

准滑模控制应用于行人通道的交通瓶颈*

曾广湘 薛郁†

(广西大学物理科学与工程技术学院, 南宁 530004)

(2010 年 1 月 5 日收到; 2010 年 3 月 29 日收到修改稿)

单向行人交通在瓶颈处极易发生堵塞, 设置障碍会阻碍行人通行, 却能保证瓶颈处通畅. 本文将准滑模控制引入 LWR 模型中, 理论推导控制变量. 在三车道宏观交通流模型基础上, 模拟瓶颈处的障碍对行人流的影响, 解释设置障碍的作用. 研究表明准滑模控制变量的设置与阈值有关, 当阈值对应基本图的流量最大点时, 行人流量能保持最大值, 达到提高单向行人交通瓶颈处的行人流通过效率.

关键词: 交通瓶颈, 准滑模控制, LWR 模型

PACS: 45.70.Vn, 89.40, 47.85.ld

1. 引言

交通问题已经成为制约城市发展的严峻课题, 城市作为人口密集的地区, 踩踏事件时有发生, 行人出行的安全与行人交通的通畅成为人们关注的问题. LWR 模型^[1]是最早的并且仍然是最流行的宏观交通流模型, 该模型由 Lighthill 和 Whitham 于 1955 年提出的, Richards 也于 1956 年独自提出了相同的模型. May 认为行人交通在很多方面具有类似车辆交通的行为^[2], 可以将 LWR 模型应用于行人交通流的研究. 朱辉, 吴正, 林展熙提出了三车道宏观交通流模型, 研究了扰动的产生、传播及消散过程^[3]. PushkinKachroo 等^[4]为了应对紧急事件时的行人疏散, 在 LWR 模型中引进反馈线性化控制等多种控制方法, 尝试对行人流进行控制, 对行人流的整体控制具有启发意义. 滑模控制^[5]广泛的应用于各种工业控制对象之中, 是一种常用的非线性控制方法. 最近, 人们已经将元胞自动机模型和格子气模型应用于行人交通^[6,7], 在 LWR 模型的基础上, 人们也提出了行人交通流的格子流体力学模型^[8,9], 因此, 将控制理论应用于拥堵人群的疏散动力学过程具有比较现实的意义. 本文着眼于最易发生堵塞的单向行人交通瓶颈, 将准滑模控制引入

LWR 模型中, 解释在瓶颈处设置障碍的作用, 得出优化障碍设置的理论依据.

2. 准滑模控制

准滑模态是指系统的运动轨迹被限制在理想滑模态的某一 Δ 邻域内的模态. 在行人交通中, 一般情况下行人密度 $0 \leq \rho \leq \rho_{\text{jam}}$, 其中, ρ 是行人流密度, ρ_{jam} 是行人流堵塞密度. 当在瓶颈处设置障碍时, 相当于给行人流密度限制了一个阈值 ρ_{th} , 将行人流密度控制在阈值之内 $0 \leq \rho \leq \rho_{\text{th}}$. 当行人流密度 $\rho \leq \rho_{\text{th}}$ 时, 障碍不阻碍行人; 当行人流密度 $\rho > \rho_{\text{th}}$ 时, 障碍对行人起阻碍作用. 本文假设障碍的作用相当于准滑模控制, 切换函数 $s = \rho_{\text{th}} - \rho$, 邻域 $0 \leq \Delta \leq \rho_{\text{th}}$, 当切换函数 $s \in \Delta$ 时不启动控制; 一旦切换函数 $s \notin \Delta$ 就启动控制, 即将行人流密度限制在 Δ 邻域内.

采用 LWR 模型模拟行人流动, 行人流密度为 ρ , 速度为 v 得

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

其中 v 采用 Greenshields^[10] 平衡速密关系

$$v = v_f \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\text{jam}}} \right), \quad (2)$$

其中, 参数 v_f 是自由速度, ρ_{jam} 是堵塞密度.

一般情况下, 障碍只设置在瓶颈处, 所以控制

* 国家自然科学基金(批准号: 10865001), 国家重点基础研究发展计划(批准号: 2006CB705500), 广西研究生创新计划项目(批准号: 105930903077)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: yuxuegxu@gxu.edu.cn

点也在瓶颈处. 令瓶颈处行人流密度为 ρ_b , 速度为 v_b , 控制变量为 u , 得到含有控制变量的 LWR 模型

$$\frac{\partial \rho_b}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_b v_b)}{\partial x} + u = 0. \quad (3)$$

为了求出控制变量 u , 令切换函数为

$$s = \rho_{th} - \rho_b, \quad (4)$$

其中 $0 \leq \rho_{th} \leq \rho_{jam}$, $\rho_{th} = \rho_{jam}$ 时即无障碍, $\rho_{th} = 0$ 时通道关闭. 当 $0 \leq s \leq \rho_{th}$ 时不施加准滑模控制 $u = 0$, 当 $s < 0$ 时启动准滑模控制. 切换函数随时间的变化为

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{\partial \rho_b}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho_b v_b)}{\partial x} + u. \quad (5)$$

构建李雅普诺夫函数得

$$V = \frac{1}{2}s^2. \quad (6)$$

为了使切换函数趋于零, 要求李雅普诺夫函数随时间的偏微分满足

$$\frac{\partial V}{\partial t} = s \frac{\partial s}{\partial t} = (\rho_{th} - \rho_b) \left(-\frac{\partial(\rho_b v_b)}{\partial x} + u \right) \leq 0. \quad (7)$$

因为 $s < 0$ 时, 准滑模控制才启动, 所以必有

$$s = \rho_{th} - \rho_b < 0. \quad (8)$$

只要控制变量 u 满足

$$\frac{\partial(\rho_b v_b)}{\partial x} + u \geq 0. \quad (9)$$

李雅普诺夫函数 V 就是稳定的. 系统在控制变量 u 的作用下, 经过一段时间会回到切换面上. 但是现实生活中的障碍对瓶颈的限制非常严格, 决不允许行人流密度超过阈值 ρ_{th} , 所以一旦行人流密度超过阈值 ρ_{th} , 控制变量 u 即使使行人密度 $\rho_b = \rho_{th}$, 令切换函数回到切换面 $s = \rho_{th} - \rho_b = 0$ 上. 满足这个条件的控制变量为

$$u = \begin{cases} 0, & s \geq 0, \\ -\frac{\partial(\rho_b v_b)}{\partial x}, & s < 0. \end{cases} \quad (10)$$

综合 $s \geq 0$ 与 $s < 0$ 两种情况, 在不改变控制变量性质的情况下, 我们改变 u 的形式为

$$u = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{s}{|s|} \right) \frac{\partial(\rho_b v_b)}{\partial x}. \quad (11)$$

观察方程(1), 控制变量相当于在 LWR 模型中加入一个源汇项 u , 为了保证行人流密度守恒, 要求通道与瓶颈的连接部分的连续性方程加入源汇项 $(-u)$, 令通道与瓶颈的连接部分的行人流密度为 ρ_l , 速度为 v_l , 得

$$\frac{\partial \rho_l}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_l v_l)}{\partial x} - u = 0. \quad (12)$$

方程(3)包含控制变量 u 对瓶颈处行人流的作用, 方程(12)表明控制变量 u 的作用传递到通道与瓶颈的连接部分, 方程(3), (12)一起保证了行人流量的守恒.

3. 数值模拟

连接两条宽度不同的通道表示单向行人交通瓶颈, 行人由宽通道进入窄通道, 连接处即为瓶颈. 如图 1 所示, 宽通道借鉴可换道的三车道宏观交通流模型^[3], 窄通道用单车道 LWR 模型, 箭头表示行人行走的方向. b 为瓶颈, 采用连续性方程(3); 窄通道采用连续性方程(1); 代表宽通道的三条路段采用连续性方程

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_i v_i)}{\partial x} = S_i(x, t), \quad i = 1, 2, 3, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} S_1 &= \alpha \rho_2 v_2, & \text{当 } \rho_1 \leq 0.9 \bar{\rho}_{12} \text{ 且 } \rho_2 \geq 1.1 \bar{\rho}_{12}, \\ S_1 &= -\alpha \rho_1 v_1, & \text{当 } \rho_2 \leq 0.9 \bar{\rho}_{12} \text{ 且 } \rho_1 \geq 1.1 \bar{\rho}_{12}, \\ S_3 &= \alpha \rho_2 v_2, & \text{当 } \rho_3 \leq 0.9 \bar{\rho}_{23} \text{ 且 } \rho_2 \geq 1.1 \bar{\rho}_{23}, \\ S_3 &= -\alpha \rho_3 v_3, & \text{当 } \rho_2 \leq 0.9 \bar{\rho}_{23} \text{ 且 } \rho_3 \geq 1.1 \bar{\rho}_{23}, \\ S_2 &= -(S_1 + S_3), \end{aligned} \quad (14)$$

l 为通道与瓶颈的连接部分, 作为路段 2 的特殊部分, 连续性方程加入瓶颈处控制变量的反馈 $(-u)$ 得

$$\frac{\partial \rho_l}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_l v_l)}{\partial x} - u = S_2(x, t). \quad (15)$$

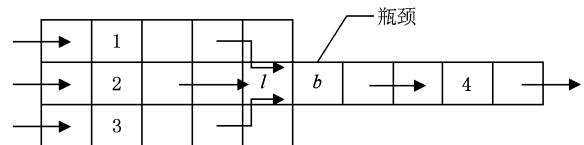


图 1 瓶颈模型 (b 为瓶颈, l 为通道与瓶颈的连接部分)

由于计算时只关心密度的相对变化, 采用无量纲密度 ρ/ρ_{jam} , ρ_b/ρ_{jam} , ρ_l/ρ_{jam} 替代原方程中的 ρ, ρ_b, ρ_l , 且不改变记号, 其中 $\rho_{jam} = 1$ 为单条路段的最大行人流密度. 单条路段无量纲行人流密度的变化范围为 $[0, 1]$. 自由速度为 $v_f = 1.36$ m/s. 初始分布除了三条路段入口处, 所有路段的行人流密度为零. 宽通道入口采用 Dirichlet 边界条件, 三条单位路段入口的行人流密度为 $\rho = 0.4$; 窄通道出口采用 Neumann 边界条件 $\partial \rho / \partial x = 0$. 采用有限差分方法对该模型进行数值离散, 采用文献[11]和[12]的差分

格式,宽通道、连接部分、瓶颈、窄通道的差分格式分别为

$$\begin{aligned}\rho_{i,k}^{j+1} = & \rho_{i,k}^j + \frac{\Delta t}{\Delta x} \rho_{i,k}^j (v_{i,k}^j - v_{i+1,k}^j) \\ & + \frac{\Delta t}{\Delta x} v_{i,k}^j (\rho_{i-1,k}^j - \rho_{i,k}^j) + S_{i,k}, \\ & k = 1, 2, 3, \quad (16)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho_l^{j+1} = & \rho_l^j + \frac{\Delta t}{\Delta x} \rho_l^j (v_l^j - v_b^j) + \frac{\Delta t}{\Delta x} v_l^j (\rho_{l+}^j + \rho_{l-}^j \\ & + \rho_{l-}^j - \rho_l^j) - u + S_{l,2}, \quad (17)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho_b^{j+1} = & \rho_b^j + \frac{\Delta t}{\Delta x} \rho_b^j (v_b^j - v_{b+}^j) \\ & + \frac{\Delta t}{\Delta x} v_b^j (\rho_l^j - \rho_b^j) + u, \quad (18)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho_i^{j+1} = & \rho_i^j + \frac{\Delta t}{\Delta x} \rho_i^j (v_i^j - v_{i+1}^j) \\ & + \frac{\Delta t}{\Delta x} v_i^j (\rho_{i-1}^j - \rho_i^j), \quad (19)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u = & -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{s}{|s|} \right) \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \rho_b^j (v_b^j - v_{b+1}^j) \right. \\ & \left. + \frac{\Delta t}{\Delta x} v_b^j (\rho_l^j - \rho_b^j) \right). \quad (20)\end{aligned}$$

为了分析不同阈值对瓶颈处的影响,分别令 $\rho_{th_1} = \rho_{jam}, \rho_{th_2} = \rho_{jam}/1.5, \rho_{th_3} = \rho_{jam}/2, \rho_{th_4} = \rho_{jam}/4$ 进行模拟, ρ_{th_1} 相当于未加入控制. 图 2 是数值模拟结果,对比 ρ_{th_1} 与 ρ_{th_3} 时的行人流密度分布,加入控制后瓶颈处的行人流密度受到控制,行人流密度比未加控制时低.

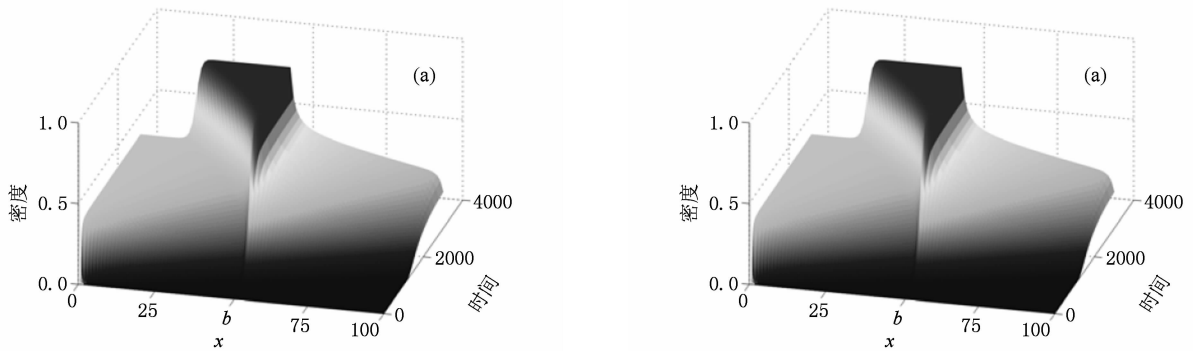


图 2 (a) 是阈值为 ρ_{th_1} 时中间路段 2,4 的行人流密度分布; (b) 是阈值为 ρ_{th_3} 时中间路段 2,4 的行人流密度分布, b 为瓶颈

4. 讨 论

对比图 3(a) 中不同阈值时中间路段 2,4 上的密度分布, 阈值越小瓶颈处行人流密度越小, 准滑模控制限制了瓶颈处的行人流密度. 堵塞时, 低阈值时的行人流密度超过高阈值时的行人流密度, 这是由于方程 (12) 中的 $(-u)$ 项加快了低阈值时的堵塞; 堵塞的中部, 行人流密度的大小随阈值的减小而增大, 但是阈值 $\rho_{th_1}, \rho_{th_2}, \rho_{th_3}$ 的差别并不大. 堵塞的后部, 堵塞的传播随着阈值的减小而加快. 采用 Greenshields 数密关系的 LWR 模型的特征速度为

$$c = \frac{\partial(\rho v)}{\partial \rho} = v_f \left(1 - \frac{2\rho}{\rho_{jam}} \right). \quad (21)$$

当行人流密度 $\rho > \rho_{jam}/2$ 时, 特征速度随密度 ρ 的增大而增大, 堵塞波的传播也越快.

图 3(b), (c) 中左边路段行人流量在堵塞部分减小, 瓶颈处未发生拥堵时右边路段与左边路段总的行人流量相等. 行人流量在瓶颈处随着行人流密度一起受到控制, 当阈值 $\rho_{th} \leq 0.5$ 时瓶颈处与其左右两边行人流量平稳; 当阈值 $\rho_{th} > 0.5$ 时, 瓶颈处的行人流量低于两边路段行人流量, 瓶颈处产生拥堵, 但是控制的存在仍能缓解瓶颈处拥堵的程度.

从图 3(d) 对比不同阈值对瓶颈处行人流的影响, 当行人流稳定后, 准滑模控制的阈值存在一个最佳值. 当阈值的设置为堵塞密度的一半时, 流量最大最稳定, 这与 LWR 模型与 Greenshields 数密关系下的基本图的结果是一致的. 当瓶颈处行人流量保持最大值时, 行人流通过瓶颈的效率最高. 当阈值趋于零时, 瓶颈处的行人流受到严重阻碍, 流量低于未加控制时的行人流量, 准滑模控制产生了负面影响.

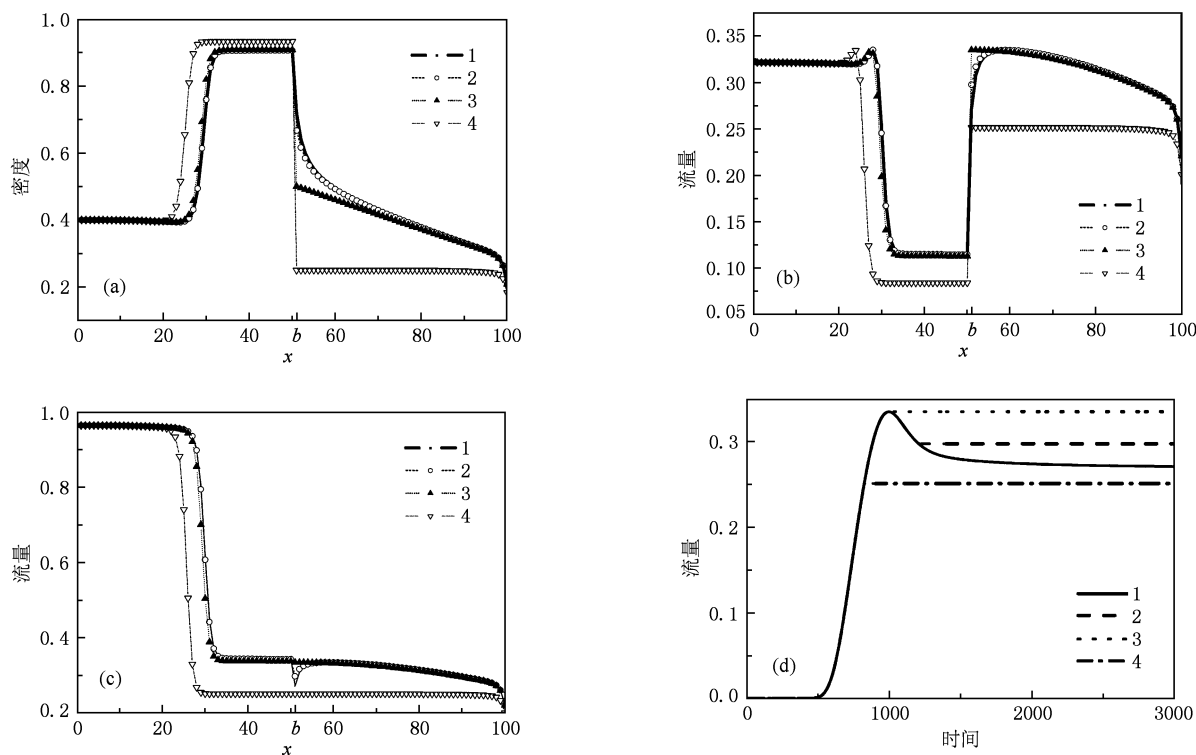


图3 (a)和(b)分别为不同阈值下路段2,4的行人流密度和流量的分布;(c)为不同阈值下所有路段总的行人流量的分布;(d)为不同阈值时瓶颈 b 处的行人流量随时间变化. b 为瓶颈

5. 结 论

准滑模控制解释了单向行人交通瓶颈处障碍设置的物理意义和可行性,虽然障碍对行人流起阻碍作用,但是恰当的设置障碍却能保证瓶颈的通畅,使行

人通过瓶颈的效率最高. 准滑模控制变量的设置与阈值有关,当阈值对应基本图的流量最大点时,行人流量能保持最大值,这对现实工程中障碍的设置具有一定指导意义. 准滑模控制是一种非线性控制方法,基于瓶颈处行人流密度的切换函数,对 Greenshields 平衡速密关系外的非线性平衡速密关系同样可适用.

- [1] Lighthill M J, Whitham G B 1955 *Proc. R. Soc. A* **229** 1178
- [2] May A D 1990 *Traffic Flow Fundamentals* (Prentice Hall, New Jersey) p210
- [3] Zhu Hui, Wu Zheng, Lin Zhanxi 2009 *CJTAM* **41** 4248 (in Chinese) [朱 辉、吴 正、林展熙 2009 力学学报 **41** 4248]
- [4] PushkinKachroo P E, Wadoo S A, Al-nasur S J, Shende A 2008 *Pedestrian Dynamics Feedback Control of Crowd Evacuation* (Berlin: Springer-Verlag) p96
- [5] liu J K (Beijing: [流金琨 2005 滑模变结构控制 MATLAB 仿真 (北京:清华大学出版社)第 44 页]
- [6] Yue H, Shao C F, Yao Z S 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4523 (in Chinese) [岳 昊、邵春福、姚智胜 2009 物理学报 **58** 4523]
- [7] Zhou J W, Kuan H, Liu M R, Kong L J 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3001 (in Chinese) [周金旺、邝 华、刘慕仁、孔令江 2009 物理学报 **58** 3001]
- [8] Xue Y, Tian H H, He H D, Lu W Z, Wei Y F 2009 *Eur. Phys. J. B* **69** 289
- [9] Tian H H, Xue Y, He H D, Wei Y F, Lu W Z 2009 *Physica A* **388** 2895
- [10] Greenshields B D 1935 *HRB* **14** 458
- [11] Papageorgiou M 1983 *Application of automatic control concepts to traffic flow modeling and control* (Spring-Verlag, New York) p 4
- [12] Jiang R, Wu Q S, Zhu Z J 2002 *Transp. Res. B* **36** 405

Application of the quasi-sliding-mode control to traffic bottleneck in pedestrian channel^{*}

Zeng Guang-Xiang Xue Yu[†]

(*Institute of Physical Science and Engineering, Guangxi University, Nanning 53004, China*)

(Received 5 January 2010; revised manuscript received 29 March 2010)

Abstract

The congestion of pedestrian traffic occurs easily at the bottleneck. Barriers could impede pedestrian channel, but it can ensure the smooth flow of pedestrians. Quasi-sliding mode control will be introduced in LWR model. The control variable can be derived for simulation at the impact of barriers. Based on the three-lane macroscopic traffic flow model, we carry out simulation to verify our control methods. The results indicate that the maximum pedestrian flow can be maintained due to the threshold value of the quasi-sliding mode control variables as the threshold value corresponds to one of the maximum flows in the fundamental diagram. Optimization of control variables can improve efficiency of one-way pedestrian at bottleneck.

Keywords: bottleneck, quasi-sliding-mode control, LWR model

PACS: 45.70.Vn, 89.40, 47.85.ld

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10865001), the National Basic Research Program of China (Grant No. 2006CB705500), the Graduate Student Innovative Foundation of Guangxi Zhuang Autonomous Region (No. 105930903077).

[†] Corresponding author. E-mail: yuxuegxu@gxu.edu.cn