

通过同步实现“有序 + 有序 = 混沌”的例子*

张荣[†] 徐振源 杨永清

(江南大学理学院, 无锡 214122)

(2009年9月30日收到; 2010年5月12日收到修改稿)

研究了连续的混沌系统是否存在“有序 + 有序 = 混沌”的现象, 研究表明两个吸引子为周期运动的动力学系统经双向耦合达到同步后, 同步后的系统可产生混沌态. 采用特定参数下的 Lorenz 系统和 Rössler 系统作为例子, 对连续的动力系统给出了一个“有序 + 有序 = 混沌”的例子.

关键词: 混沌, 有序, 耦合, 同步

PACS: 05.45.Xt, 05.45.Ac

1. 引言

早在古代的哲学流派中就有了有序与混沌的概念, 对有序与混沌的认识反映了人类对宇宙万物的一种深邃直觉. 有序与混沌在各种非线性系统中的演绎转变也是一个极具吸引力的研究焦点^[1-8]. 一方面, 有序产生于混沌^[9-13], 这方面的研究工作比如文献[14]的研究表明两个离散混沌系统的混合在特定情况下会产生有序的动力学行为; 徐凤丹等^[15]发现连续的混沌系统也存在类似的现象, 研究表明两个不同的连续混沌系统双向耦合后在一些情况下可产生有序的动力学行为; 这些研究提供了“混沌 + 混沌 = 有序”的例子. 另一方面, 有序又产生新形式的混沌, 就是说应该有“有序 + 有序 = 混沌”的例子.

本文旨在研究连续的混沌系统是否存在“有序 + 有序 = 混沌”的现象, 在文献[15]的研究方法和结果的启发下, 研究了两个不同的具有有序的动力学行为的系统双向耦合后在一些情况下可产生混沌态.

2. 两个不同动力系统的同步化

考虑如下的两个双向耦合系统:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + k(x - y) + \alpha(g(x) - f(y)), \\ \dot{y} &= g(y) + k(y - x) + \beta(f(y) - g(x)), \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $x, y \in R^n$, k, α, β 为耦合参数, f, g 是两个不同的 n 维连续向量函数, 当 $k = \alpha = \beta = 0$ 时, 两个动力系统的吸引子都是周期运动.

对系统(1)文献[15]给出了如下定理.

定理 1^[15] 设系统(1)是最终耗散的, 即存在有界集 $\Omega_1 \times \Omega_2 \subset R_n \times R_n$, 使得从初值点 (x_0, y_0) 出发的轨线 $x(t, x_0, y_0), y(t, x_0, y_0)$ 最终都进入 $\Omega_1 \times \Omega_2$, 向量函数 f, g 在 $\Omega_1 \times \Omega_2$ 内满足

$$\begin{aligned} \|f(y) - f(x)\| &\leq L_1 \|y - x\|, \\ \|g(y) - g(x)\| &\leq L_2 \|y - x\|, \\ \|g(x(t, x_0, y_0)) - f(x(t, x_0, y_0))\| &\leq M, \end{aligned} \quad (2)$$

并且耦合参数满足以下自适应律:

$$\begin{aligned} \dot{k} &= -\frac{1}{2}(y - x)^T(y - x), \\ \beta &= 1 - \alpha - \frac{\|y - x\|}{M}, \end{aligned} \quad (3)$$

则系统(1)可实现完全同步化.

当系统(1)实现完全同步化后, 其同步后的动力系统为

$$\dot{z} = (1 - \alpha)f(z) + \alpha g(z). \quad (4)$$

随着参数 α 的变化, 系统(4)可以呈现出非常丰富的动力学行为, 从而有可能实现从有序到混沌的转变, 下一节给出的例子完全证实了这种可能性.

* 国家自然科学基金(批准号:60875036), 江南大学创新团队发展计划资助的课题.

[†] E-mail: ronia62@yahoo.com

3. “有序 + 有序 = 混沌”的例子

设(1)式中的动力系统 $\dot{x} = f(x)$ 为特殊参数的 Lorenz 系统,其吸引子是周期态,见图 1(a),方程表述如下:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 10(y_1 - x_1), \\ \dot{y}_1 &= 260x_1 - x_1z_1 - y_1, \\ \dot{z}_1 &= x_1y_1 - (8/3)z_1. \end{aligned} \quad (5)$$

动力系统 $\dot{y} = g(y)$ 为如下的 Rössler 系统,其吸引子也是周期运动,见图 1(b),方程为

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= -y_2 - z_2, \\ \dot{y}_2 &= x_2 + 0.37y_2, \\ \dot{z}_2 &= z_2x_2 - 4z_2 + 2. \end{aligned} \quad (6)$$

由定理 1 系统(5)和(6)经双向耦合可实现同步,其同步情况见图 2,并且同步后的动力学方程为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(-y - z) + 10(1 - \alpha)(y - x), \\ \dot{y} &= \alpha(x + 0.37y) + (1 - \alpha)(260x - xz - y), \\ \dot{z} &= \alpha(zx - 4z + 2) + (1 - \alpha)[xy - (8/3)z], \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $\alpha \in [0,1]$. 以下研究同步后的动力学方程(7)的行为.

首先,当 $0 < \alpha < 1$ 时,系统(7)的平衡点满足方程组

$$\begin{aligned} y &= \frac{100x(260\alpha - 259\alpha^2 + 10x\alpha^2 - 20x\alpha + 10x)}{100\alpha - 137\alpha^2 + 1000x - 2100x\alpha + 1100x\alpha^2}, \\ z &= \frac{10x(25900 - 54263\alpha + 28353\alpha^2)}{100\alpha - 137\alpha^2 + 1000x - 2100x\alpha + 1100x\alpha^2}, \\ ax^3 + bx^2 + cx + d &= 0, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} a &= 1500(\alpha - 1)^3, \\ b &= -427500\alpha + 891795\alpha^2 - 464145\alpha^3, \\ c &= 563760\alpha^3 + 55160\alpha^2 - 1655520\alpha + 1036000, \\ d &= \alpha^2(411\alpha - 300). \end{aligned}$$

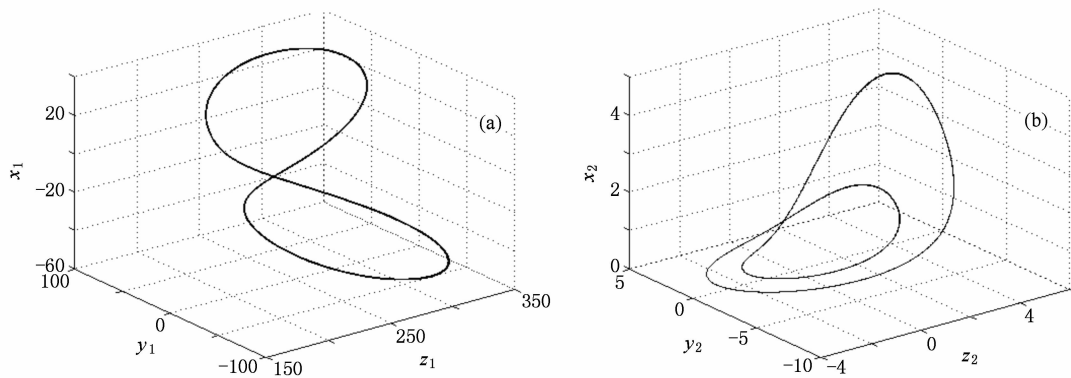


图 1 (a) 系统(5)的吸引子;(b)系统(6)的吸引子

数值计算表明,一般情况以上方程组有三个实数解,只有当 $\alpha \in [0.917, 0.92]$ 时,方程组有共轭复根,所以以下仅讨论三个实数解的情形,设系统

(7)的三个平衡点分别为 $S_1(x_1, y_1, z_1), S_2(x_2, y_2, z_2), S_3(x_3, y_3, z_3)$, 系统(7)在平衡点 (x, y, z) 处的 Jacobian 矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} 10\alpha - 10 & 10 - 11\alpha & -\alpha \\ 260 - 259\alpha + (\alpha - 1)z & 1.37\alpha - 1 & (\alpha - 1)x \\ \alpha z + (1 - \alpha)y & (1 - \alpha)x & \alpha x - (4/3)(\alpha + 2) \end{pmatrix},$$

特征方程为

$$f(\lambda) = \det(\lambda I - J) = \lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C,$$

其中

$$A = -\frac{3011}{300}\alpha + \frac{41}{3} - \alpha x,$$

$$\begin{aligned} B &= -21\alpha z - y\alpha^2 + 12\alpha^2 z - \frac{142523}{50}\alpha^2 \\ &+ x^2 - 2\alpha x^2 + \frac{811597}{150}\alpha + \alpha^2 x^2 \\ &+ \frac{1137}{100}\alpha^2 x - \frac{7682}{3} - 11\alpha x + y\alpha, \end{aligned}$$

$$C = -\det(J),$$

由 Routh-Hurwitz 准则, 系统(7)的平衡点渐进稳定的充要条件为 $\Delta_1 = A > 0, \Delta_2 = AB - C > 0$.

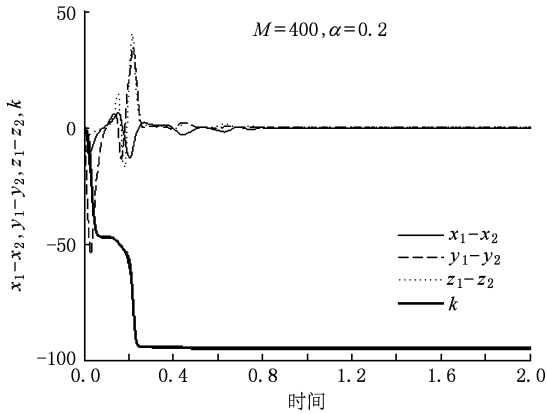


图2 系统(5)和(6)的同步误差曲线及耦合参数 k 的变化曲线

通过数值计算可得对于平衡点 $S_2(x_2, y_2, z_2)$, 当 $0.28 < \alpha < 0.88, \alpha > 0.9416$ 时, 有 $\Delta_1(x_2, y_2, z_2) > 0, \Delta_2(x_2, y_2, z_2) > 0$, 则 $S_2(x_2, y_2, z_2)$ 是一个稳定的平衡点; 对其他的 α 值, 平衡点 $S_2(x_2, y_2, z_2)$ 是不稳定的. 对平衡点 $S_3(x_3, y_3, z_3)$, 当 $0.9118 < \alpha < 0.9205, \alpha > 0.944$ 时, 有 $\Delta_1(x_3, y_3, z_3) > 0, \Delta_2(x_3, y_3, z_3) > 0$, 此时 $S_3(x_3, y_3, z_3)$ 是一个稳定的

平衡点; 对 $\alpha \in (0, 1), S_1(x_1, y_1, z_1)$ 是不稳定的平衡点, 系统(7)的平衡点分叉如图3所示(其中纵轴代表平衡点的 x 分量).

以下的数值仿真结果给出了随着参数 α 的变化, 同步后的系统(7)的动力学结构变化的一些结果. 图4(a)–(d)给出了当参数 α 分别取值 0.01, 0.02, 0.03, 0.2 时同步后的系统(7)的吸引子和这些不同参数下系统(7)的最大 Lyapunov 指数 L_1 , 当参数 α 值分别为 0.26, 0.95 时, 系统(7)的吸引子和对应的最大 Lyapunov 指数 L_1 见图5(a)和(b).

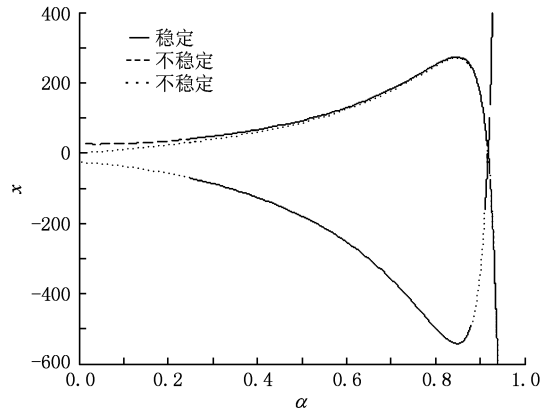


图3 系统(7)的平衡点分叉

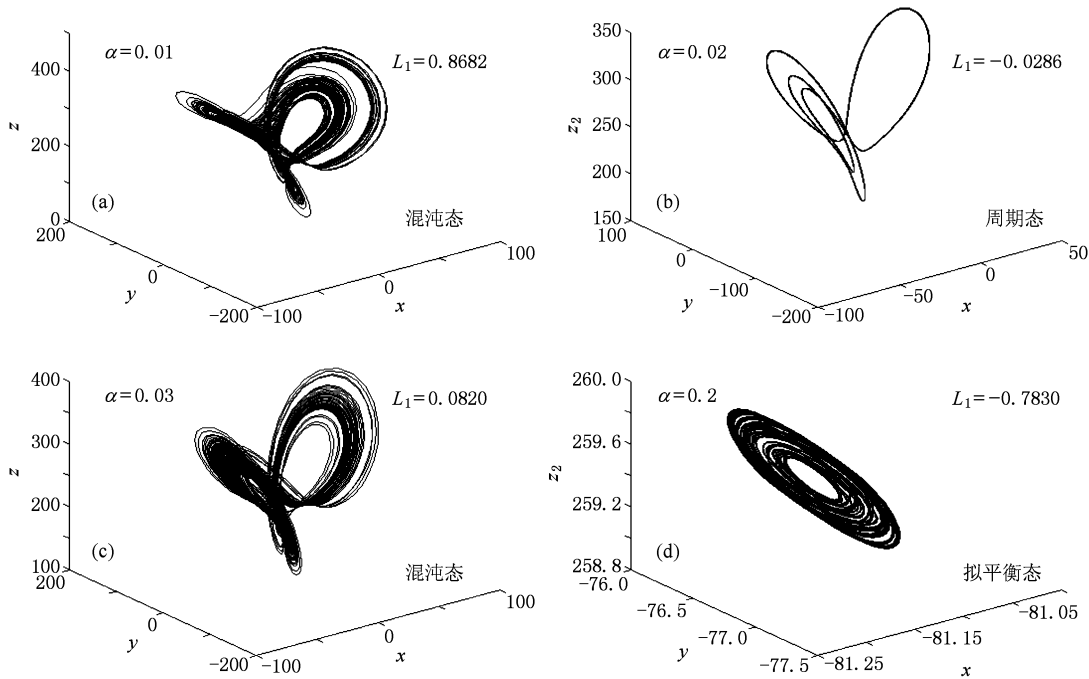


图4 系统(7)的吸引子 (a) $\alpha = 0.01$; (b) $\alpha = 0.02$; (c) $\alpha = 0.03$; (d) $\alpha = 0.2$

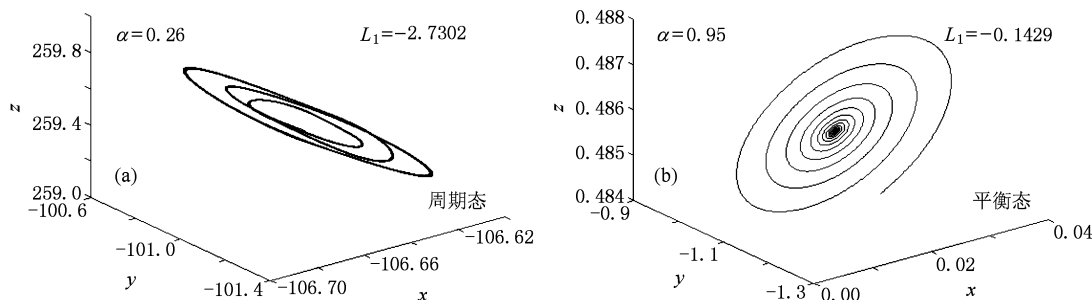


图5 系统(7)的吸引子 (a) $\alpha = 0.26$; (b) $\alpha = 0.95$

4. 结 论

本文利用文献[15]的方法,将两个周期运动下的动力学系统双向耦合达到同步.研究同步后的系统

的动力学行为表明,随着参数的变化系统动力学行为非常丰富,分别呈现混沌态、周期态和平衡态,从而在文献[15]验证了连续动力系统的 Parrondo 悖论现象^[16-18]:“混沌 + 混沌 = 有序”之后,对连续的动力系统又给出了一个“有序 + 有序 = 混沌”的例子.

[1] Schaffer W M 1985 *Ecology* **66** (1) 93

[2] Tufillaro N B, Ramshankar R, Gollub J P 1989 *Phys. Rev. Lett.* **62** 422

[3] Curry J H, Herring J R, Josip Loncaric J, Orszag S A 1984 *Journal of Fluid Mechanics* **147** 1

[4] Imbihl R 2001 *Chin. Phys.* **10** 124

[5] Chen W Q, Hai W H, Li H, Ma Z Y 2007 *Acta. Phys. Sin.* **56** 1305 (in Chinese) [陈文钦、海文华、李 辉、马志英 2007 物理学报 **56** 1305]

[6] Yu S M, Zhang C X 2009 *Acta. Phys. Sin.* **58** 120 (in Chinese) [禹思敏、张朝霞 2009 物理学报 **58** 120]

[7] Danilo P M, Li Y, Yang B J, Yuan Y 2009 *Chin. Phys. B* **18** 958

[8] Bao B C, Hu W, Kang Z S, Xu J 2009 *Acta. Phys. Sin.* **58** 1420 (in Chinese) [包伯成、胡 文、康祝圣、许 建 2009 物理学报 **58** 1420]

[9] Hess B, Mikhailov A 1994 *Science* **264** (5156) 223

[10] Sun Z Q 1992 *Acta. Phys. Sin.* **41** 1987 (in Chinese) [孙宗琦 1992 物理学报 **41** 1987]

[11] Peng J Z, Yu H Z 2008 *Chin. Phys. B* **17** 3143

[12] Hu G S 2009 *Acta. Phys. Sin.* **58** 3734 (in Chinese) [胡国四 2009 物理学报 **58** 3734]

[13] Liu N, Li J F, Wang T S 2009 *Acta. Phys. Sin.* **58** 3772 (in Chinese) [柳 宁、李俊峰、王天舒 2009 物理学报 **58** 3772]

[14] Almeida J, Salasb D P, Romerac M 2005 *Physica D* **200** 124

[15] Xu F D, Luo J G, Liu Z R 2008 *Comm. On Appl. Math. And Comput.* **22** (2) 35 (in Chinese) [徐凤丹、罗吉贵、刘曾荣 2008 应用数学与计算数学学报 **22** (2) 35]

[16] Parrondo J M R, Harmer G P, Abbott D 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 5226

[17] Harmer G P, Abbott D 1999 *Stat. Sci.* **14** 206

[18] Harmer G P, Abbott D 1999 *Nature* **402** 864

An example of realizing “order + order = chaos” via synchronization*

Zhang Rong[†] Xu Zhen-Yuan Yang Yong-Qing

(School of Science, Jiangnan University, Wuxi 214122, China)

(Received 30 September 2009; revised manuscript received 12 May 2010)

Abstract

It was investigated whether the phenomenon of “order + order = chaos” exists for chaotic continuous systems. It was shown that the bidirectional coupling of two ordered continuous dynamics can originate a chaotic dynamics via synchronization. We provide an explicit example of “order + order = chaos” by taking the Lorenz and Rössler systems in their periodic dynamics.

Keywords: chaos, order, coupling, synchronization

PACS: 05.45.Xt, 05.45.Ac

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60875036), the Program for Innovative Research Team of Jiangnan University.

[†] E-mail: ronia62@yahoo.com