

## 有限引导磁场下相对论环形电子注色散特性的研究\*

袁学松<sup>†</sup> 鄢扬 刘盛纲

(电子科技大学物理电子学院太赫兹研究中心, 成都 610054)

(2009年5月3日收到; 2010年4月8日收到修改稿)

采用等效媒质处理方法来研究有限引导磁场下沿纵向运动的相对论环形电子注. 首先建立运动坐标系以电子注纵向速度匀速运动, 在运动坐标系中电子注可以被考虑成静止的磁化等离子体, 再通过四维空间的洛伦兹变换得到电子注在静止的实验室坐标系下可以被等效为双各向异性媒质, 其不仅具有张量形式的电导率和磁导率, 还具有手征特性. 在此基础上同时考虑了由于电子注表面波动所引起的表面电流密度. 采用该方法研究了有限引导磁场下圆柱波导中沿纵向运动的相对论环形电子注, 推导出该模型的色散方程, 并进行了数值计算. 计算结果表明该方法能够得到更准确的信息, 同时还得出对于沿纵向运动的相对论环形电子注, 外部引导磁场可以通过电子注表面电流密度来影响电子注空间电荷波的色散曲线. 因此等效媒质处理方法为研究相对论器件中注波相互作用的热色散关系提供更为准确研究手段, 这对于研究相对论电子学和相对论等离子体物理都是很有意义的.

**关键词:** 相对论环形电子注, 磁化等离子体, 色散特性

**PACS:** 41.20.Jb, 41.75.Ht, 52.35.Hr

## 1. 引言

随着高功率微波的迅速发展, 强流电子枪也得到了快速的发展, 其中高密度相对论电子注也被应用在越来越多的器件中, 如相对论行波管、相对论返波管、相对论电子注等离子体相互作用器件以及自由电子激光等<sup>[1-6]</sup>. 在研究上述器件时, 首先要研究电子注与高频场相互作用的色散特性, 为了简化问题, 在理论研究中一般都假设外部引导磁场无限大, 此时电子注可以被认为是刚性状态而不是流体状态, 电子注的传输在其边界面上也是稳定的<sup>[6-8]</sup>. 而在实验中外部引导磁场不可能为无限大, 因此假设外部引导磁场无限大后再分析电子注与高频场相互作用就会存在误差, 同时为了更准确的分析注波相互作用, 在利用电磁场边值关系推导色散方程过程中, 电子注的表面电流密度也应该予以考虑. 因为在有限引导磁场中, 当电子注受到外部交流小信号调制后, 电子注的稳态传输就会受到扰动, 此时在电子注表面将会产生很小的位移扰动, 这将导致在电子注边界上产生表面电流.

本文针对上述物理问题采用等效媒质处理方

法来研究有限引导磁场下纵向传输的相对论环形电子注. 等效媒质处理方法是建立两套坐标系来研究沿纵向运动的相对论电子注, 在运动坐标系中电子注可以被考虑成静止的磁化等离子体, 通过四维空间的洛伦兹变换得到电子注在静止的实验室坐标系下可以被等效为双各向异性媒质, 其不仅具有张量形式的电导率和磁导率, 还具有手征特性<sup>[9,10]</sup>. 根据等效媒质处理方法推导出电子注中的高频场分量表达式, 再根据流体模型推导出有限引导磁场下相对论环形电子注的表面电流密度表达式, 利用电磁场边值关系得出相关的注波相互作用色散方程. 为了说明这一方法, 文中对圆柱波导中有限引导磁场下相对论环形电子注进行研究. 研究模型的结构如图1所示, 电子注内外半径为  $r_{e1}, r_{e2}$ , 引导磁场为  $B_0$ , 波导半径为  $R$ .

## 2. 有限引导磁场下相对论环形电子注中的高频场分量

对于电子注区域内场的求解, 首先建立运动运动坐标系, 在运动坐标系中, 电子注可以被认为是处于磁化状态的等离子体, 其介电张量可表示为

\* 国家自然科学基金资助(批准号:60877058,10676110), 中央高校基本科研业务费专项资金(批准号:ZYGX2009J048)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: yuan\_xs@163.com

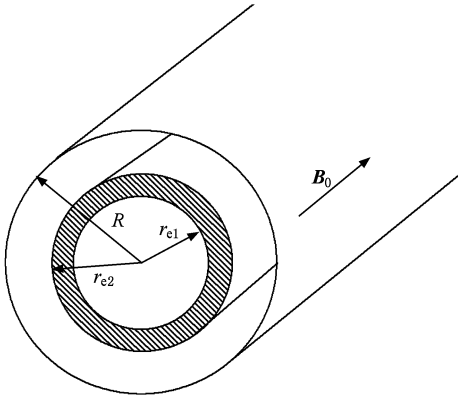


图1 圆柱波导中有限引导磁场下相对论环形电子注

$$[\varepsilon'_b] = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \varepsilon'_{1b} & -j\varepsilon'_{2b} & 0 \\ j\varepsilon'_{2b} & \varepsilon'_{1b} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon'_{3b} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

其中  $\varepsilon'_{1b} = 1 - \frac{\omega_b'^2}{\omega'^2 - \omega_{ce}'^2}$ ,  $\varepsilon'_{2b} = \frac{\omega_b'^2 \omega_{ce}'}{\omega'(\omega'^2 - \omega_{ce}'^2)}$ ,  $\varepsilon'_{3b} = 1 - \frac{\omega_b'^2}{\omega'^2}$ ,  $\omega_b' = \left(\frac{n_b e^2}{\gamma_0 m_e \varepsilon_0}\right)^{1/2}$ ,  $\omega_{ce}' = \frac{e}{m_e} B_0$ .  $\omega_b'$  和  $\omega_{ce}'$  分别表示运动坐标系中电子的等离子体频率和电子的回旋频率,  $\gamma_0$  为相对论因子,  $\omega'$  表示运动坐标系中电磁波的角频率, 利用四维空间的洛伦兹变换可以得到

$$\omega' = \gamma_0(\omega - k_z v_0). \quad (2)$$

根据运动坐标系与实验室坐标系下电磁场变换关系以及在运动坐标系中

$$\mathbf{D}' = [\varepsilon'_b] \cdot \mathbf{E}', \mathbf{B}' = \mu_0 \mathbf{H}', \quad (3)$$

可以推导出

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= [\varepsilon^*] \cdot \mathbf{E} + [\xi_i^*] \cdot \mathbf{H}_i, \\ \mathbf{B} &= [\mu^*] \cdot \mathbf{H} - [\xi_i^*] \cdot \mathbf{E}_i, \end{aligned} \quad (4)$$

其中

$$\begin{aligned} \varepsilon^* &= \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \varepsilon_{1b} & -j\varepsilon_{2b} & 0 \\ j\varepsilon_{2b} & \varepsilon_{1b} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{3b} \end{bmatrix}, \\ \mu^* &= \mu_0 \begin{bmatrix} \mu_{1b} & -j\mu_{2b} & 0 \\ j\mu_{2b} & \mu_{1b} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{3b} \end{bmatrix}, \\ \xi_i^* &= \frac{\beta^2}{v_0} \begin{bmatrix} -j\xi_g & -\xi \\ \xi & -j\xi_g \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$\varepsilon^*$ ,  $\mu^*$ ,  $\xi_i^*$  的具体表达式可参见文献[9]. 由(4)式

可知电子注可以被认是一种双各向异性媒质, 它不仅具有张量形式的介电率和磁导率, 还具有手征特性. 将(4)式代入实验室坐标下的 Maxwell 方程组可以得出纵向场方程为

$$\begin{aligned} \nabla_t^2 \mathbf{E}_z + a^* \mathbf{E}_z &= b^* \mathbf{H}_z, \\ \nabla_t^2 \mathbf{H}_z + c^* \mathbf{H}_z &= d^* \mathbf{E}_z, \end{aligned} \quad (5)$$

其中  $a^*$ ,  $b^*$ ,  $c^*$ ,  $d^*$  的具体表达式可参见文献[9]. 横向场表达式可以由纵向场求得

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_t &= \frac{1}{D^*} \{ -[K^{*2}(jk_z + j\omega\beta^2\xi/v) \\ &\quad - jk_g^{*2}\omega\beta^2\xi_g/v] \nabla_t \mathbf{E}_z \\ &\quad + [K^{*2}\omega\beta^2\xi_g/v - k_g^{*2}(k_z + \omega\beta^2\xi/v)] \mathbf{e}_z \\ &\quad \times \nabla_t \mathbf{E}_z + (K^{*2}\omega\mu_0\mu_{2b} - k_g^{*2}\omega\mu_0\mu_{1b}) \nabla_t \mathbf{H}_z \\ &\quad + j\omega\mu_0(\mu_{1b}K^{*2} - \mu_{2b}k_g^{*2}) \mathbf{e}_z \times \nabla_t \mathbf{H}_z \}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_t &= \frac{1}{D^*} \{ \omega\varepsilon_0(-K^{*2}\varepsilon_{2b} + k_g^{*2}\varepsilon_{1b}) \nabla_t \mathbf{E}_z \\ &\quad - j\omega\varepsilon_0(K^{*2}\varepsilon_{1b} - \varepsilon_{2b}k_g^{*2}) \mathbf{e}_z \times \nabla_t \mathbf{E}_z \\ &\quad - [K^{*2}(jk_z + j\omega\beta^2\xi/v) - jk_g^{*2}\omega\beta^2\xi_g/v] \nabla_t \mathbf{H}_z \\ &\quad + [K^{*2}\omega\beta^2\xi_g/v - k_g^{*2}(k_z + \omega\beta^2\xi/v)] \mathbf{e}_z \\ &\quad \times \nabla_t \mathbf{H}_z \}, \end{aligned} \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} D_e &= K^{*4} - k_g^{*4}, \\ K^{*2} &= [k^2(\varepsilon_{1b}\mu_{1b} + \varepsilon_{2b}\mu_{2b}) \\ &\quad - (k\beta\xi_g)^2 - (k_z + k\beta\xi)^2], \\ k_g^{*2} &= k^2(\varepsilon_{1b}\mu_{2b} + \varepsilon_{2b}\mu_{1b}) \\ &\quad - 2(k_z + k\beta\xi)k\beta\xi_g. \end{aligned}$$

对(5)式进行变换可以得到

$$\begin{aligned} &[\nabla_t^4 + (a^* + c^*) \nabla_t^2 + (a^*c^* - b^*d^*)] \mathbf{E}_z \\ &= 0, \\ &[\nabla_t^4 + (a^* + c^*) \nabla_t^2 + (a^*c^* - b^*d^*)] \mathbf{H}_z \\ &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

方程组(8)的解, 可以表示为  $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$  的线性组合, 即

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_z &= \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2, \\ \mathbf{H}_z &= h_{e1}\mathbf{E}_1 + h_{e2}\mathbf{E}_2, \end{aligned} \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned} &(\nabla_t^2 + p_{e1,2}^2) \mathbf{E}_{1,2} = 0, \\ p_{e1,2}^2 &= \frac{1}{2} \{ (a^* + c^*) \pm [(a^* + c^*)^2 \\ &\quad - 4(a^*c^* - b^*d^*)]^{1/2} \}, \\ h_{e1,2} &= (a^* - p_{e1,2}^2)/b^*. \end{aligned}$$

### 3. 有限引导磁场下相对论环形电子注的表面电流密度

对于相对论环形电子注,将 Lorentz 方程在圆柱坐标系  $(r, \theta, z)$  下展开得

$$\begin{aligned} \gamma \left[ \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] + \frac{d\gamma}{dt} \cdot \frac{dr}{dt} &= \frac{f_r}{m_0}, \\ \gamma \left[ 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right] + r \frac{d\theta}{dt} \frac{d\gamma}{dt} &= \frac{f_\theta}{m_0}, \\ \gamma \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{d\gamma}{dt} \frac{dz}{dt} &= \frac{f_z}{m_0}, \end{aligned} \quad (10)$$

其中

$$\begin{aligned} f_r &= -eE_r - e(r\dot{\theta}B_z - zB_\theta), \\ f_\theta &= -eE_\theta - e(zB_r - rB_z), \\ f_z &= -eE_z - e(rB_\theta - r\dot{\theta}B_r), \end{aligned}$$

$r, r\dot{\theta}$  和  $z$  分别表示电子注在径向,角向和纵向的速度,  $\gamma = 1/\sqrt{1 - (r^2 + r^2\dot{\theta}^2 + z^2)/c^2}$  为相对论因子. 方程组(10)为电子注运动的基本方程,根据其可以推导出有限引导磁场下相对论环形电子注的运动方程.

在有高频信号时,平衡态电子注将受到扰动,其位置坐标将发生变化即

$$\begin{aligned} r &= r_0 + r_1, \\ \theta &= \theta_0 + \theta_1, \\ z &= z_0 + z_1, \\ \gamma &= \gamma_0 + \gamma_1, \end{aligned} \quad (11)$$

此处下标 1 表示扰动量,下标 0 表示直流量,假定扰动量远小于直流量. 将(11)式代入方程组(10),略去二阶及以上扰动量可得

$$\begin{aligned} &\gamma_0 \frac{d^2 r_1}{dt^2} - 2\gamma_0 r_0 \frac{d\theta_0}{dt} \frac{d\theta_1}{dt} - \gamma_1 \gamma_0 \left( \frac{d\theta_0}{dt} \right)^2 \\ &+ \frac{eB_0}{m_0} r_0 \dot{\theta}_1 + \gamma_0 \omega_b^2 [1 - f(r)] r_1 \\ &= -\frac{eE'_{1r}}{m_0}, \\ &2\gamma_0 \frac{dr_1}{dt} \frac{d\theta_0}{dt} + \gamma_0 r_0 \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} + r_0 \frac{d\theta_0}{dt} \frac{d\gamma_1}{dt} \\ &= -\frac{e}{m_0} E'_{1\theta} + \frac{eB_0}{m_0} \frac{dr_1}{dt}, \\ &\gamma_0 \frac{d^2 z_1}{dt^2} + \frac{d\gamma_1}{dt} \frac{dz_0}{dt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{e}{m_0} E'_{1z}, \\ &\gamma_0^3 r_0 r_1 \left( \frac{d\theta_0}{dt} \right)^2 + \gamma_0^3 r_0^2 \frac{d\theta_0}{dt} \frac{d\theta_1}{dt} \\ &+ \gamma_0^3 \frac{dz_0}{dt} \frac{dz_1}{dt} - c^2 \gamma_1 = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

其中

$$\begin{aligned} E'_{1r} &= (E_{1r} + r_0 \dot{\theta}_0 B_{1z} - v_{0z} B_{1\theta}), \\ E'_{1\theta} &= E_{1\theta} + v_{0z} B_{1r}, \\ E'_{1z} &= (E_{1z} + r_1 B_{\theta 0} - r_0 \dot{\theta}_0 B_{1r}), \\ f(r) &= \left( 1 + \frac{v_{0z}^2}{c^2} \right) \left( \frac{r^2 - r_{e1}^2}{r^2} \right). \end{aligned}$$

$f(r)$  表达式中的 1 是考虑电子注空间电荷力影响得到的,而  $\frac{v_{0z}^2}{c^2}$  则是考虑了电子注自身产生的磁场影响得到的.

假定所有变化量以  $\exp[-j(\omega - k_z v_{0z})t]$  变化,则  $\frac{d}{dt} = -j(\omega - k_z v_{0z}) = -j\Delta\omega$ ,  $\frac{d^2}{dt^2} = -\Delta^2\omega$ . 求解方程组(12)得到

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{(m_0 \gamma_0 \Delta\omega Y)} \{ -\Delta\omega f_{1r} + j[(1 - \beta_\perp^2) \\ &\times 2\Omega - \beta_\perp^2 \dot{\theta}_0] f_{1\theta} \\ &- j\beta_\perp \beta_z (\omega_c - \dot{\theta}_0) f_{1z} \}, \end{aligned} \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned} f_{1\theta} &= -eE'_{1\theta}, f_{1r} = -eE'_{1r}, f_{1z} = -e(E_{1z} - \\ &r_0 \dot{\theta}_0 B_{1r}), \beta_\perp = \frac{r_0 \dot{\theta}_0}{c}, \gamma_{0\perp}^2 = \frac{1}{1 - \beta_\perp^2}, \beta_z = \frac{v_{0z}}{c}, Y = \Delta^2\omega \\ &- \omega_b^2 \left[ 1 - \left( 1 + \frac{\beta_\perp \beta_z (\omega_c - \dot{\theta}_0)}{2c(1 + \beta_z^2)} \right) f(r) \right] + \frac{\beta_\perp^2}{(1 - \beta_\perp^2)} \dot{\theta}_0^2 \\ &- \gamma_{0\perp}^2 [\beta_\perp^2 \dot{\theta}_0 - 2(1 - \beta_\perp^2)\Omega]^2, \Omega = \omega_c/2 - \dot{\theta}_0. \end{aligned}$$

根据文献[11]表面电流密度  $J_z$  和  $J_\theta$  可分别写为

$$J_z = \rho_0 r_1 v_{0z}, \quad (14)$$

$$J_\theta = \rho_0 r_1 v_{0\theta} = \rho_0 r_1 (r_0 \dot{\theta}_0), \quad (15)$$

其中  $v_{0z}, v_{0\theta}$  分别表示电子注初始纵向和角向速度.

### 4. 有限引导磁场下相对论环形电子注的色散特性

有限引导磁场下相对论环形电子注的色散方程可以采用场匹配法推导得出. 首先将研究模型在横截面上分解成为三个区域,如图 1. 区域 I ( $0 \leq r$

$\leq r_{e1}$ ) 为真空, 区域 II ( $r_{e1} \leq r \leq r_{e2}$ ) 为电子注, 区域 III ( $r_{e2} \leq r < R$ ) 为真空. 分别求解三个区域的场方程, 再根据边界条件即可导出模型的色散方程. 对于区域 I ( $0 \leq r \leq r_{e1}$ ):

$$E_z^I = A_{1m} J_m(k_c r), \quad (16)$$

$$H_z^I = A_{2m} J_m(k_c r), \quad (17)$$

$$E_\theta^I = \frac{1}{k_c^2} \left[ \frac{k_z m}{r} A_{1m} J_m(k_c r) + j\omega\mu_0 k_c A_{2m} J'_m(k_c r) \right], \quad (18)$$

$$H_\theta^I = \frac{1}{k_c^2} \left[ \frac{k_z m}{r} A_{2m} J_m(k_c r) - j\omega\varepsilon_0 k_c A_{1m} J'_m(k_c r) \right], \quad (19)$$

其中,  $k_c^2 = k^2 - k_z^2$ ,  $J_m(k_c r)$ ,  $J'_m(k_c r)$  分别为  $m$  阶贝赛尔函数和其导数.

对于区域 II ( $r_{e1} \leq r \leq r_{e2}$ ):

$$E_z^{\text{II}} = [A_{3m} J_m(p_{e1} r) + A_{4m} N_m(p_{e1} r) + A_{5m} J_m(p_{e2} r) + A_{6m} N_m(p_{e2} r)], \quad (20)$$

$$H_z^{\text{II}} = [A_{3m} h_{e1} J_m(p_{e1} r) + A_{4m} h_{e1} N_m(p_{e1} r) + A_{5m} h_{e2} J_m(p_{e2} r) + A_{6m} h_{e2} N_m(p_{e2} r)], \quad (21)$$

$$E_\theta^{\text{II}} = \frac{1}{D_e} \left\{ \frac{j m}{r} K_{e1}^2 [A_{3m} J_m(p_{e1} r) + A_{4m} N_m(p_{e1} r) + A_{5m} J_m(p_{e2} r) + A_{6m} N_m(p_{e2} r)] + K_{e2}^2 [A_{3m} p_{e1} J'_m(p_{e1} r) + A_{4m} p_{e1} N'_m(p_{e1} r) + A_{5m} p_{e2} J'_m(p_{e2} r) + A_{6m} p_{e2} N'_m(p_{e2} r)] + \frac{j m}{r} K_{e3}^2 [A_{3m} h_{e1} J_m(p_{e1} r) + A_{4m} h_{e1} N_m(p_{e1} r) + A_{5m} h_{e2} J_m(p_{e2} r) + A_{6m} h_{e2} N_m(p_{e2} r)] + K_{e4}^2 [A_{3m} h_{e1} p_{e1} J'_m(p_{e1} r) + A_{4m} h_{e1} p_{e1} N'_m(p_{e1} r) + A_{5m} h_{e2} p_{e2} J'_m(p_{e2} r) + A_{6m} h_{e2} p_{e2} N'_m(p_{e2} r)] \right\}, \quad (22)$$

$$E_r^{\text{II}} = \frac{1}{D_e} \left\{ \frac{j m}{r} K_{e2}^2 [A_{3m} J_m(p_{e1} r) + A_{4m} N_m(p_{e1} r) + A_{5m} J_m(p_{e2} r) + A_{6m} N_m(p_{e2} r)] + K_{e1}^2 [A_{3m} p_{e1} J'_m(p_{e1} r) + A_{4m} p_{e1} N'_m(p_{e1} r) + A_{5m} p_{e2} J'_m(p_{e2} r) + A_{6m} p_{e2} N'_m(p_{e2} r)] + \frac{j m}{r} K_{e4}^2 [A_{3m} h_{e1} J_m(p_{e1} r) + A_{4m} h_{e1} N_m(p_{e1} r) + A_{5m} h_{e2} J_m(p_{e2} r) + A_{6m} h_{e2} N_m(p_{e2} r)] + K_{e3}^2 [A_{3m} h_{e1} p_{e1} J'_m(p_{e1} r) + A_{4m} h_{e1} p_{e1} N'_m(p_{e1} r) + A_{5m} h_{e2} p_{e2} J'_m(p_{e2} r) + A_{6m} h_{e2} p_{e2} N'_m(p_{e2} r)] \right\}$$

$$+ A_{5m} h_{e2} p_{e2} J'_m(p_{e2} r) + A_{6m} h_{e2} p_{e2} N'_m(p_{e2} r) \Big\}, \quad (23)$$

$$H_\theta^{\text{II}} = \frac{1}{D_e} \left\{ \frac{j m}{r} K_{e5}^2 [A_{3m} J_m(p_{e1} r) + A_{4m} N_m(p_{e1} r) + A_{5m} J_m(p_{e2} r) + A_{6m} N_m(p_{e2} r)] + K_{e6}^2 [A_{3m} p_{e1} J'_m(p_{e1} r) + A_{4m} p_{e1} N'_m(p_{e1} r) + A_{5m} p_{e2} J'_m(p_{e2} r) + A_{6m} p_{e2} N'_m(p_{e2} r)] + \frac{j m}{r} K_{e7}^2 [A_{3m} h_{e1} J_m(p_{e1} r) + A_{4m} h_{e1} N_m(p_{e1} r) + A_{5m} h_{e2} J_m(p_{e2} r) + A_{6m} h_{e2} N_m(p_{e2} r)] + K_{e8}^2 [A_{3m} h_{e1} p_{e1} J'_m(p_{e1} r) + A_{4m} h_{e1} p_{e1} N'_m(p_{e1} r) + A_{5m} h_{e2} p_{e2} J'_m(p_{e2} r) + A_{6m} h_{e2} p_{e2} N'_m(p_{e2} r)] \right\}, \quad (24)$$

$$H_r^{\text{II}} = \frac{1}{D_e} \left\{ \frac{j m}{r} K_{e6}^2 [A_{3m} J_m(p_{e1} r) + A_{4m} N_m(p_{e1} r) + A_{5m} J_m(p_{e2} r) + A_{6m} N_m(p_{e2} r)] + K_{e5}^2 [A_{3m} p_{e1} J'_m(p_{e1} r) + A_{4m} p_{e1} N'_m(p_{e1} r) + A_{5m} p_{e2} J'_m(p_{e2} r) + A_{6m} p_{e2} N'_m(p_{e2} r)] + \frac{j m}{r} K_{e8}^2 [A_{3m} h_{e1} J_m(p_{e1} r) + A_{4m} h_{e1} N_m(p_{e1} r) + A_{5m} h_{e2} J_m(p_{e2} r) + A_{6m} h_{e2} N_m(p_{e2} r)] + K_{e7}^2 [A_{3m} h_{e1} p_{e1} J'_m(p_{e1} r) + A_{4m} h_{e1} p_{e1} N'_m(p_{e1} r) + A_{5m} h_{e2} p_{e2} J'_m(p_{e2} r) + A_{6m} h_{e2} p_{e2} N'_m(p_{e2} r)] \right\}, \quad (25)$$

其中,  $N_m(k_c r)$ ,  $N'_m(k_c r)$  分别表示诺依曼函数及其导数,

$$K_{e1}^2 = -j [K_e^2 (k_z + k\beta\xi) - k_e^2 k\beta\xi_g],$$

$$K_{e2}^2 = K_e^2 k\beta\xi - k_e^2 (k_z + k\beta\xi),$$

$$K_{e3}^2 = (\mu_0 c) (K_e^2 \mu_{2b} - k_e^2 \mu_{1b}) k,$$

$$K_{e4}^2 = (j\mu_0 c) (K_e^2 \mu_{1b} - \mu_{2b} k_e^2) k,$$

$$K_{e5}^2 = \left( \frac{1}{\mu_0 c} \right) (k_e^2 \varepsilon_{1b} - K_e^2 \varepsilon_{2b}) k,$$

$$K_{e6}^2 = \left( \frac{1}{\mu_0 c} \right) k (K_e^2 \varepsilon_{1b} - k_e^2 \varepsilon_{2b}),$$

$$K_{e7}^2 = -j [K_e^2 (k_z + k\beta\xi) - k_e^2 k\beta\xi_g],$$

$$K_{e8}^2 = K_e^2 k\beta\xi_g - k_e^2 (k_z + k\beta\xi).$$

对于区域 III ( $r_{e2} \leq r < R$ ):

$$E_z^{\text{III}} = [A_{7m} J_m(k_c r) + A_{8m} N_m(k_c r)], \quad (26)$$

$$H_z^{\text{III}} = [A_{9m} J_m(k_c r) + A_{10m} N_m(k_c r)], \quad (27)$$

$$E_{\theta}^{\text{III}} = \frac{1}{k_c^2} \{ (k_z m/r) [A_{7m} J_m(k_c r) + A_{8m} N_m(k_c r)] + j\omega\mu_0 k_c [A_{9m} J'_m(k_c r) + A_{10m} N'_m(k_c r)] \}, \quad (28)$$

$$H_{\theta}^{\text{III}} = \frac{1}{k_c^2} \{ (k_z m/r) [A_{9m} J_m(k_c r) + A_{10m} N_m(k_c r)] - j\omega\varepsilon_0 k_c [A_{7m} J'_m(k_c r) + A_{8m} N'_m(k_c r)] \}. \quad (29)$$

得到各个区域的场分量表达式后,利用电磁场在边界上匹配关系

$$\hat{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0, \quad (30)$$

$$\hat{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{J}_{\theta} + \mathbf{J}_z, \quad (31)$$

下标 1,2 分别表示边界的两边,  $\hat{n}$  为边界的法向单位矢量. 对于研究的沿纵向传输的电子注其  $r_0 \dot{\theta}_0 \ll v_{0z}$ , 因此可以忽略  $J_{\theta}$  影响. 根据(14)式以及相关的场方程表达式,  $J_z$  最终可简化为

$$J_z(r) = A_{3m} J_{z1}^{\text{II}}(r) + A_{4m} J_{z2}^{\text{II}}(r) + A_{5m} J_{z3}^{\text{II}}(r) + A_{6m} J_{z4}^{\text{II}}(r), \quad (32)$$

其中  $J_{z1}^{\text{II}}(r), J_{z2}^{\text{II}}(r), J_{z3}^{\text{II}}(r), J_{z4}^{\text{II}}(r)$  的推导是先将高频场方程代入(13)式再代入(14)式得出. 由方程(30), (31)可以得到以下边界条件:

$$r = R : E_z^{\text{III}} = 0, E_{\theta}^{\text{III}} = 0, \quad (33)$$

$$r = r_{e2} : E_z^{\text{II}} = E_z^{\text{III}}, E_{\theta}^{\text{II}} = E_{\theta}^{\text{III}}, H_z^{\text{II}} = H_z^{\text{III}}, H_{\theta}^{\text{II}} + J_z(r_{e2}) = H_{\theta}^{\text{III}}, \quad (34)$$

$$r = r_{e1} : E_z^{\text{I}} = E_z^{\text{II}}, E_{\theta}^{\text{I}} = E_{\theta}^{\text{II}}, H_z^{\text{I}} = H_z^{\text{II}}, H_{\theta}^{\text{I}} = H_{\theta}^{\text{II}} - J_z(r_{e1}). \quad (35)$$

根据方程(33—35)可以得到以  $[A_{1m}, A_{2m}, \dots, A_{10m}]$  为未知数的线性方程组<sup>[12]</sup>, 因此要使  $[A_{1m}, A_{2m}, \dots, A_{10m}]$  有非零解, 则其系数行列式值必需等于零, 即

$$\begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,10} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,10} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{10,1} & b_{10,2} & \cdots & b_{10,10} \end{vmatrix} = 0, \quad (36)$$

(36)式即为波导中有限引导磁场相对论环形电子注的色散方程.

在数值计算中为了“避免大数吃小数”现象的出现. 首先要对各物理量进行归一化处理, 各物理量归一化的表达式如下:

$$\bar{R} = R/R_0, \bar{\omega} = \omega R_0/c, \bar{k} = kR_0, \bar{k}_z = k_z R_0,$$

$$\begin{aligned} \bar{k}_c &= k_c R_0, \bar{k}_b = k_b R_0, \\ \bar{v}_{0\theta} &= v_{0\theta}/c, \bar{v}_{0z} = v_{0z}/c, \\ \bar{\omega}_b &= \omega_b R_0/c, \end{aligned} \quad (37)$$

其中,  $R_0$  为长度归一化因子,  $v_{0\theta}, v_{0z}$  分别为电子注的角向和纵向初速度,  $c$  为光速. 利用相关矩阵运算软件对色散方程进行计算并绘制色散特性曲线图, 数值计算中采用的参数为  $r_{e1} = 5 \text{ mm}, r_{e2} = 7 \text{ mm}, R = 18 \text{ mm}$ .

为了比较不同方法计算的电子注的色散关系, 首先考虑磁场为无限大时的情况. 在这一情况下  $\varepsilon'_{2b} = 0$  即  $b^* = d^* = 0$ , 此时角向对称的 TM 模可以单独存在. 考虑  $\text{TM}_{0n}$  模, 色散方程由  $10 \times 10$  的行列式化简为  $5 \times 5$  的行列式, 这与采用流体模型得到的色散方程是一致的<sup>[11]</sup>. 数值计算结果如图 2 所示, 其中电子注电流为 10 kA, 电子注能量为 100 kV. 图中光速线(图中虚线)以上的曲线表示的为波导  $\text{TM}_{0n}$  模, 光速线以下的曲线为电子注的空间电荷波.

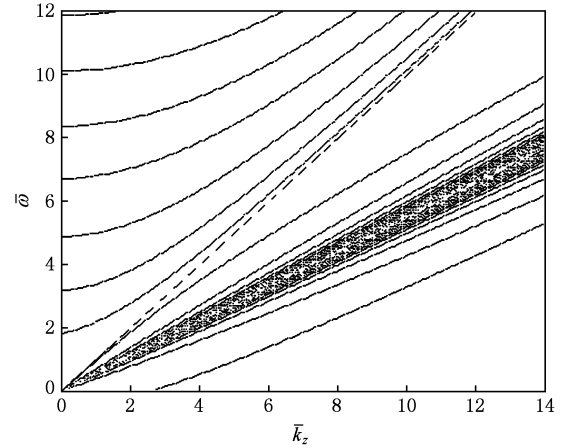


图2 磁场无限大情况下波导中相对论环形电子注的色散曲线图

在考虑磁场有限的情况时, 首先计算不考虑电子注表面电流密度的色散方程, 计算结果如图 3 所示. 由图可知当引导磁场为 1T 时, 波导模式以 TE 模和 TM 模的耦合模式存在, 此时在色散图中出现了电子注的回旋模式曲线, 曲线组(1)为空间电荷波; 曲线(2)为波导  $\text{EH}_{02}$  模, 其下依次为  $\text{HE}_{01}, \text{EH}_{01}$  模, 其上依次为  $\text{HE}_{02}, \text{EH}_{03}, \text{HE}_{03}$  模等; 曲线组(3)为电子注回旋波, 它包括快慢回旋波; 曲线(4)为  $p_{e1}^2 = p_{e2}^2$  线; 曲线(5)为  $D_e = 0$  线, 它位于曲线(4)两侧共四根. 当引导磁场为 2T 时, 由图可知随着磁场的增强回旋模式与空间电荷波间距离也有所加大.

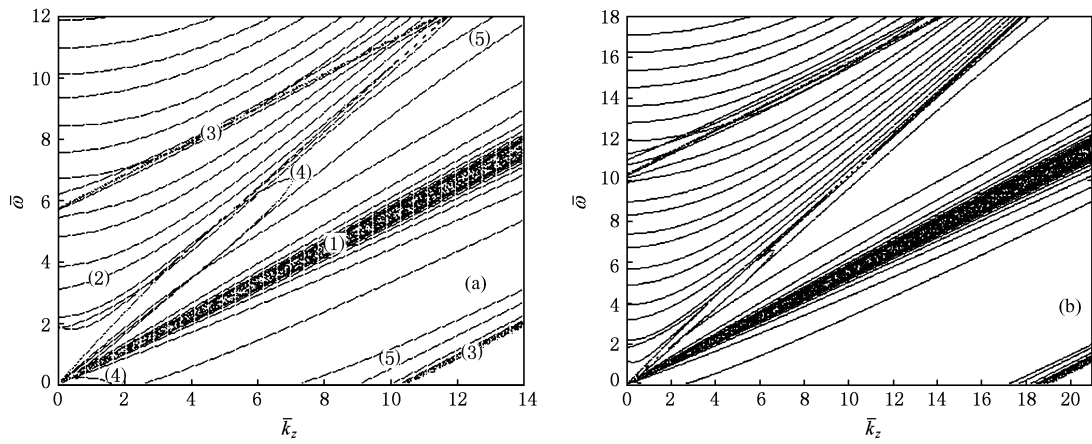


图3 不考虑表面电流时圆柱波导中有限引导磁场下相对论环形电子注入色散曲线图 (a)  $B=1\text{ T}$ ; (b)  $B=2\text{ T}$

考虑电子注表面电流密度的计算结果如图4所示. 比较图3和图4可以知在考虑电子注表面电流密度后, 电子注空间电荷波的色散曲线开始出现不连续性, 一次快空间电荷波与二次快空间电荷波发生了耦合, 同时二次快空间电荷波与三次

快空间电荷波也发生了耦合, 此时电子注将不能稳定传输. 而当磁场增加到2T时, 此时该耦合就会明显减小, 其原因是电子注中回旋模式与空间电荷波的间距加大了, 其对空间电荷波的影响减小了.

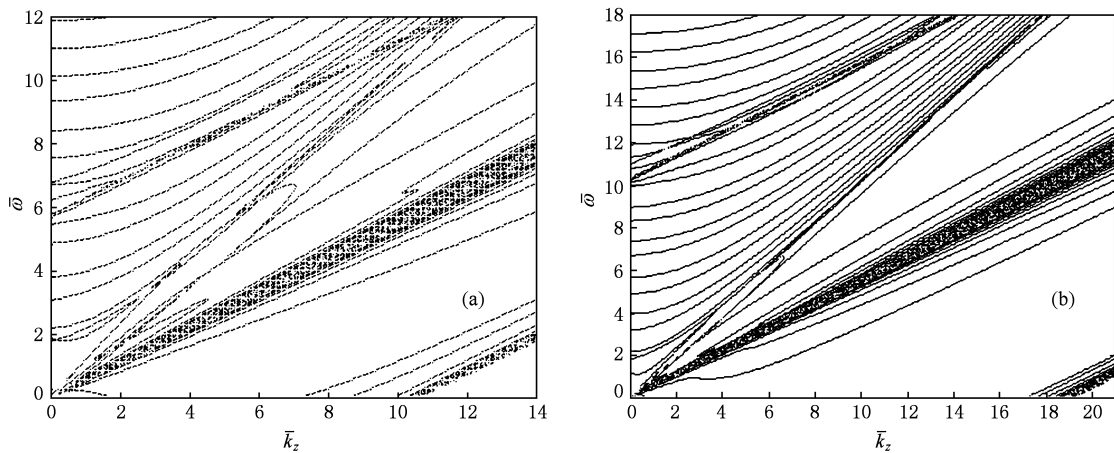


图4 考虑表面电流时圆柱波导中有限引导磁场下相对论环形电子注入色散曲线图 (a)  $B=1\text{ T}$ ; (b)  $B=2\text{ T}$

因此对于波导中的强流相对论环形电子注, 其外部纵向引导磁场是可以通过电子注表面电流来影响其空间电荷波的色散曲线. 同时还可以看到采用等效媒质方法来研究电子注要比其他一些处理方法更为准确, 能够得到更多信息.

### 5. 结 论

本文采用等效媒质处理方法来研究有限引导磁场下沿纵向运动的相对论环形电子注, 推导出的有限引导磁场下相对论环形电子注中的场分量表

达式以及电子注表面电流密度表达式是具有普适性的, 可以用于分析多种器件中的注波相互作用, 包括相对论行波管、相对论电子注等离子体相互作用、EIO以及自由电子激光等. 利用该处理方法得到的注波相互作用的热色散方程是考虑了外部引导磁场的. 文中对圆柱波导中有限引导磁场下相对论环形电子注入色散特性的计算结果表明外部引导磁场是能够影响电子注空间电荷波的色散曲线. 因此等效媒质处理方法对于研究相对论电子学和相对论等离子体物理以及研制相关器件都具有重要意义.

- [1] Birau M 1996 *Phys. Rev. E* **54** 5 5599 (in Chinese)[ 谢鸿全、李承跃、鄢 扬、刘盛纲 2003 物理学报 **52** 914 ]
- [2] Loga O T, Shelvarunets A E, Strelkov P S 1998 *IEEE Trans. Plasma Sci.* **26** 3 615
- [3] Nusinovich G S, Carmel Y, Thomas M A, Goebel D M, Santoru J 1998 *IEEE Trans. Plasma Sci.* **26** 628
- [4] Chen L M, Guo H Z, Chen H Y 2000 *IEEE Trans. Plasma Sci.* **28** 626
- [5] Gunin A V, Klimov A I 1998 *IEEE Trans. Plasma Sci.* **26** 326
- [6] Benford J, Swegle J 1992 USA: Artech House Inc
- [7] Gao H, Liu S G 2000 *Chin. Phys. Soc.* **9** 274
- [8] Xie H Q, Li C Y, Yan Y, Liu S G 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 914
- [9] Liu S G, Yan Y, Mao J, Manos D M 2002 *Phys. Rev. E* **65** 3 036411
- [10] Liu S G, Wei Y Y, Yuan X S, Yan Y 2007 *J. Appl. Phys.* **101** 053309
- [11] Rigrod W W, Lewis J A 1954 *Bell System Technical Journal* **33** 399
- [12] Li W, Wei Y Y, Xie H Q, Liu S G, Gong M L 2003 *Chin. Phys. Soc.* **12** 1009

## Study on the dispersion relations of a relativistic annular electron beam guided by a finite axial magnetic field\*

Yuan Xue-Song<sup>†</sup> Yan Yang Liu Sheng-Gang

(Terahertz Research Center, College of Physical Electronics, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054, China)

(Received 31 May 2009; revised manuscript received 8 April 2010)

### Abstract

The relativistic annular electron beam guided by a finite axial magnetic field is studied in this paper, in which the electron beam is considered as a special media. Making use of the constitutive transformation and the Lorentz transformation in the four-dimensional space, the permittivity tensor of the stationary magnetized plasma, the permittivity tensor, the permeability tensor and the chiral tensor of the electron beam in the rest (laboratory) frame are acquired. And the boundary conditions, including the surface current density due to the ripple of the beam, have been obtained. As an example of the applications of this approach, the dispersion relations of a relativistic annular electron beam guided by a finite axial magnetic field in a waveguide has been studied. The results of numerical calculation show that the present approach is more accurate and can provide clearer mode information for the electron beam. In addition, the results also show the axial magnetic field can affect the dispersion curves of space charge wave via the surface current density of an electron beam. Thus this approach can be exploited in a number of electron beam-wave interaction systems, including some kinds of free electron devices, plasma filled Cherenkov radiated free electron lasers and masers.

**Keywords:** relativistic annular electron beam, magnetized plasma, dispersion relations

**PACS:** 41.20.Jb, 41.75.Ht, 52.35.Hr

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 60877058, 10671110), the Fundamental Research Funds for the Central Universities (Grant No. ZYGX2009J048).

<sup>†</sup> E-mail: yuan\_xs@163.com