

## 法拉第手征介质反射电磁波的极化特性研究\*

汤奇<sup>1)</sup> 孟繁义<sup>1)2)†</sup> 张狂<sup>1)</sup> 吴群<sup>1)2)</sup> 李乐伟<sup>1)</sup>

1) (哈尔滨工业大学, 电子与信息工程学院微波工程系, 哈尔滨 150001)

2) (毫米波国家重点实验室, 南京 210096)

(2010年2月4日收到; 2010年3月12日收到修改稿)

从麦克斯韦方程出发严格推导了均匀介质与法拉第手征介质界面处电磁波反射公式. 通过解析的方法讨论了不同极化状态下反射电磁波的极化特性与法拉第手征介质电磁参数之间的关系. 针对部分具体实例进行了计算, 计算结果与理论预测相符合.

**关键词:** 法拉第手征介质, 反射电磁波, 极化特性

**PACS:** 42.25. Ja, 42.25. Bs, 78.20. Bh, 78.20. Fm

## 1. 引言

近年来, 法拉第手征介质 (Faraday chiral mediums, FCMs) 由于具有更多的电磁波调控自由度, 在微波和毫米波元器件的性能控制 (如双各向异性手征波导和双各向异性微带线)、减小散射体雷达截面积、构造均匀超常媒质、以及控制天线的辐射和极化特性等技术领域的潜在应用受到了越来越多的关注<sup>[1-9]</sup>. Engheta 等人<sup>[10]</sup> 将各向同性手征介质所呈现的手征特性<sup>[11]</sup> 和磁场偏置等离子体或磁场偏置铁氧体所呈现的法拉第旋转特性<sup>[12]</sup> 相结合, 提出了法拉第手征介质的结构模型以及平面电磁波在法拉第手征介质中的传播特性. 随着人们对法拉第手征介质的深入认识, 对法拉第手征介质的本构参量进行了更准确的计算和修正<sup>[13]</sup>. Mackay 等人研究了当手征参量较大时法拉第手征介质呈现明显的后向波特性和负折射特性<sup>[14]</sup>. 本文主要研究法拉第手征介质反射电磁波的极化特性, 严格推导了由理想介质入射到终端接理想导体的 FCM 介质板的电磁波反射公式. 分析了不同极化方式入射电磁波 (线极化, 圆极化及椭圆极化) 经 FCM 介质层反射后的极化转换

现象.

## 2. 法拉第手征介质反射系数公式

终端接理想导体的 FCM 介质板结构模型如图 1 所示, 由放置在理想导体板上的 FCM 介质层 (厚度为  $d$ ) 构成. 假设电磁波垂直入射 FCM 表面, 其波矢量为  $k_{in} = k_0 e_z$ , 极化方向在  $xy$  平面.

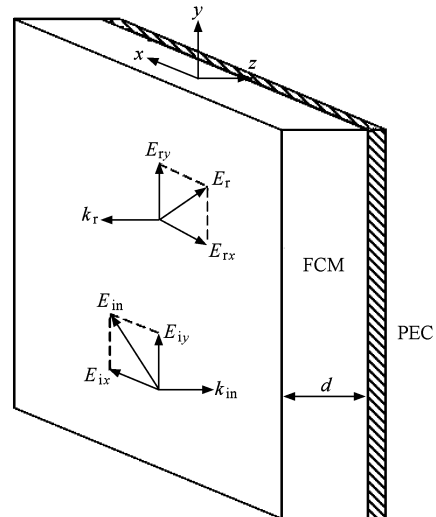


图 1 终端接理想导体的 FCM 介质板结构模型

\* 国家自然科学基金 (批准号: 60801015, 60971064), 博士点基金 (批准号: 200802131075), 毫米波国家重点实验室基金 (批准号: K201006, K201007), 航空科学基金 (批准号: 20080177013), 哈工大优秀青年教师基金 (批准号: HITQNS. 2008. 007), 中央高校基本科研业务费专项资金 (批准号: HIT. NSRIF2009119) 资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: blade@hit.edu.cn

入射波的电场和磁场分量表达式如下:

$$\begin{aligned} E_{in}(z) &= \begin{bmatrix} E_{ix} \\ E_{iy} \end{bmatrix} e^{-ik_0z}, \\ H_{in}(z) &= \frac{k_0}{\mu_0\omega} \mathbf{e}_z \times E_{in}(z) \\ &= \frac{k_0}{\mu_0\omega} \begin{bmatrix} -E_{iy} \\ E_{ix} \end{bmatrix} e^{-ik_0z}, \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $E_{ix}$  和  $E_{iy}$  是入射电场  $x$  分量和  $y$  分量. 同理反射波电场和磁场分量为

$$\begin{aligned} E_r(z) &= \begin{bmatrix} E_{rx} \\ E_{ry} \end{bmatrix} e^{ik_0z}, \\ H_r(z) &= \frac{k_0}{\mu_0\omega} (-\mathbf{e}_z) \times E_r(z) \\ &= \frac{k_0}{\mu_0\omega} \begin{bmatrix} E_{ry} \\ -E_{rx} \end{bmatrix} e^{ik_0z}, \end{aligned} \quad (2)$$

其中  $E_{rx}$  和  $E_{ry}$  是反射电场  $x$  轴和  $y$  轴分量. 假设反射电场和入射电场满足如下关系:

$$\begin{bmatrix} E_{rx} \\ E_{ry} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{xx} & R_{xy} \\ R_{yx} & R_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{ix} \\ E_{iy} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

其中  $R_{xx}$  是入射电场在  $x$  方向上的极化分量在  $x$  方向上的反射系数,  $R_{xy}$  是入射电场在  $x$  方向上的极化分量在  $y$  方向的反射系数;  $R_{yx}$  是入射电场在  $y$  方向

上的极化分量在  $x$  方向上的反射系数,  $R_{yy}$  是入射电场在  $y$  方向上的极化分量在  $y$  方向的反射系数. 根据参考文献[9], 在法拉第手征介质区域的平面电磁波具有如下的形式:

$$\begin{aligned} E_{FCM}(z) &= \sum_{j=1}^4 E_{FCM,0j} e^{ik_0k_j(z-d)}, \\ H_{FCM}(z) &= \sum_{j=1}^4 H_{FCM,0j} e^{ik_0k_j(z-d)}, \end{aligned} \quad (4)$$

其中  $k_{j=1,2,3,4}$  是相对波常数, 根据电场极化方式的不同, 它有四个相互独立值. 因此具有更多的电磁参数控制自由度.

由于法拉第手征介质层右端接理想导体, 所以有

$$E_{FCM}(d) \cdot (\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y) = 0. \quad (5)$$

方程(4)代入方程(5)可得

$$\begin{aligned} E_{FCM,01} &= -E_{FCM,02}, \\ E_{FCM,03} &= -E_{FCM,04}. \end{aligned} \quad (6)$$

另外在 FCM 和真空交界面需满足如下边界条件:

$$\begin{aligned} E_{FCM}(0) &= E_{in}(0) + E_r(0), \\ H_{FCM}(0) &= H_{in}(0) + H_r(0). \end{aligned} \quad (7)$$

将方程(1), (2), (4)代入方程(7), 可解得反射系数如下:

$$\begin{aligned} R_{xx} = R_{yy} &= -\frac{B[D(\mu_g^2 - \mu_t^2) + EC + 2G(\xi_t - \xi_g)]}{GBL - (DL + FC)(\mu_t + \mu_g) + EBC}, \\ R_{xy} = -R_{yx} &= i \frac{[-FC + 2D(\xi_g - \xi_t)](\mu_g + \mu_t) - G(\mu_g - \mu_t)B}{GBL - (DL + FC)(\mu_t + \mu_g) + EBC}, \end{aligned} \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} D &= (A_2 - 1)(A_1 - 1), \\ E &= (A_2 + 1)(A_1 + 1), \\ F &= (A_2 + 1)(A_1 - 1), \\ G &= (A_2 - 1)(A_1 + 1), \\ A_1 &= e^{i4\pi Bd/\lambda_0}, \\ A_2 &= e^{i4\pi Cd/\lambda_0}, \\ B &= \sqrt{(\varepsilon_g + \varepsilon_t)(\mu_g + \mu_t)}, \\ C &= \sqrt{(\varepsilon_g - \varepsilon_t)(\mu_g - \mu_t)}, \\ L &= 2\xi_t - 2\xi_g + \mu_g - \mu_t. \end{aligned} \quad (9)$$

可以看出以上的反射公式十分繁琐, 为了更清楚地研究反射波的极化特性, 需要简化分析过程.

令

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \frac{R_{xx}}{R_{xy}}, \\ \Delta\varphi &= \arg[\hat{r}] = \arg\left[\frac{R_{xx}}{R_{xy}}\right], \\ \Delta\xi &= \xi_t - \xi_g. \end{aligned} \quad (10)$$

**性质 1** 通过分析可以看出  $\Delta\varphi$  和  $\Delta\xi$  密切相关. 当  $\Delta\xi = 0$  时, 可得

$$|\Delta\varphi_0| = |\Delta\varphi| \Big|_{\Delta\xi=0} = \left| \arg\left[ \frac{B[D(\mu_g^2 - \mu_t^2) + EC]}{i[FC(\mu_g + \mu_t) + GB(\mu_g - \mu_t)]} \right] \right| \Big|_{\Delta\xi=0}$$

$$= \left| \arg \left[ \frac{B \left[ \frac{D}{F} (\mu_g^2 - \mu_l^2) + \frac{E}{F} C \right]}{i \left[ C (\mu_g + \mu_l) + \frac{G}{F} B (\mu_g - \mu_l) \right]} \right] \right|_{\Delta \xi = 0} = 0 \text{ or } \pi, \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned} \arg \left[ \frac{G}{F} \right] &= 0 \text{ or } \pi, \arg \left[ \frac{D}{F} \right] = \pm \frac{\pi}{2}, \\ \arg \left[ \frac{E}{F} \right] &= \pm \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (12)$$

(11)式是一个非常重要的结论,它说明当  $\Delta \xi = 0$  时,  $\hat{r}$  是实数.

**性质 2** 方程(9)可以推出,当

$$A_2 = -A_1 = 1 \quad (13)$$

时,有  $D = E = G = 0$ ,可得

$$\begin{aligned} R_{xx} &= 0, R_{xy} = i, \\ \hat{r} &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

同样,当

$$A_2 = A_1 = 1 \quad (15)$$

时,有  $D = F = G = 0$ ,可得

$$\begin{aligned} R_{xx} &= -1, R_{xy} = 0, \\ |\hat{r}| &\rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (16)$$

通过对方程(9)的深入分析可知,(13)式和(15)式所示的两个条件可以在不改变 FCM 电参数的情况下改变介质层厚度来实现.

**性质 3** 同理由方程(9)可以推出,当

$$A_2 = -A_1 = -1 \quad (17)$$

时,有  $D = E = F = 0$ ,可得

$$\hat{r} = i \frac{2\Delta \xi}{\mu_l - \mu_g}. \quad (18)$$

同理,当

$$A_2 = A_1 = -1 \quad (19)$$

时,有  $D = F = G = 0$  于是可得

$$\hat{r} = i \frac{B(\mu_g - \mu_l)}{2\Delta \xi}. \quad (20)$$

可以看出在(17)和(19)式两个条件下  $\hat{r}$  均为虚数.

### 3. 法拉第手征介质反射波的极化特性

根据电磁波极化的定义,令入射波电场  $x$  轴分量与  $y$  轴分量之比为

$$\hat{e}_i = \frac{E_{ix}}{E_{iy}}. \quad (21)$$

当  $\hat{e}_i$  为实数时,入射波是线极化, $\hat{e}_i$  的大小决

定极化角度. 当  $\hat{e}_i = \pm i$  时,入射波为圆极化,  $+i$  表示右旋极化(入射波沿  $+z$  放向传播),  $-i$  表示左旋极化. 当  $\hat{e}_i$  是其他复数情况下,入射波是椭圆极化.

定义反射波电场  $x$  轴分量与  $y$  轴分量之比为

$$\frac{E_{rx}}{E_{ry}} = p \frac{E_{ix}}{E_{iy}} = p \hat{e}_i, \quad (22)$$

其中  $p$  是一个复数,用来表示反射波和入射波极化状态转变因子. 显然, $p$  为有限实数时,在反射波与入射波之间只改变极化大小而不会改变极化状态;当  $p$  为复数时,在反射波与入射波之间就要发生极化状态上的转换. 将(3)和(10)式代入(22)式,可以得到  $p$  与  $\hat{r}$  和  $R_{uv}(u, v = x, y)$  之间的关系

$$p = \frac{1}{\hat{e}_i} \frac{\hat{e}_i \hat{r} + 1}{\hat{r} - \hat{e}_i}. \quad (23)$$

以下将分析  $p$  可能的取值范围来讨论反射波相对于入射波的极化转换情况.

#### 3.1. 入射波与反射波均为线极化

在这种情况下  $\hat{e}_i$  和  $p$  都是实数,由(23)式可知  $\hat{r}$  一定是实数. 由于  $p$  的值域取决于  $\hat{r}$  值,所以首先讨论  $\hat{r}$  取值范围. 根据方程(14)和(16),当  $A_2 = -A_1 = 1$  及  $A_2 = A_1 = 1$  时,  $|\hat{r}|$  最大范围为  $(0, +\infty)$ . 由方程(11)可知,当  $\xi_g = \xi_l$  时,  $\hat{r}$  是实数. 又因为  $A_1$  和  $A_2$  的表达式中不包含  $\xi_g$  和  $\xi_l$ ,所以一定可以找出一组参数同时满足  $A_2 = -A_1 = 1$  和  $\xi_g = \xi_l$  或者  $A_2 = A_1 = 1$  和  $\xi_g = \xi_l$ ,使得  $\hat{r}$  的值域为  $(-\infty, +\infty)$ . 因此根据方程(23),只要适当选取 FCM 反射器的参数可以使  $p$  在  $(-\infty, +\infty)$  内取任意值. 这意味着,法拉第手征介质反射器可以实现线极化波极化方向的任意转换,甚至可以让反射波的极化方向与入射波的极化方向相正交. 图 2 给出了,当  $\xi_l = 0.5$ ,  $\xi_g = 0.5$ ,  $\mu_l = 1.17$ ,  $\mu_g = 0.4$ ,  $\varepsilon_l = 2$ ,  $\varepsilon_g = 0.1$ (该参数满足  $\xi_g = \xi_l, A_2 = A_1 = 1$ ) 时,  $\hat{r}$  随  $d/\lambda_0$  的变化关系曲线.

由图 2 可以看出随着  $d/\lambda_0$  增加  $\hat{r}$  在  $-\infty$  到  $+\infty$  的范围内周期性变化. 图 3 给出了同样是上述参数,当  $d = 30 \text{ mm}$ ,  $\hat{e}_i = 1$  时,  $p$  值的计算结果. 可以看出随着  $d/\lambda_0$  增加  $\hat{r}$  在  $-\infty$  到  $+\infty$  的范围内周期

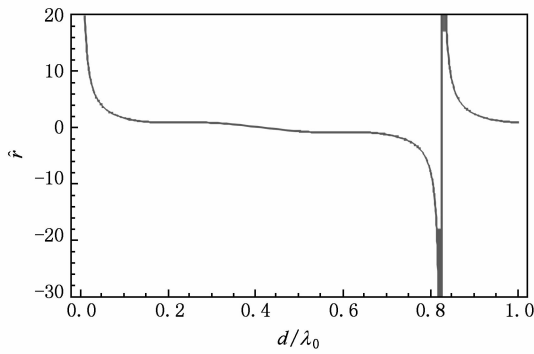


图2 当  $\xi_1 = 0.5, \xi_g = 0.5, \mu_1 = 1.17, \mu_g = 0.4, \varepsilon_1 = 2, \varepsilon_g = 0.1$  时  $\hat{r}$  的计算结果

性变化.

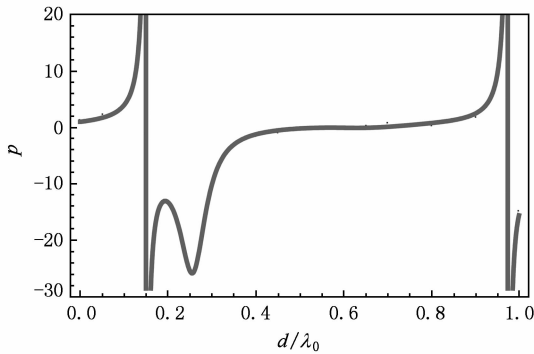


图3 当  $\xi_1 = 0.5, \xi_g = 0.5, \mu_1 = 1.17, \mu_g = 0.4, \varepsilon_1 = 2, \varepsilon_g = 0.1, d = 30 \text{ mm}, \hat{e}_1 = 1$  时  $p$  的计算结果

### 3.2. 反射波为圆极化的情况

由(23)式可得,当  $\hat{r} = i$  时,  $E_{rx}/E_{ry} = p\hat{e}_1 = -i$ , 并且该结论与  $\hat{e}_1$  的值无关,这意味着当  $\hat{r} = i$  时无论入射波的极化方式是什么其反射波总是左旋圆极化. 同样当  $\hat{r} = -i$  时,  $E_{rx}/E_{ry} = p\hat{e}_1 = i$ , 因此当  $\hat{r} = i$  时无论入射波的极化方式是什么其反射波总是右旋圆极化. 另外,由方程(17)–(20)可知,当满足条件  $A_2 = -A_1 = -1$  或  $A_2 = A_1 = -1$  时,  $\hat{r}$  是纯虚数,且虚部随着  $\Delta\xi = \xi_1 - \xi_g$  的变化而变化. 因此求解  $A_2 = -A_1 = -1$  与  $\text{Im}[\hat{r}] = 1$  (或  $-1$ ) 的联立方程组或  $A_2 = A_1 = -1$  与  $\text{Im}[\hat{r}] = 1$  (或  $-1$ ) 的联立方程组, 就可以很容易地得到使  $\hat{r} = \pm i$  的本构参数,也就是获得使反射波为左旋或者右旋圆极化的介质参数. 图4 绘制出了当  $\mu_1 = 1.54, \mu_g = 0.36, \varepsilon_1 = 2, \varepsilon_g = 0.1$  以及  $d' = 0.5$  时(此时满足  $A_2 = -A_1 = -1$ ) 以及当  $\mu_1 = 2.08, \mu_g = 0.9, \varepsilon_1 = 2, \varepsilon_g = 0.1$

以及  $d' = 0.5$  时(此时满足  $A_2 = A_1 = -1$ ) 的  $\text{Im}[\hat{r}]$  随  $\Delta\xi$  的变化曲线. 从图中可以看到,在两种情况下,  $\hat{r} = \pm i$  都可以实现.

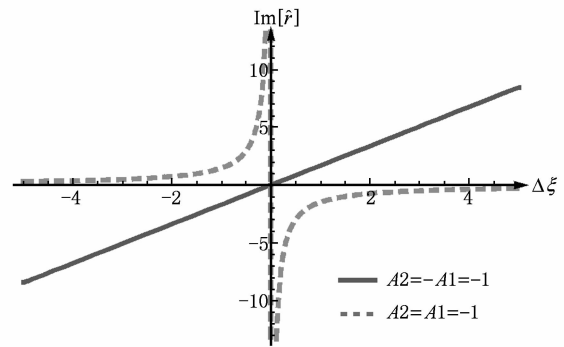


图4 无耗情况下  $\text{Im}[\hat{r}]$  随  $\Delta\xi$  的变化曲线

### 3.3. 入射波为线极化而反射波为椭圆极化

由方程(22)和(23)可以得到

$$\frac{E_{rx}}{E_{ry}} = \begin{cases} \frac{1}{\hat{r}}, & \hat{e} = 0, \\ -\hat{r}, & \hat{e} \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (24)$$

因此,根据图4所示,当  $\hat{e}_1 = 0$  ( $E_{ix} = 0$ ) 或  $\hat{e}_1 \rightarrow \infty$  ( $E_{iy} = 0$ ) 时,法拉第反射器可以将入射波极化方式由线极化转变为任意轴比的椭圆极化. 将方程  $A_2 = -A_1 = -1$  与方程  $\text{Im}[\hat{r}] = -E_{rx}/E_{ry}$  (或者方程  $\text{Im}[\hat{r}] = -E_{ry}/E_{rx}$ ) 的方程联立或将方程  $A_2 = A_1 = -1$  与  $\text{Im}[\hat{r}] = -E_{rx}/E_{ry}$  (或者  $\text{Im}[\hat{r}] = -E_{ry}/E_{rx}$ ) 联立就可以求解得到所需的物理参数.

### 3.4. 特殊形式的极化方式

由方程(22)和(23)还可以推导得到,当  $\hat{r}$  取某些值特殊值时,会产生一些非常有趣的极化转换结果,譬如,当  $\hat{r} = 0$  ( $R_{xx} = 0$ ) 时,  $E_{rx}/E_{ry} = -E_{iy}/E_{ix}$ , 它意味着此时对于任意极化的入射波,反射波的极化方式总是与入射波相正交;当  $|\hat{r}| \rightarrow \infty$  ( $R_{yy} = 0$ ) 时,  $E_{ry}/E_{rx} = E_{iy}/E_{ix}$ , 它意味着此时的法拉第手征介质反射器等效为一个理想磁边界(PMC),这种理想磁边界与理想电边界相对应,其反射系数为  $+1$ , 因此可以广泛应用于微波器件的小型化中,如谐振腔和天线的小型化.

## 4. 结 论

电磁波在法拉第手征介质中传播时具有四个独立的波数,这样的特点在为法拉第手征介质增加

了分析难度的同时也提供了更多的对电磁波控制的自由度. 结果表明通过调整 FCM 介质层的厚度和本构参数可以实现电磁波任意极化状态(线极化,

圆极化和椭圆极化)的转变. 在一定条件下对于任意入射波的反射波均为圆极化, 以及实现入射波和反射波正交线极化.

- [1] Koivisto P K, Sten J C E 1995 *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* **43** 169
- [2] Yin W Y, Wan W, Wang W B 1996 *Prog. Electromagn. Res.* **13** 149
- [3] Worasawate D, Mautz J R, Arvas E 2004 *IEEE Trans. Anten. Propag.* **52** 213
- [4] Meng F Y, Wu Q, Fu J H, Gu X M, Li L W 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6220 (in Chinese) [孟繁义、吴群、傅佳辉、顾学迈、李乐伟 2008 物理学报 **57** 6220]
- [5] Yang R, Xie Y J, Li X F, Jiang J, Wang Y Y, Wang R 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 901 (in Chinese) [杨锐、谢拥军、李晓峰、蒋俊、王元源、王瑞 2009 物理学报 **58** 901]
- [6] Chen L, Liang C H, Dang X J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6398 (in Chinese) [陈亮、梁昌洪、党晓杰 2007 物理学报 **56** 6398]
- [7] Sun Y Z, Ran L X, Peng L, Wang W G, Li T, Zhao X, Chen Q L 2009 *Chin. Phys. B* **18** 174
- [8] Ma H, Qu S B, Xu Z, Zhang J Q, Wnag J F 2009 *Chin. Phys. B* **18** 1025
- [9] Yin W Y, Wang W B 1994 *Int. J. Infrared Millim. Waves* **15** 1065
- [10] Engheta N, Jaggard D L, Kowarz M W 1992 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **40** 367
- [11] Lakhtakia A 1994 *Beltrami Fields in Chiral Media* (Volume 2) (Singapore: World Scientific) p130
- [12] Lax B, Button K J 1962 *Microwave Ferrites and Ferrimagnetics* (New York: McGraw-Hill) p169
- [13] Weiglhofer W S, Hansen S O 1999 *IEEE Trans. Anten. Propag.* **47** 807
- [14] Mackay T G, Lakhtakia A 2009 *Phys. Rev. B* **79** 235121

## Polarization characteristics of the wave reflection at the interface of vacuum and Faraday chiral medium\*

Tang Qi<sup>1)</sup> Meng Fan-Yi<sup>1)2)†</sup> Zhang Kuang<sup>1)</sup> Wu Qun<sup>1)2)</sup> Li Le-Wei<sup>1)</sup>

1) (Dept. Microwave Engineering, Harbin Institute of Technology (HIT), Harbin 150001, China)

2) (State Key Laboratory of Millimeter Waves, Nanjing 210096, China)

(Received 4 February 2010; revised manuscript received 12 March 2010)

### Abstract

This paper rigorously derives the formulas of reflection coefficients originating from Maxwell's equations. The relationship between the polarization characteristics of the reflected wave and the constitutive parameters of the Faraday chiral medium is analyzed for all polarization states. Special polarization cases in the research are calculated, and the results are in good agreement with theoretical expectations.

**Keywords:** Faraday chiral medium, electromagnetic reflection, polarization

**PACS:** 42.25. Ja, 42.25. Bs, 78.20. Bh, 78.20. Fm

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 60801015 and 60971064), Ph. D. Programs Foundation of Ministry of Education of China (Grant No. 200802131075), the Open Project Program of State Key Laboratory of Millimeter Wave (Grant Nos. K201006, K201007), Aviation Science Funds (Grant No. 20080177013), Development Program for Outstanding Young Teachers in Harbin Institute of Technology (Grant No. HITQNS. 2008. 007), the Fundamental Research Funds for the Central Universities (Grant No. HIT. NSRIF2009119).

† Corresponding author. E-mail: blade@hit.edu.cn