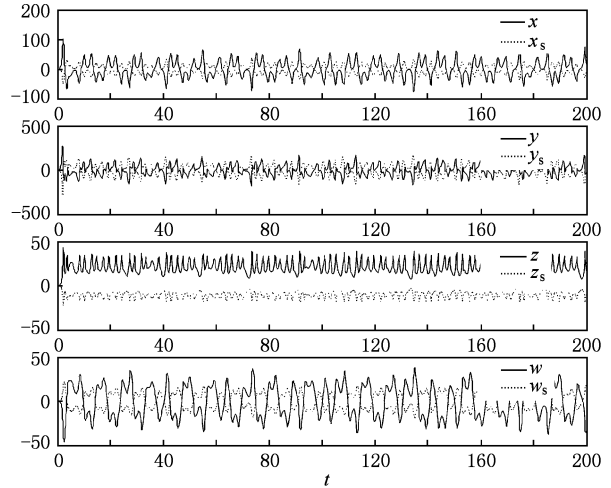


图 7 当  $\alpha = \Lambda$  时 MLS 驱动和响应系统的运动轨迹

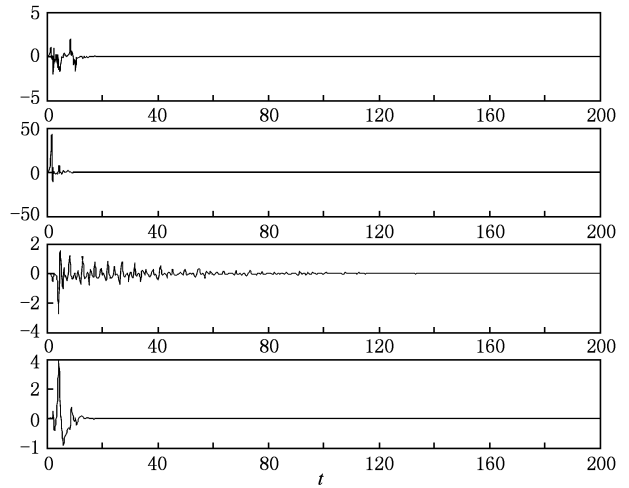


图 8 当  $\alpha = \Lambda$  时 MLS 驱动和响应系统的误差曲线

3) 当  $\alpha = \Gamma = \text{diag} \{0.4, 0.7, 0.8, 0.2\}$  时 MLS 混沌系统广义同步过程如图 11—14 所示. 从仿真结果可以看出, 此时自适应非线性控制器 (10) 对驱动和响应系统中的 8 个未知参数的辨识精度几乎保持不变.

## 6. 结 论

本文研究了分段 MLS 混沌系统的时滞广义投影同步问题. 所提出的自适应非线性控制器设计方

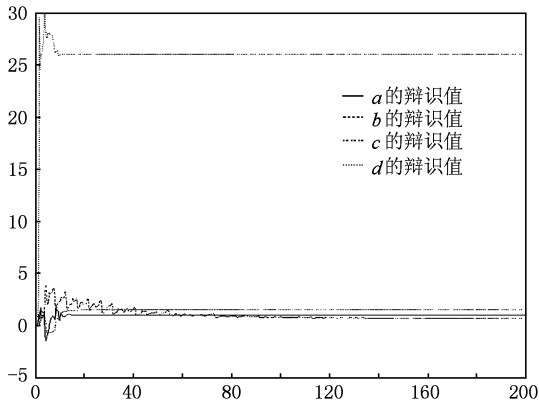


图9 当  $\alpha = 1$  时 MLS 驱动系统的未知参数辨识

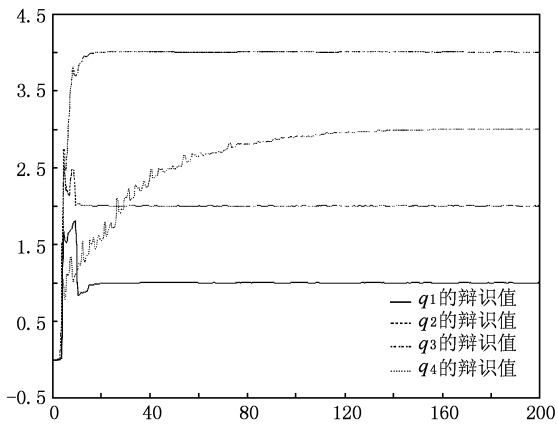


图10 当  $\alpha = 1$  时时滞响应系统的未知参数辨识

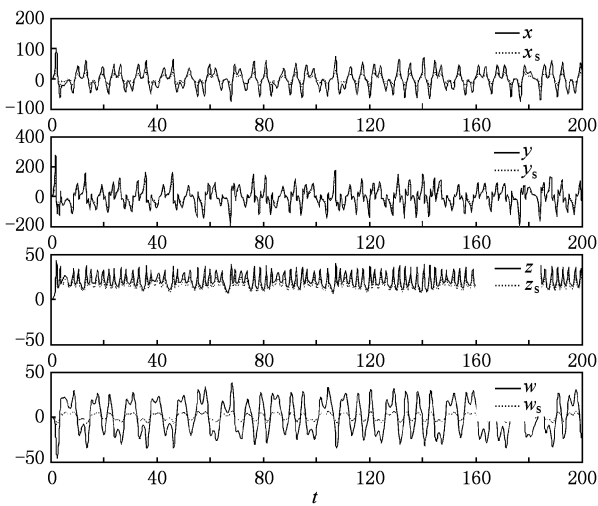


图11 当  $\alpha = 1$  时 MLS 驱动和响应系统的运动轨迹

法通过设定不同的尺度因子,能够实现参数未知驱动系统和未知时滞响应系统的广义投影同步. 本方法可推广到分数阶统一及异构混沌系统的投影同

步问题中<sup>[21]</sup>,对提高通信安全具有重要的实用价值.

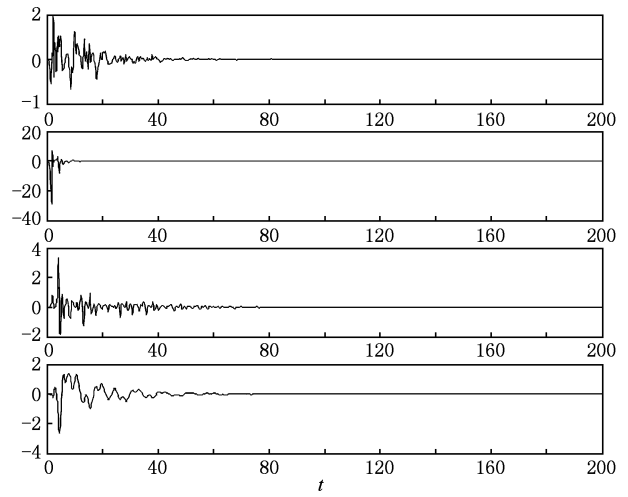


图12 当  $\alpha = 1$  时 MLS 驱动和响应系统的误差曲线

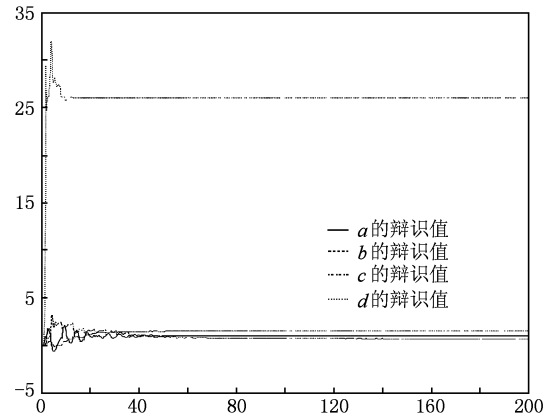


图13 当  $\alpha = 1$  时 MLS 驱动系统的未知参数辨识

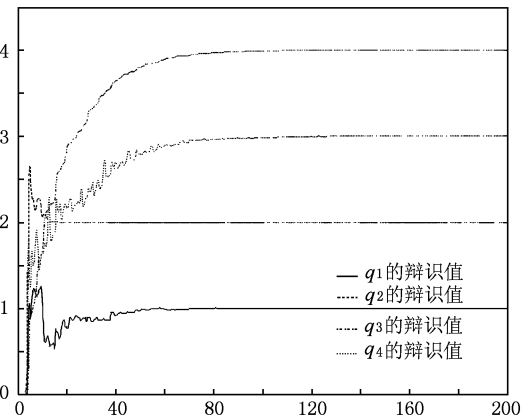


图14 当  $\alpha = 1$  时时滞响应系统的未知参数辨识

- [1] Lü J H, Zhou T S, Chen G R, Yang X S 2002 *Chaos* **12** 344
- [2] Elabbasy E M, Agiza H N, EI-Dessoky M M 2004 *Int. J. Bifurcation and Chaos* **14** 3969
- [3] Shan L, Liu Z, Li J, Wang Z Q 2009 *Inform. Contr.* **38** 637 (in Chinese) [单 梁、刘 中、李 军、王执铨 2009 信息与控制 **38** 637]
- [4] Shan L, Li J, Wang Z Q 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3950 (in Chinese) [单 梁、李 军、王执铨 2006 物理学报 **55** 3950]
- [5] Zheng Z H, Lü J H, Chen G R, Zhou T S, Zhang S C 2004 *Chaos, Solitons and Fractals* **20** 277
- [6] Wang M J, Wang X Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 1467 (in Chinese) [王明军、王兴元 2009 物理学报 **58** 1467]
- [7] Li W, Hao J H, Qi B 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1398 (in Chinese) [李 伟、郝建红、祁 兵 2008 物理学报 **57** 1398]
- [8] Chen S H, Kong C C 2009 *Chin. Phys. B* **18** 91
- [9] Yang D S, Zhang H G, Zhao Y, Song C H, Wang Y C 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1562 (in Chinese) [杨东升、张化光、赵 琰、宋崇辉、王迎春 2010 物理学报 **59** 1562]
- [10] Zhang R X, Tian G, Su P, Yang S P 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2073 (in Chinese) [张若洵、田 钢、粟 苹、杨世平 2008 物理学报 **57** 2073]
- [11] Zhang H G, Fu J, Ma T D, Tong S C 2009 *Chin. Phys. B* **18** 969
- [12] Zhang H G, Ma T D, Fu J, Tong S C 2009 *Chin. Phys. B* **18** 3751
- [13] Zhang H G, Ma D Z, Wang Z S, Feng J 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 147 (in Chinese) [张化光、马大中、王占山、冯 健 2010 物理学报 **59** 147]
- [14] Luo Q, Gao Y, Qi Y N, Gao Y, Wu T, Xu H, Li L X, Yang Y X 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 6809 (in Chinese) [罗 群、高雅、齐雅楠、高雅、吴 桐、许 欢、李丽香、杨义先 2009 物理学报 **58** 6809]
- [15] Li G H 2006 *Chaos, Solitons and Fractals* **30** 77
- [16] Yan J P, Li C P 2005 *Chaos, Solitons and Fractals* **26** 1119
- [17] Li C P, Yan J P 2006 *Chaos, Solitons and Fractals* **30** 140
- [18] Hu J B, Han Y, Zhao L D 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 1441 (in Chinese) [胡建兵、韩 炎 赵灵冬 2009 物理学报 **58** 1441]
- [19] Cai N, Jing Y W, Zhang S Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 802 (in Chinese) [蔡 娜、井元伟、张嗣瀛 2009 物理学报 **58** 802]
- [20] Tommy E 2005 *Ph. D. Dissertation* (Stockholm: KTH)
- [21] Yang S P, Zhang R X 2009 *Chin. Phys. B* **18** 3295

## Time-delayed generalized projective synchronization of piecewise chaotic system with unknown parameters \*

Tao Hong-Feng<sup>1)†</sup> Hu Shou-Song<sup>2)</sup>

1) (School of Communication and Control Engineering, Jiangnan University, Wuxi 214122, China)

2) (College of Automation Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

(Received 25 January 2010; revised manuscript received 11 May 2010)

### Abstract

The time-delayed generalized projective synchronization problem for a class of piecewise modified Lorenz-Stenflo chaotic system with unknown parameters is discussed. The adaptive nonlinear feedback controller and the parameter update rules are designed based on the Lyapunov stability theory, and the feedback gain can be adjusted adaptively according to the error values and the states. The method can make all full states asymptotically generalized projected synchronization and identify the real-time drive system and the time-delayed response system's unknown parameters. Results of simulation verified the realistic feasibility and effectiveness of the proposed method to the time-delayed generalized projective synchronization of the piecewise chaotic system.

**Keywords:** generalized projective synchronization, piecewise chaotic system, time-delay, unknown parameters

**PACS:** 05.45.Xt

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60674092).

† E-mail: taohongfeng@hotmail.com