

# 拉盖尔-高斯光束在湍流大气中的螺旋谱特性\*

黎芳<sup>†</sup> 唐华 江月松 欧军

(北京航空航天大学电子信息工程学院, 北京 100191)

(2009年12月21日收到; 2010年3月12日收到修改稿)

研究了拉盖尔-高斯光束在湍流大气中的传输特性. 在利托夫近似下, 得到接收孔径处光束的螺旋谱的积分表达式. 通过数值仿真得出大气湍流对光束螺旋谱的影响以及光束螺旋谱随各参数值的变化特性. 仿真发现大气湍流会使螺旋谱发生弥散. 而且随着拓扑荷, 接收孔径半径, 折射率结构函数及距离的增加, 螺旋谱弥散加剧. 经拟合得到描述螺旋谱弥散程度的无量纲方差  $V$  随距离成 6 次函数关系; 与接收孔径半径及折射率结构函数成二项式关系; 而与拓扑荷呈 11 次多项式关系. 最后得出径向指数, 束腰半径对螺旋谱的影响非常小, 并且根据此结论推出光束螺旋谱的解析表达式. 经证实此式得出的结论与上述数值仿真结果相同.

**关键词:** 拉盖尔-高斯光束, 大气湍流, 螺旋谱, 无量纲方差

**PACS:** 42.25.Dd, 42.68.Bz, 42.50.Ar, 42.60.Jf

## 1. 引言

1992年, Allen等发现带有相位因子  $\exp(im\theta)$  的光束中每个光子具有  $hm$  的轨道角动量<sup>[1]</sup>, 此后光束的轨道角动量得到极大的关注与重视. 该类具有轨道角动量的光束被称为涡旋光束. 产生该类光束的方法主要有: 螺旋相位板法, 棱镜转换法和计算全息法<sup>[2-4]</sup>, 近年来也见利用光纤来产生涡旋光束的报道<sup>[5]</sup>. 为了可以清楚地阐明光束的轨道角动量成分, Molina-Terriza 将光束展开成螺旋谐波函数  $\exp(im\theta)$  的线性叠加, 便形成了螺旋谱<sup>[6]</sup>. 目前光束轨道角动量已经在光学微操纵、生物医学、量子信息编码、光学信息传输等领域<sup>[7-13]</sup> 得到了广泛的应用.

从理论上来说轨道角动量数(或称拓扑荷)  $m$  为任意整数, 可以构成无穷维希尔伯特空间<sup>[14]</sup>, 因此相对于传统的二进制编码, 光束的轨道角动量编码能够有效地提高数据传输容量. 在文献[11]中提出利用轨道角动量进行自由空间信息传输的方案, 光束的拓扑荷直接表示所需传送的信息, 此方案不但可以提高通信系统的容量, 还具有防窃听的优

点. 因此涡旋光束的传输特性及其在空间光通信上的应用已引起国内外学者的广泛关注和研究. 已经有研究人员研究了不同类型的涡旋光束在自由空间中的传输特性<sup>[15-17]</sup>, 一些文献给出了涡旋光束经过不同光学系统时的传输情况<sup>[18-20]</sup>, 还有一些相关研究成果<sup>[21-23]</sup> 都有助于涡旋光束及其传输特性的研究.

然而在实际应用中, 大气湍流会引起光波强度的波动, 误码率的增加和通信系统信道容量的降低<sup>[24-26]</sup>. 因此掌握具有轨道角动量的光束在湍流大气中的传输特性对大容量光通信的研究具有重要意义. 目前, 已有一些关于大气湍流对涡旋光束影响的相关报道<sup>[27, 28]</sup>, 然而, 它们都只是从仿真上进行模拟, 没有得到表达式. 虽然也有一些论文得到了涡旋光束经大气湍流传输的强度的表达式<sup>[29, 30]</sup>. 但是, 当涡旋光束应用于通信上时, 重要的是其轨道角动量特性. 因此本文研究的是涡旋光束在大气湍流作用时的轨道角动量特性. 在利托夫近似下, 得到涡旋光束在弱湍流大气中的螺旋谱特性. 最后利用仿真得到的结论推导出螺旋谱的解析表达式.

\* CAST 创新基金和北京航空航天大学博士研究生创新基金(批准号:292129)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: cubbybuaa@gmail.com

## 2. 理论分析

拉盖尔-高斯光束(Laguerre-Gaussian, LG)光束是涡旋光束中最典型的例子,也是现实中比较容易实现的一种涡旋光束.其电场表达式为<sup>[1, 31]</sup>

$$u_0(r, \theta, z) = A \frac{w_0}{w} \exp\left[-\frac{r^2}{w^2(z)}\right] \left[\frac{\sqrt{2}r}{w(z)}\right]^s \times L_p^s\left[\frac{2r^2}{w^2(z)}\right] \exp(is\theta) \times \exp\left\{i(2p + s + 1)\tan^{-1}\left(\frac{z}{z_0}\right) - i\left[\frac{r^2}{w^2(z)}\right]\left(\frac{z}{z_0}\right) + ikz\right\}, \quad (1)$$

其中,  $w(z) = w_0 \sqrt{1 + (z/z_0)^2}$ ,  $w_0$  为束腰半径,  $z_0$  为瑞利距离,  $s$  为拓扑荷,  $p$  为径向指数,  $L_p^s$  为连带拉盖尔多项式,  $A$  为归一化常数.

在利托夫(Rytov)近似下,穿过弱湍流大气,在距离  $z$  处的接收孔径接收到的光场可以表示为<sup>[24, 32]</sup>

$$u(r, \theta, z) = W\left(\frac{r}{R}\right) u_0(r, \theta, z) \times \exp[\psi(r, \theta, z)], \quad (2)$$

其中,  $W(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$ ,  $x \geq 0, R$  为接收孔径的半径.

为了更好地阐明轨道角动量的成分, Molina-Terriza 等人<sup>[6]</sup>将光束展开成螺旋谐波函数  $\exp(im\theta)$  的线性叠加,便形成轨道角动量谱,也称为螺旋谱.将任意光场分布按螺旋谱谐波展开,这样可以得到

$$u(r, \theta, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m(r, z) \exp(im\theta), \quad (3)$$

其中,  $a_m(r, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} u(r, \theta, z) \exp(-im\theta) d\theta$ .

因此光束的能量可以写成  $U = 2\varepsilon_0 \sum_{-\infty}^{\infty} C_m$ , 而  $C_m = \int_0^{\infty} |a_m(r, z)|^2 r dr$ , 则可求得螺旋谱为  $P_m = \frac{C_m}{\sum_{q=-\infty}^{\infty} C_q}$ .  $p = 0, s = 1$  时光束的螺旋谱分布如图1所示.图中横轴  $m$  表示各谐波分量的拓扑荷数,纵轴  $P$  为各分量对应的相对能量.

于是,按照螺旋谱的定义式得到

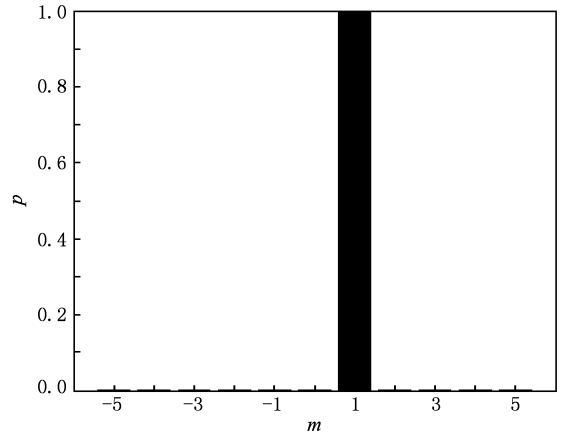


图1 LG光束( $p=0, s=1$ )的螺旋谱分布

$$|a_m(r, z)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r, \theta_1, z) \exp(-im\theta_1) \times u^*(r, \theta_2, z) \exp(im\theta_2) d\theta_1 d\theta_2 = \frac{A^2}{2\pi} \frac{w_0^2}{w^2(z)} W\left(\frac{r}{R}\right) \left[\frac{2r^2}{w^2(z)}\right]^s \times \left\{L_p^s\left[\frac{2r^2}{w^2(z)}\right]\right\}^2 \exp\left[\frac{-2r^2}{w^2(z)}\right] \times \int_0^{2\pi} \langle \exp[\psi(r, \theta_1, z) + \psi^*(r, \theta_2, z)] \rangle \times \exp[i(s-m)(\theta_1 - \theta_2)] d\theta_1 d\theta_2, \quad (4)$$

其中

$$\langle \exp[\psi(\mathbf{r}_1, z) + \psi^*(\mathbf{r}_2, z)] \rangle = \exp\left[-\frac{1}{2} D_\psi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\right] = \exp\left[-\frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2}{\rho_0^2}\right], \quad (5)$$

式中,  $D_\psi$  为相位结构函数,  $\rho_0 = (0.545 C_n^2 k^2 z)^{-3/5}$  为球面波在湍流介质中传输时的相干长度,  $C_n^2$  为折射率结构常数, 表征湍流的强弱. 这里利托夫相位结构函数采用了二次方近似<sup>[33]</sup>.

利用贝赛尔函数的性质  $\exp(x \cos\theta) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} i^l I_l(x) e^{il\theta}$ <sup>[34]</sup>, 可以得到

$$|a_m(r, z)|^2 = \frac{A^2 w_0^2}{w^2(z)} W\left(\frac{r}{R}\right) \left[\frac{2r^2}{w^2(z)}\right]^s \left\{L_p^s\left[\frac{2r^2}{w^2(z)}\right]\right\}^2 \times \exp\left[\frac{-2r^2}{w^2(z)} - \frac{2r^2}{\rho_0^2}\right] I_{s-m}\left(\frac{2r^2}{\rho_0^2}\right), \quad (6)$$

其中  $I_{s-m}$  为  $s-m$  阶修正贝赛尔函数.

则螺旋谱的积分表达式为

$$P_m = \frac{C_m}{\sum_{q=-\infty}^{\infty} C_q}, \quad (7)$$

其中

$$C_m = \frac{A^2 w_0^2}{w^2(z)} \int_0^R \left[ \frac{2r^2}{w^2(z)} \right]^s \left\{ I_p^s \left[ \frac{2r^2}{w^2(z)} \right] \right\}^2 \times \exp \left[ -\frac{2r^2}{w^2(z)} - \frac{2r^2}{\rho_0^2} \right] I_{m-s} \left( \frac{2r^2}{\rho_0^2} \right) r dr.$$

### 3. 仿真分析

按照(7)式,取各参数值如下:  $C_n^2 = 1 \times 10^{-15} \text{ m}^{-2/3}$ ,  $\lambda = 0.632 \text{ nm}$ ,  $R = 2 \text{ cm}$ ,  $w_0 = 1 \text{ cm}$ ,  $s = 1$ ,  $p = 0$ . 因为  $s$  为负时只是改变螺旋相位面的旋转方向,不影响螺旋谱的性质,所以本文取  $s > 0$ . 仿真得出在湍流大气中传输的 LG 光束的螺旋谱各分量随距离  $z$  的变化,如图2所示. 可以看出,由于湍流的影响,使得光束的螺旋谱发生弥散,而且,随着距离越大,光束  $s$  分量的损耗越大,螺旋谱弥散现象越明显,逐渐趋于均匀分布. 注意到螺旋谱始终关于  $m = s$  分量对称分布.

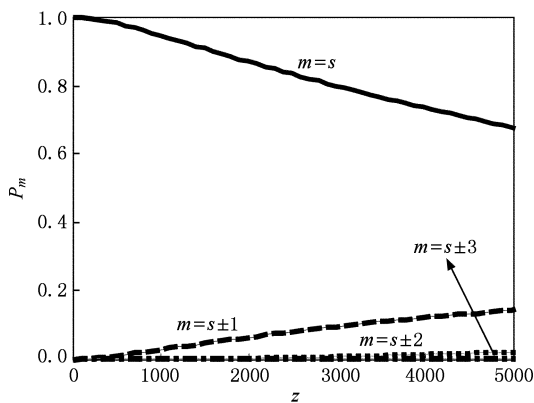


图2 螺旋谱各分量随距离的变化

为了方便地研究光束的轨道角动量特性和螺旋谱的弥散程度. 我们引入 Zambrini 等人定义的无量纲方差<sup>[35]</sup>

$$V = \frac{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} P_m (m - \bar{m})^2}{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} P_m m^2 - \left( \sum_{m=-\infty}^{+\infty} P_m m \right)^2}, \quad (8)$$

其中  $\bar{m}$  为螺旋谱分布的平均值. 对于一束不受干扰的 LG 光,  $V=0$ . 当螺旋谱发生弥散时,  $V>0$ , 而且弥散程度越大,  $V$  值越大. 仿真得到  $V$  值越大说明光束

受湍流的影响越大.

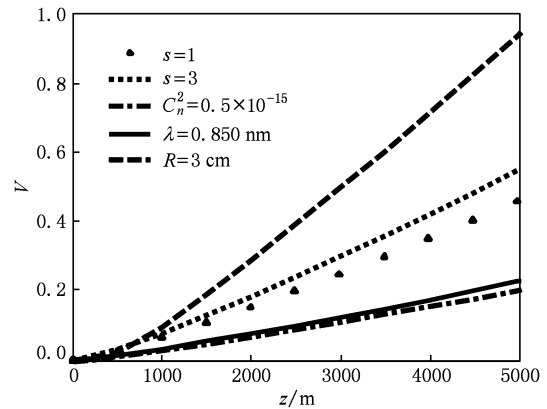


图3 无量纲方差随距离  $z$  的变化

图3所示为不同参数(波长  $\lambda$ , 折射率结构函数  $C_n^2$ , 接收孔径半径  $R$ , 拓扑荷  $s$ )下,无量纲方差  $V$  随距离  $z$  的变化. 可以看出  $V$  与  $z$  呈6次函数关系. 其中,参数取值与图2螺旋谱相同(三角形表示)的拟合式为

$$V = 1.1444 \times 10^{-22} z^6 - 1.9824 \times 10^{-18} z^5 + 1.3603 \times 10^{-14} z^4 - 4.7119 \times 10^{-11} z^3 + 8.9768 \times 10^{-8} z^2 + 1.8614 \times 10^{-6} z - 1.387 \times 10^{-4}.$$

由图可知,波长  $\lambda$  的减小,折射率结构函数  $C_n^2$ , 接收孔径半径  $R$  以及拓扑荷  $s$  的增加都会引起  $V$  增加,即受湍流的影响越大. 文献[24]得到结论:相位波动与  $r/r_0$  (光束半径和 Fried 参数之比)的大小有关,当  $r/r_0$  值小时,相位波动很小,且随着  $r/r_0$  的增加,相位波动增加,因此光功率越往轴心集中,光束受到的影响较小. 由此解释了接收孔径  $R$  越大,光束受到的干扰越大. 而  $\lambda$  的减小,  $C_n^2$  和距离  $z$  的增加会引起  $V$  增加,这是因为三者都会引起  $r_0$  的减小,因此光束受到的相位波动增加,对光束螺旋谱的影响越大. 拓扑荷  $s$  增加,集中在光轴的功率越少,因此光束受湍流影响越大.

图4分别为  $z=5 \text{ km}$  时  $V$  随  $s, R$  和  $C_n^2$  的变化曲线.  $V$  与  $C_n^2$  和  $R$  的关系为二次函数. 拟合式分别为

$$V = 1.1005 \times 10^{29} (C_n^2)^2 + 3.5869 \times 10^{14} C_n^2 - 0.0078$$

和

$$V = 1110.9921 R^2 + 2.5044 R - 0.0118.$$

而  $V$  和  $s$  的关系拟合式为最高阶次为 11 的多项式

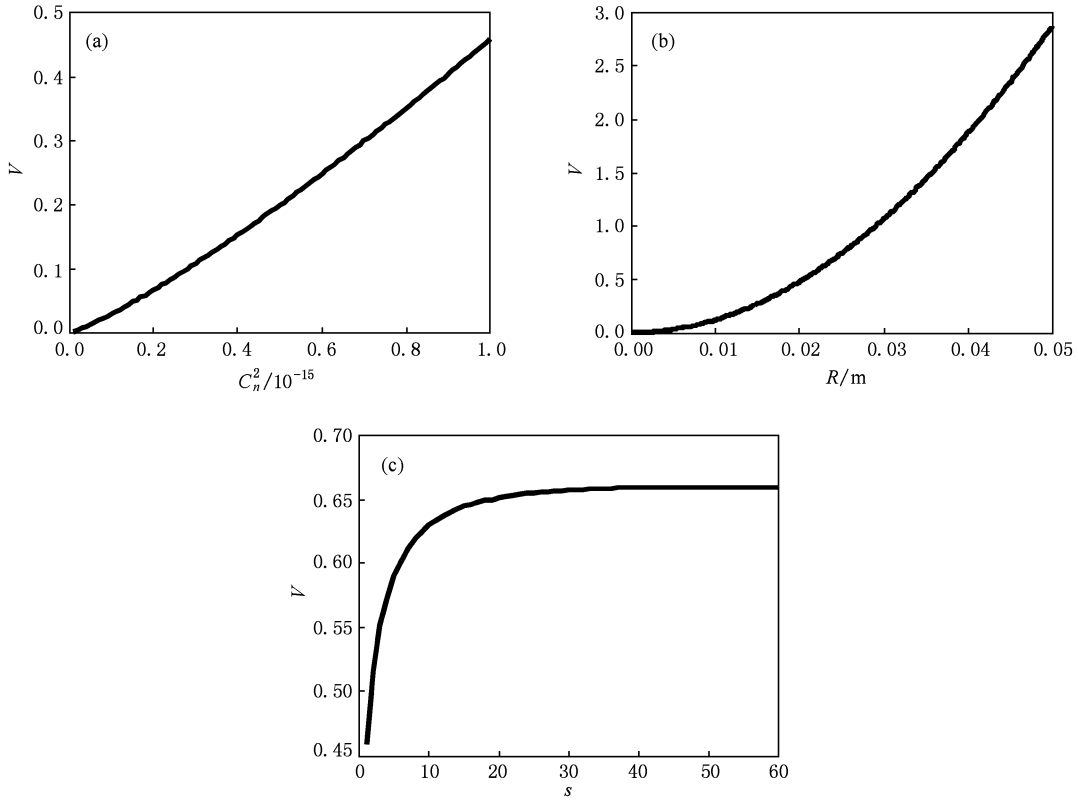


图4 无量纲方差与(a)折射率结构函数  $C_n^2$ , (b)接收孔径半径  $R$ , (c)拓扑荷  $s$  的关系

$$\begin{aligned}
 V = & 4.6765 \times 10^{-17} s^{11} - 1.6777 \times 10^{-14} s^{10} \\
 & + 2.6405 \times 10^{-12} s^9 - 2.3971 \times 10^{-10} s^8 \\
 & + 1.3886 \times 10^{-8} s^7 - 5.3648 \times 10^{-7} s^6 \\
 & + 1.4043 \times 10^{-5} s^5 - 0.0002 s^4 + 0.0029 s^3 \\
 & - 0.0222 s^2 + 0.1052 s + 0.3733.
 \end{aligned}$$

即使改变其他参数的值,  $V$  值与各参数间的二次函数和 11 次函数的关系不变, 只是多项式的系数有所不同. 本文在计算螺旋谱随距离, 接收孔径半径和折射率结构函数变化时, 即使在螺旋谱弥散程度最大 ( $z=5 \text{ km}, R=3 \text{ cm}, C_n^2=1 \times 10^{-15} \text{ m}^{-2/3}$ ) 的时候,  $m=50$  分量的相对能量才为  $10^{-75}$  数量级, 则分布到更高阶分量上的能量更小, 因此  $m$  取值为  $[-50, 50]$  即可, 此时引起的计算误差非常小. 而当计算螺旋谱随拓扑荷变化时,  $m$  取值为  $[-150, 150]$  就足够, 因为即使螺旋谱弥散最严重 (即  $s=60$ ) 时,  $m=150$  分量的相对能量几乎为零.

另外经仿真得到径向指数  $p$  和光束束腰半径  $w_0$  的改变几乎不影响螺旋谱的分布. 于是可以在 (7) 式中取  $p=0$ , 则  $L_p^s(2r^2/w^2)=1$ . 然后把修正贝

赛尔函数以级数形式表示  $I_v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (x/2)^{v+2n}/n!$  ( $v+n$ )!. 并利用指数的积分式<sup>[34]</sup>

$$\int_0^u x^n e^{-\mu x} dx = \mu^{-n-1} \gamma(n+1, \mu u),$$

( $u > 0, \text{Re} \mu > 0, n = 0, 1, 2, \dots$ ), (9)

得到

$$\begin{aligned}
 C'_m = & \frac{A^2 w_0^2 2^s r_0^{2(s+1)}}{w^{2(s+1)}(z)} \\
 & \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma\left(m+2n+1, \frac{2R^2}{w^2(z)} + \frac{2R^2}{\rho_0^2}\right)}{n!(m+n-s)! \left[2 + \frac{2\rho_0^2}{w^2(z)}\right]^{m+2n+1}}, \\
 & (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (10)
 \end{aligned}$$

根据螺旋谱始终关于  $m=s$  分量对称, 而且  $s > 0$ , 可以得到螺旋谱

$$P_m = \frac{C_m}{\sum_{q=-\infty}^{\infty} C_q}, \quad (11)$$

其中  $C_m = \begin{cases} C'_{2s-m}, & m < s \\ C'_m, & m \geq s \end{cases}$ ,  $\gamma$  为不完全  $\Gamma$  函数. 经证

实此式得出的结论与上述数值仿真结果相同.

#### 4. 结 论

本文研究了在利托夫近似下, LG 光束在弱湍流大气中的螺旋谱特性. 经过分析得到以下结论: 第一, 大气湍流会使螺旋谱发生弥散, 而且, 随着距离越大, 弥散越强, 逐渐趋于均匀分布. 第二, 拓扑荷,

接收孔径半径和折射率结构函数的增加会引起螺旋谱弥散加剧. 第三, 描述螺旋谱弥散程度的无量纲方差  $V$  随距离成 6 次函数关系; 与接收孔径半径及折射率结构函数成二次函数关系; 而与拓扑荷呈 11 次函数关系. 第四, 径向指数和束腰半径对螺旋谱的影响非常小, 根据此结论推出了光束螺旋谱的解析表达式. 而且经证实此式得出的结论与数值仿真结果相同.

- [1] Allen L, Beijersbergen M W, Spreeuw R J, Woerdman J P 1992 *Phys. Rev. A* **45** 8185
- [2] Sueda K, Miyaji G, Miyanaga N, Nakatsuka M 2004 *Opt. Exp.* **12** 3548
- [3] Hasegawa T, Shimizu T 1999 *Opt. Commun.* **160** 103
- [4] Liu Y D, Gao C Q, Gao M W 2008 *Chin. Phys. B* **17** 1769
- [5] Chen Y F, Lan Y P, Wang S C 2001 *Appl. Phys. B: Lasers & Opt.* **72** 167
- [6] Torner L, Torres J, Carrasco S 2005 *Opt. Exp.* **13** 873
- [7] Simpson N, Dholakia K, Allen L, Padgett M 1997 *Opt. Lett.* **22** 52
- [8] O'Neil A, Padgett M 2001 *Opt. Commun.* **193** 45
- [9] Mair A, Vaziri A, Weihs G, Zeller A 2001 *Nature* **412** 313
- [10] Bouchal Z, Celechovsky R 2004 *New J. Phys.* **6** 131
- [11] Gibson G, Courtial J, Padgett M J, Vasnetsov M, Pas'ko V, Barnett S M, Franke-Arnold S 2004 *Opt. Exp.* **12** 5448
- [12] Li F, Jiang Y S, Tang H, Wang H Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 6202 (in Chinese) [黎芳、江月松、唐华、王海洋 2009 物理学报 **58** 6202]
- [13] Lü H, Ke X Z 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 8302 (in Chinese) [吕宏、柯熙政 2009 物理学报 **58** 8302]
- [14] Molina-Terriza G, Torres J, Torner L 2001 *Phys. Rev. Lett.* **88** 13601
- [15] Wang F, Cai Y, Korotkova O 2009 *Opt. Exp.* **17** 22366
- [16] Maleev I D, Swartzlander J G A 2003 *J. Opt. Soc. Am. B* **20** 1169
- [17] Orlov S, Regelskis K, Smilgevičius V, Stabinis A 2002 *Opt. Commun.* **209** 155
- [18] Alieva T, Bastiaans M J 2004 *Proceedings of SPIE*, Bellingham, 2004, 1138
- [19] Gonzalez N, Molina-Terriza G, Torres J P 2006 *Opt. Exp.* **14** 9093
- [20] Cai Y, He S 2006 *Appl. Phys. B: Lasers & Opt.* **84** 493
- [21] Singh R P, Roychowdhury S, Jaiswal V K 2006 *J. Mod. Opt.* **53** 1803
- [22] Seshadri S R 2002 *Opt. Lett.* **27** 1872
- [23] Simon R, Agarwal G S 2000 *Opt. Lett.* **25** 1313
- [24] Paterson C 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 153901
- [25] Anguita J, Neifeld M, Vasic B 2008 *Appl. Opt.* **47** 2414
- [26] Rao R Z 2009 *Chin. Phys. B* **18** 581
- [27] Gbur G, Tyson R K 2008 *J. Opt. Soc. Am. A* **25** 225
- [28] Zhu K C, Zhou G Q, Li X G, Zheng X J, Tang H Q 2008 *Opt. Exp.* **16** 21315
- [29] Chen B S, Chen Z Y, Pu J X 2008 *Opt. & Laser Tech.* **40** 820
- [30] Wang T, Pu J X, Chen Z Y 2008 *Opt. Eng.* **47** 036002
- [31] Li F, Gao C Q, Liu Y D, Gao M W 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 860 (in Chinese) [李丰、高春清、刘义东、高明伟 2008 物理学报 **57** 860]
- [32] Zhang Y X, Tang M X, Tao C K 2005 *Chin. Opt. Lett.* **3** 559
- [33] Cai Y. 2006 *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* **8** 537
- [34] Gradshteyn I S, Ryzhik I M 2007 *Table Of Integrals, Series And Products* 7Ed (Salt Lake City: Academic Press) P933, P340
- [35] Zambrini R, Barnett S M 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 113901

## Spiral spectrum of Laguerre-Gaussian beams propagating in turbulent atmosphere\*

Li Fang<sup>†</sup> Tang Hua Jiang Yue-Song Ou Jun

(School of Electronic and Information Engineering, BeiHang University, Beijing 100191, China)

(Received 21 December 2009; revised manuscript received 12 March 2010)

### Abstract

An analysis of the propagation of Laguerre-Gaussian beam in fluctuation turbulent atmosphere is performed. Under the Rytov approximation, the integral expression of the spiral spectrum of the beam at the receiver aperture is obtained. It is found that the atmospheric turbulence will induce the spread of the spiral spectrum. With increasing topological charge, propagation distance, refractive index structure constant and radius of receiver aperture, the spectrum spread becomes more serious. It is also shown that the dimensionless variance describing the degree of the spread is a quadratic function of the refractive index structure constant and the radius of receiver aperture respectively, while it is an 11th order function of the topological charge and a 6th order function of the propagation distance. The analytical expression of the spiral spectrum is derived by taking account of the simulation results that both radial index and waist radius have little effect on the spiral spectrum.

**Keywords:** Laguerre-Gaussian beam, atmospheric turbulence, spiral spectrum, dimensionless variance

**PACS:** 42.25.Dd, 42.68.Bz, 42.50.Ar, 42.60.Jf

---

\* Project supported by the Innovation Foundation of CAST and Innovation Foundation of BUAA for PhD Graduates(Grant No. 292129).

<sup>†</sup> E-mail: cubbybuaa@gmail.com