

基于 M^2 因子测量的大气湍流参数的确定方法^{*}

潘平平 张彬[†]

(四川大学电子信息学院, 成都 610064)

(2009年12月7日收到; 2010年4月14日收到修改稿)

基于广义惠更斯-菲涅尔原理以及大气湍流理论, 推导出部分相干光束在大气湍流中传输的光束传输 M^2 因子的解析表达式。定量分析了表征大气湍流参数的折射率结构常数 C_n^2 和涡旋内尺度 l_0 对 M^2 因子的影响, 并由此提出了一种通过实验测量大气湍流中光束的 M^2 因子, 进而确定出大气湍流参数的新方法。研究结果表明, 由于大气湍流对相干性好的光束影响更为明显, 在测量中可采用具有高相干性的基模高斯光束作为测量光源, 而测量装置则可采用常规的 M^2 因子测量仪。利用本文提出的方法, 可简单、方便地对大气湍流参数进行确定。

关键词: 光束传输 M^2 因子, 大气湍流参数, 湍流折射率结构常数, 湍流涡旋内尺度

PACS: 42.68. Bz

1. 引言

由于激光大气传输对遥感、跟踪和远距离激光通信等应用存在重要影响, 激光的大气传输效应越来越受到人们的重视。光波在大气中传输时会受到湍流的影响, 而折射率结构常数则是表征这一影响的主要参数^[1-5]。Consortini 等利用两平行光束的相关性质以及到达角起伏和光强起伏来测量内尺度^[1], Hill 等人提出利用空间滤波技术和光强空间相关性, 以及双波长闪烁法等多种探测内尺度的方法^[6], 也有采用激光雷达法测量大气湍流参数。这些方法从不同角度或原理出发, 实现了大气折射率结构常数和内尺度的测量。

在自由空间中传输时, 激光束的光束传输 M^2 因子^[7,8]是一个常数, 不会随传输距离而变。然而在大气中, 由于受到大气湍流的影响, 激光束的 M^2 因子会产生变化, 因此, 激光束在大气中传输时 M^2 因子的变化即可反映出大气湍流的特征。为此, 我们提出了一种基于 M^2 因子的测量来确定大气折射率结构常数的简单方法。通过采用常规的 M^2 因子测量仪^[9], 测量得到激光束通过大气湍流传输后的 M^2 因子, 从而确定大气湍流参数。与上述传统方法相比, 本文提出的方法不需要获取波长之间闪烁相关

性, 能减少测量过程中大气背景光的干扰, 实验装置也较为简单。

2. 大气湍流折射率结构常数的测量原理

2.1. 大气湍流中的光束传输 M^2 因子

假定大气湍流在统计上是均质的、各向同性的, 且光源和介质统计是独立的。基于广义惠更斯-菲涅尔原理的近轴形式, 并利用 Tatarskii 方法, 部分相干光束在通过大气湍流传输的交叉谱密度函数可表示为^[10-14]

$$W(x_1, x_2, z) = \left(\frac{k}{2\pi z}\right)^2 \iint W(x'_1, x'_2, 0) \times \exp\left\{-\frac{ik}{2z}[(x'_1 - x_1)^2 - (x'_2 - x_2)^2] - H\right\} dx'_1 dx'_2, \quad (1)$$

式中, z 为大气湍流中的传输距离; $k = 2\pi/\lambda$ 为波数, λ 为波长; $\exp(-H)$ 反映了大气湍流的影响效应, 且 H 可表示为

$$H = 4\pi^2 k^2 z \int_0^1 d\xi \int_0^\infty [1 - J_0(\kappa |(x'_2 - x'_1)\xi + (1 - \xi)(x_2 - x_1)|)] \Phi_n(\kappa) \kappa d\kappa, \quad (2)$$

* 教育部新世纪优秀人才支持计划(批准号: NCET-05-0487)资助的课题。

† 通讯联系人。E-mail address: zhangbinff@sohu.com

式中, J_0 是第一类零阶 Bessel 函数; $\Phi_n(\kappa)$ 是大气湍流的折射率起伏函数的空间功率谱, κ 表示空间湍流波数的大小. 在自由空间中, $\Phi_n(\kappa) = 0$.

作为部分相干光束典型光束模型, 高斯-谢尔模型(GSM) 光束在 $z = 0$ 处的交叉谱密度函数可表示为

$$W(x_1, x_2, 0) = A_0 \exp \left[-\frac{x_1^2 + x_2^2}{w_0^2} - \frac{(x_1 - x_2)^2}{2\sigma_0^2} \right], \quad (3)$$

式中, x_1, x_2 为 $z = 0$ 处的两个位置坐标, A_0 是一常数, w_0 为束腰宽度, σ_0 表示光源的空间相干长度.

将(2)和(3)式代入(1)式, 并利用强度二阶矩的定义, 经过较为繁杂的计算可推导出部分相干光束经大气湍流传输后在空间域和空间-频率域的强度二阶矩, 以及交叉二阶矩的解析表达式分别为^[15]

$$\langle x^2 \rangle = \frac{w_0^2}{4} + \frac{1}{k^2 w_0^2} M_0^4 + \frac{2}{3} \pi^2 z^3 u, \quad (4)$$

$$\langle \theta_x^2 \rangle = \frac{1}{k^2 w_0^2} M_0^4 z + 2 \pi^2 z u, \quad (5)$$

$$\langle x \theta_x \rangle = \frac{1}{k^2 w_0^2} M_0^4 z + \pi^2 z^2 u, \quad (6)$$

式中, $M_0^2 = \frac{1}{\beta}$, 表示 $z = 0$ 处 GSM 光束的 M^2 因子^[16], β 为空间相关参数, 可表示为

$$\beta = \left[1 + \frac{w_0^2}{\sigma_0^2} \right]^{-1/2}, \quad (7)$$

$$u = \int_0^{+\infty} \Phi_n(\kappa) \kappa^3 d\kappa. \quad (8)$$

从(4)–(8)式可以看出, 激光束在大气湍流中传输时, 不同的折射率起伏函数空间功率谱对强度二阶矩的影响是不同的.

式中, $a = 0.252$, M_0^2 和 M^2 分别为初始位置和传输距离 z 处的光束传输 M^2 因子.

分析(12)式可知, 只需要通过实验分别测量出部分相干光束在大气湍流中传输时的初始位置以

利用(4)–(6)式, 可计算得到 GSM 光束在大气湍流中的光束传输 M^2 因子的解析表达式

$$M^2 = \left[M_0^4 + 2\pi^2 k^2 w_0^2 z u + \frac{8\pi^2 z^3}{3w_0^2} M_0^4 u + \frac{4\pi^4 k^2 z^4}{3} u^2 \right]^{1/2}. \quad (9)$$

当 $u = 0$ 时, (9) 式可简化为

$$M^2 = \frac{1}{\beta}. \quad (10)$$

说明 GSM 光束在自由空间中传输时, 其光束传输 M^2 因子是一个常数, 此时, M^2 因子只与光束相关参数 β 成反比, 而与传输距离等其他参数无关. 若进一步令 $\beta = 1$, 则对应于基模高斯光束在自由空间传输的情况, 此时, $M^2 = 1$.

2.2. 大气湍流参数的确定方法

Hill 数值模型是目前较为精确地描述折射率变化情况的主要模型, 但该模型的不足之处是不易于解析分析研究. Andrews 湍流理论模型是 Hill 数值模型的近似谱, 在忽略外尺度(即假设外尺度为无穷大)的条件下, Andrews 湍流理论模型对耗散区内的功率谱 $\Phi_n(\kappa)$ 可描述为^[17]

$$\Phi_n(\kappa) = 0.033 C_n^2 \kappa^{-11/3} \exp \left(-\frac{\kappa^2}{\kappa_l^2} \right) \times \left[1 + 1.802 \left(\frac{\kappa}{\kappa_l} \right) - 0.254 \left(\frac{\kappa}{\kappa_l} \right)^{7/6} \right], \quad (11)$$

式中, $\kappa_l = 3.3/l_0$, C_n^2 为湍流折射率结构常数, l_0 为湍流涡旋内尺度.

将(11)式代入(8)和(9)式, 便可确定大气湍流参数, 即湍流折射率结构常数 C_n^2 与湍流涡旋内尺度 l_0 的乘积, 可表示为

$$C_n^2 l_0^{-1/3} = \frac{\sqrt{\left(k^2 w_0^2 + \frac{4z^2}{3w_0^2} M_0^4 \right)^2 - \frac{4k^2 z^2}{3} (M_0^4 - M^4)} - k^2 w_0^2 - \frac{4z^2}{3w_0^2} M_0^4}{a \pi^2 k^2 z^3}, \quad (12)$$

及传输距离 z 处的光束传输 M^2 因子, 即可根据(12)式方便地确定大气湍流参数.

进一步令 $\beta = 1$, 可得到基模高斯光束作为光源时的大气湍流参数表达式, 即

$$C_n^2 l_0^{-1/3} = \frac{\sqrt{\left(k^2 w_0^2 + \frac{4z^2}{3w_0^2}\right)^2 - \frac{4k^2 z^2}{3}(1 - M^4)} - k^2 w_0^2 - \frac{4z^2}{3w_0^2}}{a\pi^2 k^2 z^3}. \quad (13)$$

从(13)式可以看出,对于基模高斯光束作为光源的情况,只需要通过实验测量传输距离 z 处的 M^2 因子,便可确定大气湍流参数.

值得指出的是,基于 M^2 因子测量的方法可直接确定的大气湍流参数为湍流折射率结构常数 C_n^2 与湍流涡旋内尺度的乘积,即湍流因子 $V = C_n^2 l_0^{-1/3}$,而该湍流因子 V 不但与激光束在大气湍流中的强度二阶矩以及光束传输 M^2 因子直接相关,而且还与激光束通过大气湍流传输后的到达角起伏直接相关^[1].

已有的研究结果表明,湍流涡旋内尺度 l_0 的变化范围较小,通常为几 mm 至十几 mm,而湍流折射率结构常数 C_n^2 的变化范围却很大,通常可相差几个量级,并且,湍流折射率结构常数对激光束大气传输特性的影响也比湍流涡旋内尺度更为显著.因此,如果将内尺度在一定范围内进行取值时,则可进一步利用本文的方法确定湍流折射率结构常数 C_n^2 的取值范围或对 C_n^2 取值进行估计.于是,根据(13)式可得

$$C_n^2 = \frac{\sqrt{\left(k^2 w_0^2 + \frac{4z^2}{3w_0^2}\right)^2 - \frac{4k^2 z^2}{3}(1 - M^4)} - k^2 w_0^2 - \frac{4z^2}{3w_0^2}}{a\pi^2 k^2 z^3 l_0^{-1/3}}. \quad (14)$$

考虑到 M^2 因子的测量及内尺度 l_0 的估计所带来的误差,利用误差传递公式可对 C_n^2 的误差进行计

$$\Delta C_n^2 = \frac{4l_0^{1/3} M^2 \Delta M^2}{3a\pi^2 z \sqrt{\left(k^2 w_0^2 + \frac{4z^2}{3w_0^2}\right)^2 - \frac{4k^2 z^2}{3}(1 - M^4)}} + \frac{l_0^{-2/3} \left(\sqrt{\left(k^2 w_0^2 + \frac{4z^2}{3w_0^2}\right)^2 - \frac{4k^2 z^2}{3}(1 - M^4)} - k^2 w_0^2 - \frac{4z^2}{3w_0^2} \right) \Delta l_0}{3a\pi^2 k^2 z^3}, \quad (15)$$

式中, ΔM^2 和 Δl_0 分别为光束传输 M^2 因子和湍流内尺度的绝对误差.

于是,湍流折射率结构常数 C_n^2 的相对误差为

$$\delta_{C_n^2} = \frac{\Delta C_n^2}{C_n^2}. \quad (16)$$

3. 数值计算与分析

图 1 给出了不同大气湍流参数情况下,部分相干光在大气湍流中光束传输 M^2 因子的变化规律,(a) C_n^2 不同, $l_0 = 0.01$ m,(b) l_0 不同, $C_n^2 = 10^{-14}$ m $^{-2/3}$, (c) C_n^2 取值范围内 M^2 因子的变化, $l_0 = 0.01$ m. 计算所用参数: $w_0 = 0.03$ m, $\lambda = 870$ nm, $\beta =$

算,即

0.8. 如果没有其他特别说明,以下计算参数相同.

从图 1 可以看出,由于湍流对大气中传输光束的衍射及散射等作用,使得 M^2 因子随着传输距离的增加而明显增大.图 1 (a) 表明,湍流折射率结构常数越大, M^2 因子随传输距离增大得越快.对于相同的传输距离处,湍流越强则光束质量变得越差.分析图 1 (b) 可知,对于给定的传输距离处, M^2 因子随着内尺度的减小而增大,并且,传输距离越远,内尺度对光束质量影响的差异越明显.根据图 1 (c) 给出的大气湍流结构折射率参数 C_n^2 的取值范围 10^{-16} — 10^{-14} m $^{-2/3}$ 内的 M^2 因子的变化曲线可知, M^2 因子随着 C_n^2 取值的增大而变大,并且,传输距离越远,变化范围越大.

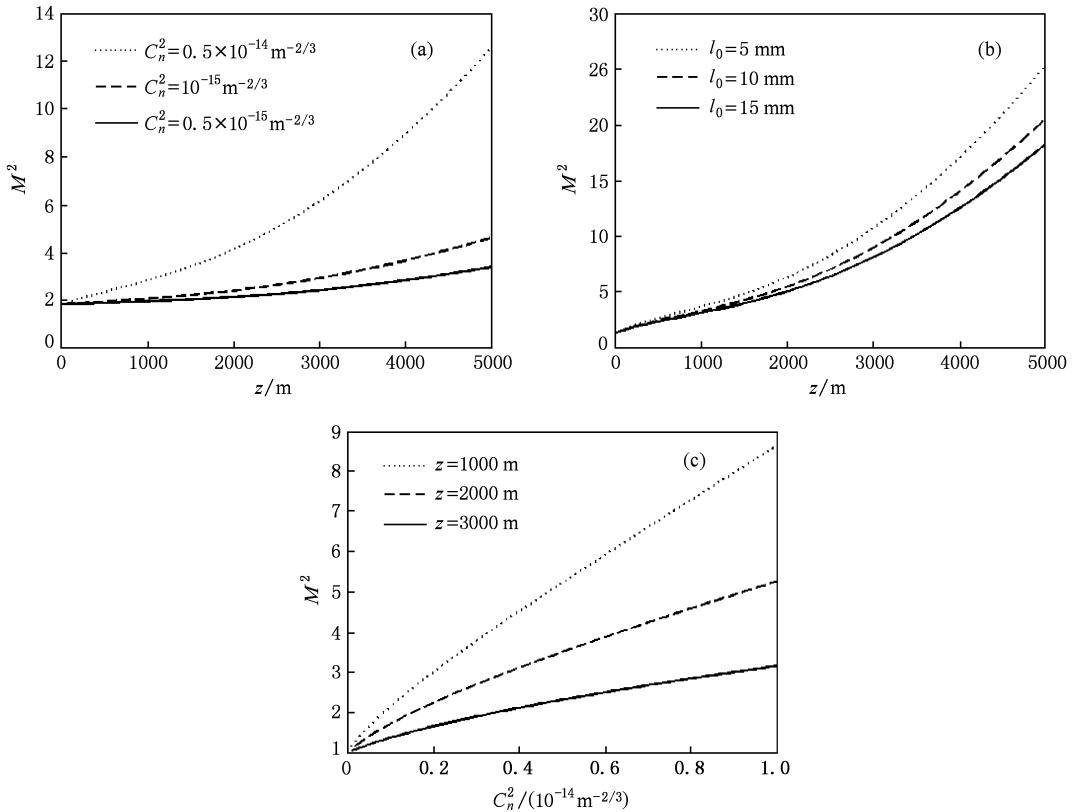


图1 M^2 因子的变化 (a) C_n^2 不同, $l_0 = 0.01 \text{ m}$; (b) l_0 不同, $C_n^2 = 10^{-14} \text{ m}^{-2/3}$; (c) C_n^2 取值范围内 M^2 因子的变化

图2给出了部分相干光初始空间相干性对大气湍流中光束传输 M^2 因子的影响,(a)湍流强度不

同, $z = 1000 \text{ m}, l_0 = 0.01 \text{ m}$;(b)随传输距离变化, $C_n^2 = 10^{-14} \text{ m}^{-2/3}, l_0 = 0.01 \text{ m}$.

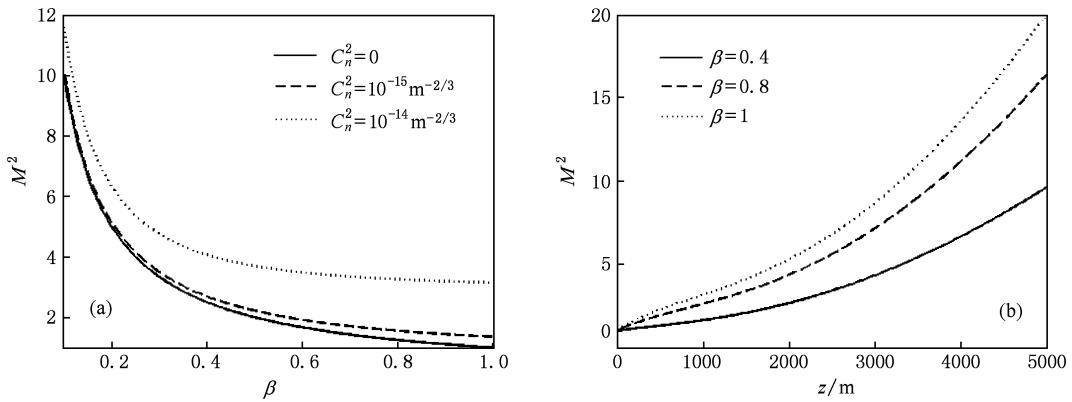


图2 初始空间相干性对大气湍流中 M^2 因子的影响 (a) 湍流强度不同; (b) 随传输距离变化

从图2可以看出,光束传输 M^2 因子随着光源初始空间相关参数的增大而明显减小,这说明在相同传输位置处,相干性越好的光束,其光束质量也越好.分析图2(a)可知,当光束的初始空间相干性相同时,在越强的湍流中,光束的光束质量变得越

差.分析图2(b),随着传输距离的增加,相对光束传输因子 M_δ (定义为 $M_\delta = M^2 / M_0^2$)逐渐增大.并且,传输相同的距离后,初始相干性越好的光束,其 M_δ 增大幅度也越大.例如,当 $\beta = 0.4$ 时, $z = 5000 \text{ m}$ 处 $M_\delta(z)$ 与初始位置 $z = 0$ 处 $M_\delta(0)$ 的差值为 $M_\delta(z) -$

$M_\delta(0) = 8.6$; 当 $\beta = 0.8$ 时, $M_\delta(z) - M_\delta(0) = 16.4$; 当 $\beta = 1$ 时, $M_\delta(z) - M_\delta(0) = 20$. 由此可见, 在相同的湍流条件下, 初始相干性好的光束受到湍流的影响越明显, 相应的 M^2 因子变化也越明显, 为此, 我们可以采用相干性好的激光束作为光源, 通过大气湍流中 M^2 因子的测量来确定大气湍流参数. 接下来的计算均使用完全相干基模高斯光束.

图 3 显示了湍流因子 V 随 M^2 因子的变化, $z = 1000 \text{ m}$, $\beta = 1$. 图 3 表明, 湍流因子 V 是大气湍流中 M^2 因子的单调增函数. 由此可见, 只要通过实验测量出基模高斯光束经大气湍流传输后的 M^2 因子, 即可方便地获得湍流因子 V .

为了进一步更为清晰地反映湍流折射率结构常数的特征, 图 4 给出了大气湍流中折射率结构常数 C_n^2 的变化, $z = 1000 \text{ m}$, $\beta = 1$.

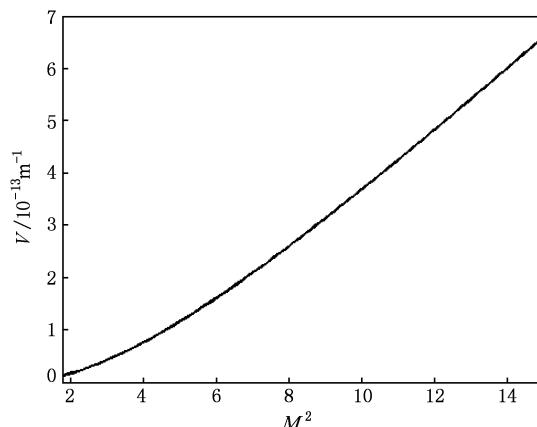


图 3 湍流因子 V 随 M^2 因子的变化

数 C_n^2 的变化, $z = 1000 \text{ m}$, $\beta = 1$.

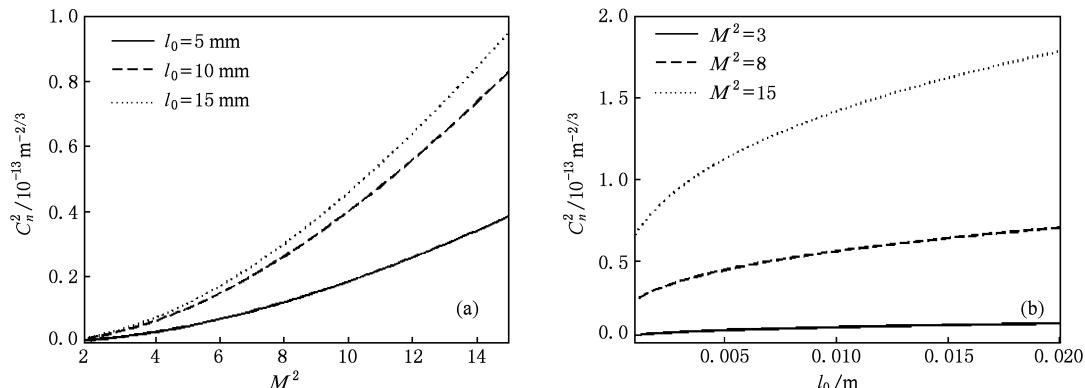
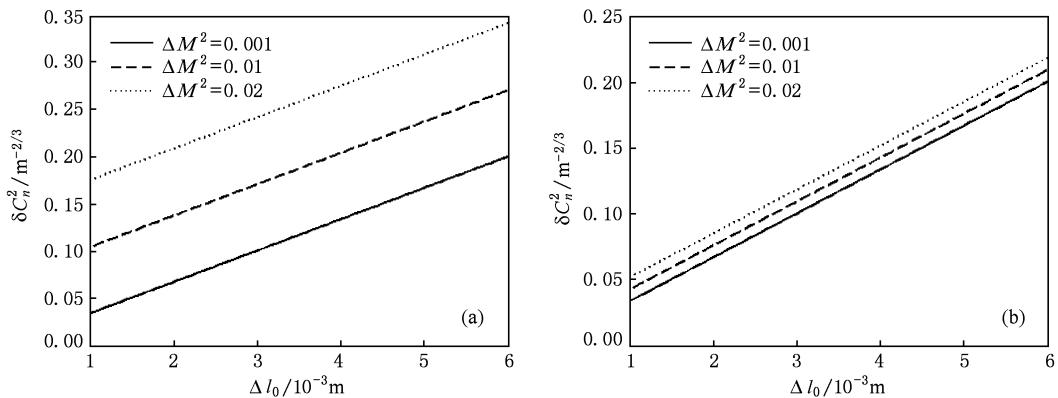


图 4 大气湍流中折射率结构常数 C_n^2 的变化 (a) 不同内尺度时随 M^2 因子变化; (b) 不同 M^2 因子时随内尺度变化

分析图 4(a)可知, 湍流折射率结构常数 C_n^2 随 M^2 因子的增大而增大, 并且, 内尺度越大, C_n^2 增大得越快. 大气的湍流运动是一种无规则的漩涡流动, 内尺度反映了涡旋的大小. 由于近地面湍流内尺度的值大都在几 mm 至十几 mm 的范围内, 据此我们将内尺度 l_0 的取值确定在 1—20 mm 之间^[18,19], 因而可以通过实验测量 M^2 因子的具体值来估算出 C_n^2 取值的范围. 图 4(b)显示出, C_n^2 随内尺度的增大而增大, 对于不同的 M^2 因子, C_n^2 的变化范围是不同的. 例如, 对于在大气湍流中传输 1000 m 的情况, 当 $M^2 = 3$ 时, C_n^2 取值范围为 $4.2 \times 10^{-15}—1.1 \times 10^{-14} \text{ m}^{-2/3}$; 当 $M^2 = 8$ 时, C_n^2 取值范围为 $2.6 \times 10^{-14}—7.0 \times 10^{-14} \text{ m}^{-2/3}$; 当 $M^2 = 15$ 时, C_n^2 取值范围为: $6.6 \times 10^{-14}—1.8 \times 10^{-13} \text{ m}^{-2/3}$.

为了说明 M^2 因子的测量误差以及湍流内尺度 l_0 的估计不准确所导致 C_n^2 的误差, 图 5 给出了 C_n^2 的相对误差的变化曲线, $l_0 = 0.01 \text{ m}$, $z = 1000 \text{ m}$, $\beta = 1$, (a) $M^2 = 3$; (b) $M^2 = 15$.

由图 5 可知, 湍流折射率结构常数 C_n^2 的相对误差随着湍流内尺度 l_0 估计误差 Δl_0 和 M^2 因子测量误差 ΔM^2 的增大而增大, 且随湍流内尺度 l_0 估计误差的变化更明显. 比较图 5(a) 和 (b) 可知, 当湍流越强时, 光束经湍流传输后的 M^2 因子越大, 则由 M^2 因子的测量误差以及湍流内尺度 l_0 的估计不准确所导致 C_n^2 的相对误差越小. 此外, 进一步分析图 5 可知, 如果能够通过其它方法^[1] 较为准确地测量出湍流内尺度, 则可较为准确地利用本文提出的方法确定出湍流折射率结构常数.

图 5 C_n^2 相对误差的变化 (a) $M^2 = 3$; (b) $M^2 = 15$

4. 结 论

本文给出了部分相干光在大气湍流中光束传输 M^2 因子的解析式, 通过分析大气湍流参数与湍流中 M^2 因子的定量关系, 提出了一种基于实验测量 M^2 因子而确定大气湍流参数的方法。结果表明, 对于给定的传输距离处, 湍流中的 M^2 因子随着湍流强度的增强和湍流涡旋内尺度的减小而明显增大, 大气湍流参数对激光束的光束传输 M^2 因子有着很显著的影响。由于激光束的光束传输 M^2 因子

在自由空间传输是保持不变的, 然而, 在大气中传输时因湍流的作用而会发生改变, 因此, 激光束的光束传输 M^2 因子经大气传输后的变化即可反映出大气湍流的特征, 从而通过实验测得大气传输后的光束传输 M^2 因子便可确定大气湍流参数。并且, 如果将内尺度在一定范围内进行取值时, 则可进一步利用本文的方法确定湍流折射率结构常数 C_n^2 的取值范围或对 C_n^2 取值进行估计。由于目前已有多种方法和仪器可方便、准确地对光束传输 M^2 因子进行测量^[9], 因此, 本文提出的通过实验测量 M^2 因子而确定大气湍流参数的方法较为简单、方便。

- [1] Consortini A, Sun Yi Yi, Innocenti C, Li Z 2003 *Opt. Commun.* **216** 19
- [2] Ji X L 2008 *J. Mod. Opt.* **55** 2105
- [3] Cai Y, Eyyuboglu H T, Baykal Y, *Opt. Commun.* 2008 **281** 5291
- [4] Wang T, Pu J X 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6754 (in Chinese) [王涛、蒲继雄 2007 物理学报 **56** 6754]
- [5] Zheng W W, Wang L Q, Xu J P, Wang L G 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 5098 (in Chinese) [郑巍巍、王丽琴、许静平、王立刚 2009 物理学报 **58** 5098]
- [6] Hill R J 1988 *Appl. Opt.* **27** 2187
- [7] Li W, Feng G Y, Huang Y, Li G, Yang H M, Xie X D, Chen J G, Zhou S H 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2461 (in Chinese) [李玮、冯国英、黄宇、李刚、杨火木、谢旭东、陈建国、周寿桓 2009 物理学报 **58** 2461]
- [8] Luo S R, Lü B D, Sun N C 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2145 (in Chinese) [罗时荣、吕百达、孙年春 2004 物理学报 **53** 2145]
- [9] Ruff J A, Siegman A E 1994 *Optical and Quantum Electronics* **26** 629
- [10] Wu J 1990 *J. Mod. Opt.* **37** 671
- [11] Dan Y Q, Zhang B, Pan P P 2008 *J. Opt. Soc. Am. A* **25** 2223
- [12] Ishimaru A 1978 *Wave Propagation and Scattering in Random Media* (New York: Academic Press)
- [13] Li J H, Yang A L, Lü B D 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 674 (in Chinese) [李晋红、杨爱林、吕百达 2009 物理学报 **58** 674]
- [14] Cai Y, Lin Q, Baykal Y, Eyyuboglu H T 2007 *Opt. Commun.* **278** 157
- [15] Dan Y Q, Zhang B 2009 *Opt. Lett.* **34** 563
- [16] Siegman A E 1998 *OSA TOPS* **17** 1
- [17] Xiaofeng Li 2007 *The Principle and Technology of the Satellite-to-ground Laser Communication Links* (National defense industry Press, Beijing) p130—132 (in Chinese) [李晓峰 2007 星地激光通信链路原理与技术 (北京: 国防工业出版社) 第 130—132 页]
- [18] Zhu W Y, Zhao Z L, Ma X S, Rao R Z 2005 *High Power Laser and Particle Beams* **17** 1461 (in Chinese) [朱文越、赵柱灵、马晓珊、饶瑞中 2005 强激光与粒子束 **17** 1461]
- [19] Ma X S, Zhu W Y, Rao R Z 2008 *Chinese Journal of Lasers* **35** 898 (in Chinese) [马晓珊、朱文越、饶瑞中 2008 中国激光 **35** 898]

Method for determining the characteristic parameters of the turbulence based on the measurement of M^2 -factor^{*}

Pan Ping-Ping Zhang Bin[†]

(College of Electronics Information, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

(Received 7 December 2009; revised manuscript received 14 April 2010)

Abstract

Based on the extended Huygens-Fresnel principle and theory for the turbulence, the analytical expression for the beam propagation factor (M^2 -factor) of partially coherent beams propagating in a turbulent atmosphere has been derived. The effects of the structure constant of the refractive index fluctuations C_n^2 and the inner scale of the turbulence l_0 on the M^2 factor have been analyzed quantitatively. Consequently, a new method for determining the characteristic parameters of the turbulence based on the measurement of the M^2 factor by experiments has been proposed. The results show that the laser beams with better spatial coherence property are more sensitive to the effects of turbulence, so the fundamental Gaussian beams with fully coherence can be used as the source in the measurement, and the usual instruments for measuring the M^2 -factor can be adopted as the experiment equipments. It is very simple and convenient to determine the characteristic parameters of the turbulence by applying the method proposed in this paper.

Keywords: beam propagation factor (M^2 -factor), characteristic parameters of turbulence, structure constant of refractive index fluctuations, inner scale of turbulence

PACS: 42.68. Bz

* Project supported by the Program for New Century Excellent Talents in Universities (Grant No. NCET-05-0487).

† Corresponding author. E-mail address: zhangbinff@sohu.com