

一维复合颗粒链中能量衰减的动力学分析*

王平建^{1)†} 夏继宏²⁾ 刘长松²⁾ 刘会¹⁾ 闫龙¹⁾

1) (山东工商学院信息与电子工程学院, 烟台 264005)

2) (中国科学院固体物理研究所, 合肥 230031)

(2009年9月14日收到; 2010年3月29日收到修改稿)

重颗粒区域由压缩到稀疏的结构转变导致了一维复合颗粒链中能量衰减的渡越行为, 并且这种结构转变与界面附近重颗粒的运动状态的变化密切相关. 分析表明这种运动状态的转变导致了界面处的反射率在两个分支存在较大差别, 从而导致了轻颗粒区域能量在两个分支以不同的速率衰减.

关键词: 复合颗粒链, 渡越

PACS: 45.70.-n, 46.40.Cd, 83.10.Tv

1. 引言

颗粒物质是地球上存在最多、最为人们所熟悉的物质之一, 同时它也是目前尚未得到很好认识理解的体系之一, 它表现出了许多不同于固、液、气态物质的奇特现象和独特的运动规律, 呈现出奇异的性质^[1-5]. Jaeger 等甚至认为可以把颗粒物质看作一个新的物态^[6].

由弹性颗粒组成的一维颗粒链是最简单的颗粒系统, 而且一维弹性颗粒链系统也表现出了许多独特的现象^[7-19]. 由相同颗粒组成的一维单一链, 颗粒之间刚好相互接触, 理论和实验都验证了弹性脉冲在这样的一维颗粒链中通过多个颗粒之间的相互作用(颗粒数目大于2)以孤立波的形式传播, 孤立波的宽度即孤立波包含的颗粒数目随着 p (颗粒之间的相互排斥势为 δ^p , δ 为相邻两个颗粒之间的压缩量, 对于赫兹势 $p=2.5$) 的增大而减小, 孤立波的相速只与颗粒材料和颗粒的最大速度有关. 孤立波在单一链上传播过程中, 其宽度和相速均保持不变. 颗粒物质可以作为保护介质, 例如战斗中防御阵地上的沙袋和跳远比赛中的沙坑等. 提到颗粒物质缓解冲击波的机理, 人们首先想到摩擦机理, 然而还有一种机理不为人们所熟知, 即波的分解. 孤立波从重颗粒区域传播到轻颗粒区域时, 一个孤

立波会分解成多个强度比较弱小的孤立波. 那么一个较强的相互作用就转变成多个比较弱小的相互作用. 孤立波从轻颗粒区域传播到重颗粒区域时, 一部分孤立波被透射出去, 剩余部分被反射, 只能传播部分能量. 基于此机理, 人们提出了不同的颗粒结构来缓解冲击波. Hong^[20] 提出了“颗粒箱”结构, 它由一系列质量不同, 弹性常数不同的颗粒组成. 这种“颗粒箱”结构具有奇特的性质, 它能把能量圈套在其中并缓慢地释放出来, 从而达到缓解冲击的作用. 保存在“颗粒箱”中的能量 (E_R) 以 $E_R = At^{-\gamma}$ 的形式衰减, 其中 γ 是一个普适常数, A 是与“颗粒箱”结构有关的物理量.

一维复合颗粒链由中间段的轻质量颗粒链和两端的重质量颗粒链组成, 它们构成了一个颗粒质量阱(简称颗粒阱). 我们应用模拟方法研究了冲撞能量在颗粒阱中的衰减行为. 冲撞能量也以幂率的形式衰减, 但发生了明显的渡越行为^[21,22]. 本文详细研究了发生渡越行为的动力学原因.

2. 计算方法

一维复合颗粒链由两套颗粒组成, 重颗粒(120 + 120) 和轻颗粒(180), 如图 1 所示.

重颗粒的颗粒为 m_1 , 半径为 R_1 ; 轻颗粒的质量为 m_2 , 半径为 R_2 . 为方便模拟, 所有的量均进行无

* 国家自然科学基金(批准号:10674135)资助的课题.

† E-mail: wpingjian@sohu.com

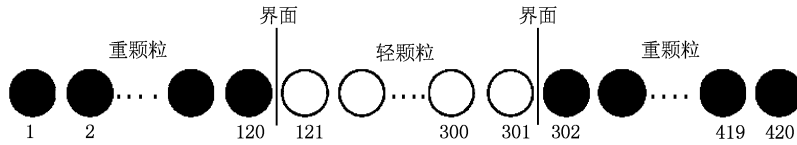


图1 一维复合颗粒链结构图

量纲化处理. 所有颗粒的半径设定为 50, 重颗粒质量为 100, 轻颗粒质量为 10. 复合颗粒链的两端是重颗粒, 中间是轻颗粒且链两端的重颗粒可以自由运动. 初始时刻, 相邻颗粒之间以相等的间隔排列, 左端第一个颗粒初始速度为 10, 其余颗粒的速度均为零. 当颗粒没有相互接触时, 它们自由运动; 当颗粒相互接触时发生完全弹性碰撞,

$$V'_i = V_i - \frac{2m_j}{m_i + m_j}(V_i - V_j),$$

$$V'_j = V_j + \frac{2m_j}{m_i + m_j}(V_i - V_j),$$

其中 V'_i, V'_j 是第 i, j 个颗粒碰撞后的速度, V_i, V_j 分别是它们碰撞前的速度. 我们采用事件驱动的分子动力学模拟方法.

3. 结果和讨论

轻颗粒区域中的能量随时间演化发生了明显的渡越行为, 即存在两个分支, 分别被称为压缩分支和稀疏分支, 在自然对数标尺下这两个分支都是线性变化的, 而渡越时刻 ($t_c \approx 1000$) 即为从压缩分支到稀疏分支转变的时刻, 如图 2(a) 所示. 压缩分支和稀疏分支的线性行为清楚地表明了, 轻颗粒区域中的能量在这两个分支中都以 $E_R = At^{-\gamma}$ 形式衰减. 而且由图 2(a) 可直接得出, 轻颗粒区域中的能量在这两个分支衰减的速率不同, 即在压缩分支衰减较慢, 在稀疏分支衰减较快. 也就是说, 轻颗粒区域中的能量在压缩分支衰减的幂率指数小于在稀疏分支衰减的幂率指数, 即 $\gamma_{cb} < \gamma_{sb}$.

我们引入相对压缩率的定义式如下:

$$\Delta_{i,j} = \frac{x_j - x_i - [R_i + (2R_{i+1} + \dots + 2R_{j-1}) + R_j]}{R_i + (2R_{i+1} + \dots + 2R_{j-1}) + R_j},$$

式中 x_i 为第 i 个颗粒的坐标, R_i 为第 i 个颗粒的半径. 此定义式说明, 当第 i 个颗粒到第 j 个颗粒之间的区域处于稀疏状态则相对压缩率大于零; 当第 i 个颗粒到第 j 个颗粒之间的区域处于压缩状态则相对压缩率小于零. 初始时刻, 任意两个颗粒 i, j 之间

的相对压缩率为 $\Delta_{i,j}(0) = 0.01$. 由于采用硬球模型, 所以任意时刻任意两个颗粒 i, j 之间的区域总是存在间隙, 即 $\Delta_{i,j}(t) > 0$. 任意时刻的相对压缩率与初始时刻的相对压缩率之差, 即 $\Delta_{i,j}(t) - \Delta_{i,j}(0)$ 随时间的变化如图 2(b) 所示. 重轻颗粒界面附近重颗粒区域中的 $\Delta_{100,120}(t) - \Delta_{100,120}(0)$ 和轻重颗粒界面附近重颗粒区域中的 $\Delta_{301,321}(t) - \Delta_{301,321}(0)$ 都存在从负值到正值的转变, 即相对于初始状态发生了压缩状态到稀疏状态的结构转变, 而且图 2 中的竖直线表明, 结构转变的时刻与轻颗粒区域中的剩余能量衰减发生渡越的时刻相一致. 整个轻颗粒区域的 $\Delta_{121,300}(t) - \Delta_{121,300}(0)$ 也存在从负值到正值的转变, 即相对于初始状态, 由压缩状态到稀疏状态的结构转变, 但是结构转变的时刻早于能量发生渡越的时刻. 显然, 相对于初始状态两个界面附近重颗粒区域从压缩态到稀疏态的结构转变导致了轻颗粒区域中能量衰减过程中的渡越行为. 另外, 我们可以看到, 在 t_c 时刻以前, 相对压缩率随时间缓慢增加, 说明颗粒间距逐步缓慢增大; 而在 t_c 时刻以

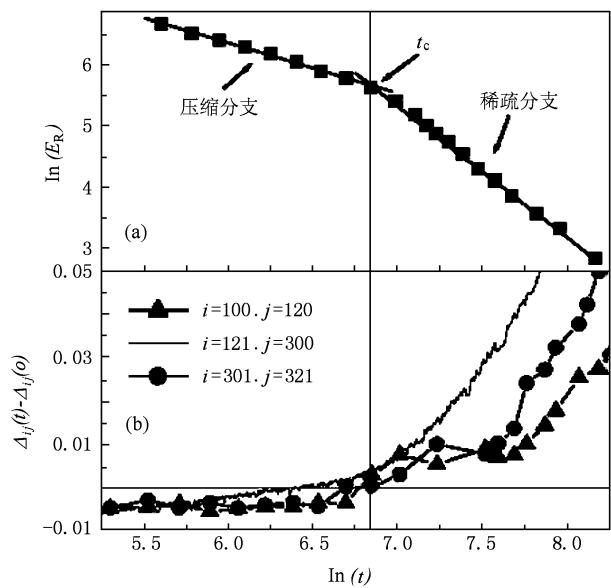


图2 (a) 轻颗粒区域中的剩余能量 (E_R) 随时间 (t) 的关系; (b) 界面附近重颗粒区域和整个轻颗粒区域相对于初始状态的相对压缩率随时间 (t) 的关系

后,相对压缩率随时间变化较快,说明颗粒间距增大很快,尤其是整个轻颗粒区域宽度快速增加.

对于硬球模型,弹性脉冲在单一链上传播仅仅通过相邻两个颗粒之间的弹性碰撞即速度的传递而实现,所以波的宽度即为一个颗粒.轻颗粒区域中存在大量的波,当一个波传播到两个颗粒界面时,界面处相邻的轻颗粒和重颗粒之间发生弹性碰撞,每次碰撞,轻颗粒的能量就会有一部分传递给重颗粒而其速度减小,然后这些能量再通过相邻两个重颗粒的弹性碰撞传递开来,也就是说轻颗粒区域中的一部分能量被透射到重颗粒区域,而轻颗粒区域中的两个波相遇时仅仅发生相同轻颗粒之间弹性碰撞,即发生速度的交换.我们记录下重轻颗粒界面和轻重颗粒界面处每次碰撞的反射情况如图3所示.其中反射率为轻颗粒碰撞后的能量与碰撞前的能量比值.反射率越大,由轻颗粒透射到重颗粒区域的能量就越少.反射率在压缩分支和稀疏分支以不同的方式随时间变化.能量衰减处于压缩分支,重轻界面和轻重界面的反射率在一个比较宽的范围内振荡.而且其反射率在两个界面存在一个共同的上限值,均为0.96.由动量守恒和能量守恒可知,质量为1的轻颗粒以任意速度与质量为100的静止重颗粒发生完全弹性碰撞,碰撞后与碰撞前轻颗粒的能量比值为0.96.所以这个上限值对应于界面处的轻颗粒与静止的重颗粒碰撞的反射率.而反射率的值小于0.96则说明碰撞是运动的轻颗粒和运动的重颗粒之间的弹性碰撞.由此我们可以得

到重颗粒的运动状态随时间的变化,即重颗粒随时间做走走停停的运动.此时的运动处于阻塞状态.这是因为此时相对于初始状态,两个界面附近的重颗粒区域处于压缩状态,界面附近重颗粒的运动受到阻碍.能量衰减处于稀疏分支时,重轻界面和轻重界面的反射率振荡减小.稀疏分支中并没有出现反射率的上限值.这说明在稀疏分支,界面处的重颗粒一直在运动,不存在静止状态.所以能量衰减的过程中,界面附近的重颗粒存在两种运动状态.而且两个界面处重颗粒运动状态的变化也与图2(b)中相对压缩率随时间的变化基本一致.能量衰减的压缩分支,此时界面附近重颗粒做走走停停的运动,颗粒间距增加较慢,反射率比较大,所以能量衰减慢;能量衰减的稀疏分支此时界面附近重颗粒做连续的运动,颗粒间距增加较快,反射率比较小,所以能量衰减比较快.两种运动状态的转变在两个界面发生的时刻不同.重轻界面处重颗粒运动状态的转变落后于轻重界面处重颗粒运动状态的转变,这是由于重轻界面处的弹性碰撞发生延迟引起的^[23].

保持轻颗粒的质量及轻重颗粒的个数不变,我们研究了重颗粒质量对能量衰减过程的影响.结果如图4所示,图4(a),(b)分别是轻颗粒区域的能量分别在压缩分支和稀疏分支时随时间的变化(为了便于比较,我们在双对数坐标尺下进行了平移,此操作不改变能量衰减的幂率指数 γ).能量衰减的压缩分支,重颗粒质量越大能量衰减就越慢, γ 值也就越小.能量衰减的稀疏分支,对于不同重质量的颗粒,它们的能量衰减随时间的变化完全重合,因此重颗粒质量的变化对能量衰减的速率没有影响.界面处的透射率和碰撞频率决定了轻颗粒区域能量衰减的快慢.进一步的计算表明,能量衰减的压缩分支,各个波之间相互影响较大,它们的碰撞频率不同,能量衰减也不同,所以我们从反射间歇机制的统计模型出发得到了能量衰减的幂率指数与重轻颗粒质量比和等待时间的关系^[22];能量衰减的稀疏分支,各个波之间的相互影响较小,对于能量大的波,每个波的能量均以 $A_1 t^{-\gamma}$ 的形式衰减,另外其碰撞频率随时间的变化基本上也都为 $A_1 t^{-\beta}$ 的形式,而且 γ 和 β 值均受重轻颗粒质量比的影响很小且与我们选取的波无关, A 和 A_1 的值与重轻颗粒质量比和所选取的波都有关系.由数据拟合得到 $\gamma \approx 2, \beta \approx 2$.我们做一个粗略的假设,假设在很短的 Δt 时间内,每次碰撞损失的能量相同,则 $E_R(t + \Delta t) - E_R$

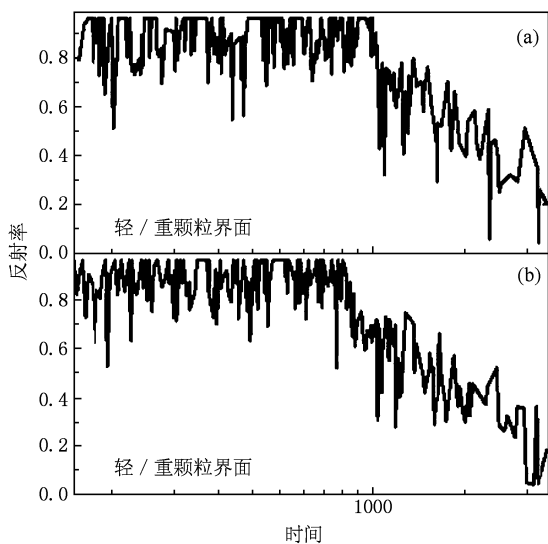


图3 轻颗粒在界面处的反射率随时间的关系 (a)重轻颗粒界面;(b)轻重颗粒界面

$(t) = -E_R(t)T_R A_1 t^{-\beta} \Delta t$, 整理后得 $T_R A_1 t = \gamma$, 其中 T_R 为透射率. 所以 $T_R = \gamma/A_1 t = A_2 t^{-\alpha}$, 即 $A_2 = \gamma/A_1$, $\alpha = 1$. 为验证我们的假设, 由单个波的透射率和时间关系的数据拟合得到参数 $\alpha \approx 1$, 符合的很好; 得到的参数 A_2 本身有较大的误差, 所以无法与 γ/A_1 值比较, 当重轻颗粒质量比取较大值时, 例如为 800 时, 拟合得到的参数 $\gamma = 2.04 \pm 0.01$, $\ln(A_1) =$

11.16 ± 0.21 , $\beta = 2.07 \pm 0.03$, $\ln(A_2) = -10.37 \pm 0.63$, $\alpha = 1.05 \pm 0.08$, 代入得 $A_1 A_2 = 2.20 \approx \gamma$, 基本符合. 这是因为, 重轻颗粒质量比越大, 单个波碰撞的次数就越多, 得到的数据就越多, 拟合时的误差就越小, 而且每次碰撞损失的能量就越小, 在较短得时间内, 每次碰撞损失的能量就越近似相等, 我们的假设就近似成立.

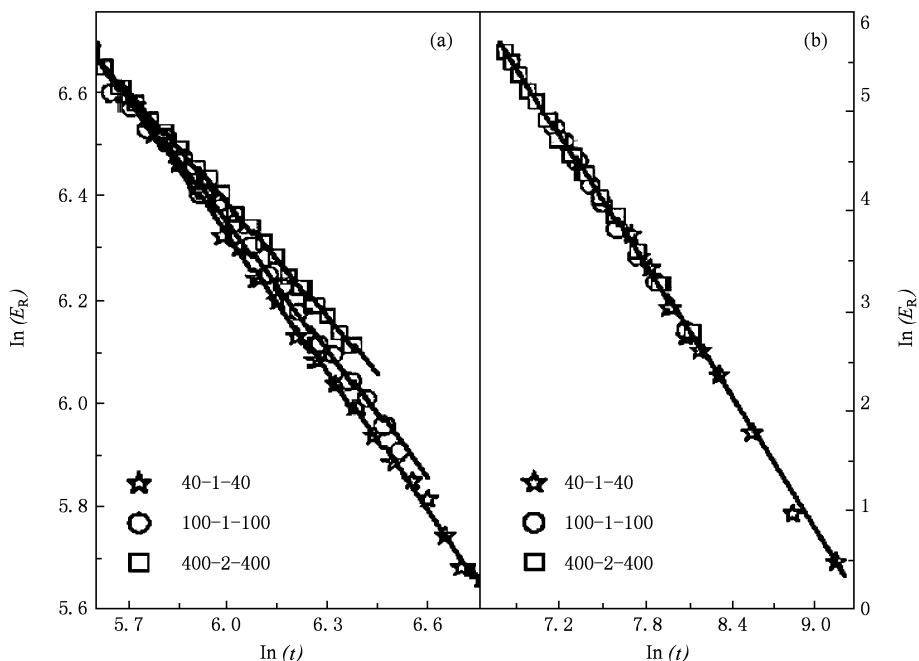


图4 重轻颗粒质量分别为40:1,100:1,400:1的复合颗粒链中的能量随时间的关系 (a)能量衰减的压缩分支;(b)能量衰减的稀疏分支

4. 结 论

轻颗粒区域的能量衰减过程中界面附近重颗粒区域由压缩到稀疏的转变导致能量衰减的渡越行为, 即压缩分支剩余能量随时间衰减较慢; 稀疏分支剩余能量随时间衰减较快. 而这种结构的转变是与界面附近重颗粒的运动状态转变密切相关的.

压缩分支, 界面附近重颗粒做走走停停运动, 反射率大则每次碰撞透射的能量小, 能量衰减就慢; 稀疏分支, 界面附近的重颗粒做连续的运动, 反射率小则每次碰撞透射能量大, 能量衰减快. 因此界面附近重颗粒运动状态的转变是能量衰减发生渡越的动力学原因. 在能量衰减的压缩分支, 重轻颗粒质量比越大能量衰减越快; 在能量衰减的稀疏分支, 能量衰减的快慢与重轻颗粒质量比无关.

[1] Lu K Q, Liu J X 2004 *Phys.* **33** 629 (in Chinese) [陆坤权、刘寄星 2004 物理 **33** 629]
 [2] Lu K Q, Liu J X 2004 *Phys.* **33** 713 (in Chinese) [陆坤权、刘寄星 2004 物理 **33** 713]
 [3] Li Y C, Zhang Z B, Tu H E, Liu R, Hu H Y, Hou M Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 5857 (in Chinese) [李寅圃、张兆部、涂洪恩、刘锐、胡海云、厚美瑛 2009 物理学报 **58** 5857]
 [4] Jiang Y M, Zheng H P 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7360 (in Chinese) [蒋亦民、郑鹤鹏 2008 物理学报 **57** 7360]
 [5] Sun Q C, Wang G Q 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4667 (in Chinese) [孙其诚、王光谦 2008 物理学报 **57** 4667]
 [6] Jaeger H M, Nagel S R, Behringer R P 1996 *Rev. Mod. Phys.* **68** 1259
 [7] Nesterenko V F 1984 *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **5** 733

- [8] Sen S, Manciu M, Manciu F S 1999 *Appl. Phys. Lett.* **75** 1479
 [9] Hong J, Xu A 2002 *Appl. Phys. Lett.* **81** 4868
 [10] Rosas A, Lindenberg K 2004 *Phys. Rev. E* **69** 037601
 [11] Daraio C, Nesterenko V F, Herbold E B, Jin S 2005 *Phys. Rev. E* **72** 016603
 [12] Job S, Melo F, Sokolow A, Sen S 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 178002
 [13] Vergara L 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 108002
 [14] Melo F, Job S, Santibanez F, Tapia F 2006 *Phys. Rev. E* **73** 041305
 [15] Coste C, Falcon E, Fauve S 1997 *Phys. Rev. E* **56** 6104
 [16] Daraio C, Nesterenko V F, Herbold E B, Jin S 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 058002
 [17] Nesterenko V F, Daraio C, Herbold E B, Jin S 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 158702
 [18] Manciu M, Sen S, Hurd A J 2000 *Phys. Rev. E* **63** 016614
 [19] Manciu F S, Sen S 2002 *Phys. Rev. E* **66** 016616
 [20] Hong J 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 108001
 [21] Wang P J, Xia J H, Li Y D, Liu C S 2007 *Phys. Rev. E* **76** 041305
 [22] Wang P J, Li Y D, Xia J H, Liu C S 2008 *Phys. Rev. E*(R) **77** 060301
 [23] Vergara L 2006 *Phys. Rev. E* **73** 066623

The dynamical analysis of energy decay in one-dimensional composite granular chain *

Wang Ping-Jian^{1)†} Xia Ji-Hong²⁾ Liu Chang-Song²⁾ Liu Hui¹⁾ Yan Long¹⁾

1) (School of Information & Electronics Engineering, Shandong Institute Of Business and Technology, Yantai 264005, China)

2) (Institute of Solid State Physics, Chinese Academy Sciences, Hefei 230031, China)

(Received 14 September 2009; revised manuscript received 29 March 2010)

Abstract

The structure transition from compression state to dilation state in both heavy-particle sections gives rise to the crossover of the energy decay in one-dimensional composite granular chain. And the structure transition closely relates to the change in state of motion of heavy grain at both interfaces. The analysis demonstrates that the change in state of motion gives rise to the great difference of reflectivity in both branches, which induces different rates of energy decay of light-particle section in both branches.

Keywords: composite granular chain, crossover

PACS: 45.70.-n, 46.40.Cd, 83.10.Tv

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10674135).

† E-mail: wpingjian@sohu.com