一类奇摄动薄板弯曲问题的匹配渐近解*

徐 惠[1)] 陈丽华[2)] 莫嘉琪[3)†]

1)(安徽财经大学统计与应用数学学院, 蚌埠 233030)

2)(福建师范大学福清分校数学与计算机科学系, 福清 350300)

3)(安徽师范大学数学系, 芜湖 241003)

(2010 年 12 月 25 日收到;2011 年 1 月 11 日收到修改稿)

研究了一类薄板弯曲问题. 对四阶奇摄动边值问题, 引入伸长变量, 构造边界附近的内层解, 然后与外部解匹配. 最后用合成展开式理论, 得到了原问题的的渐近解.

关键词: 薄板弯曲, 挠度, 渐近解.

PACS: 02. 30. Mv

1. 引 言

板壳理论在弹性力学中是一个很重要的研究方面. 早在上世纪中期许多学者就作了很多的贡献[1—4]. 近来也有许多研究[5,6]. 关于薄板弯曲的数学模型,一般需要用特殊的方法去求得问题的近似解. 近来许多学者已经研究了奇摄动问题. 一些近似方法不断地被优化[7—9]. 莫嘉琪等利用渐近方法也讨论了一类非线性奇摄动问题[10—12]. 本文是利用匹配渐近理论, 有效地得到了一类被广泛应用的薄板弯曲问题的渐近解析解.

2. 薄板弯曲的挠度模型及其外部解

讨论如下环形薄板弯曲的挠度方程:

$$\Delta^2 W - \frac{N(r)}{D}\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} = 0,\ a \leqslant r \leqslant b,$$

其中 W 为挠度函数, $D = \dfrac{Eh^2}{12(1-\nu^2)}$ 为薄板的弯曲刚度, $N(r)$ 为薄板径向力, h 为薄板的厚度, E 为 Young 弹性模量, ν 为 Poisson 比, Δ 为 Laplace 算子, a 和 b 分别为环形板的内缘和外缘半径. 现在考虑的是薄板不具有环向力和剪力, 即 $N_\theta = N_{r\theta} = 0$, 且 $\varepsilon = \dfrac{h^2}{12a^2(1-\nu^2)} \ll 1$ 的情形. 这时环形薄板弯曲的挠度方程为

$$\varepsilon^2 \Delta^2 W - N(r)\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} = 0,\ a \leqslant r \leqslant b. \tag{1}$$

设对应于方程(1)的边界条件为

$$W|_{r=a} = A_0, W|_{r=b} = B_0,$$
$$\left.\frac{\partial W}{\partial r}\right|_{r=a} = A_1, \left.\frac{\partial W}{\partial r}\right|_{r=b} = B_1, \tag{2}$$

其中 $A_i, B_i (i = 0,1)$ 为常数.

显然, 薄板弯曲方程(1)的挠度函数只与径向变量 r 有关, 即 $W = W(r)$. 由 Laplace 算子的径向表示式, 薄板弯曲挠度方程(1)可写为

$$\varepsilon^2\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)^2 W - N(r)\frac{\mathrm{d}^2 W}{\mathrm{d}r^2} = 0. \tag{3}$$

现构造薄板弯曲模型(2),(3)的外部解 $\overline{W}$. 设它可表示为 ε 的幂级数

$$\overline{W} = \sum_{i=0}^{\infty} w_i(r)\varepsilon^i. \tag{4}$$

将(4)式代入方程(3), 合并 ε 的同次幂的系数, 并令 $\varepsilon^i (i = 0,1)$ 的系数为零,可得

$$\frac{\mathrm{d}^2 w_i}{\mathrm{d}r^2} = 0, i = 0,1. \tag{5}$$

* 国家自然科学基金(批准号:40876010)、中国科学院战略性先导科技专项一应对气候变化的碳收支认证及相关问题项目(批准号:XDA01020304)、LASG 国家重点实验室专项经费、上海市教育委员会 E-研究院建设计划(批准号: E03004)、浙江省自然科学基金 (批准号: Y6110502)、安徽高校省级自然科学研究项目(批准号:KJ2011A135,KJ2011Z003)和福建省教育厅基金(A 类)(批准号: JA10288) 资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: mojiaqi@ mail. ahnu. edu. cn

方程(5)的解为

$$w_i(r) = C_i + D_i r, i = 0,1, \tag{6}$$

其中 $C_i, D_i (i = 0,1)$ 为任意常数. 于是由(4)式便得到薄板弯曲模型外部解 $\overline{W}$ 的一次近似展开式 $\overline{W}_1$

$$\overline{W}_1(r) = [C_0 + D_0 r] + \varepsilon[C_1 + D_1 r], \tag{7}$$

其中 $C_i, D_i (i = 0,1)$ 为待定常数.

由(7)式得到的薄板弯曲模型的渐近解, 未必满足边界条件(2). 为此我们尚需分别在环形薄板的内、外缘边界 $r = a$ 和 $r = b$ 附近构造内层解.

3. 环形薄板模型的内层解

1) 内缘边界 $r = a$ 的内层解问题

引入伸长变量

$$\xi = \frac{r - a}{\varepsilon}. \tag{8}$$

于是有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} = \varepsilon^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}, \quad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} = \varepsilon^{-2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2}.$$

设在内缘边界 $r = a$ 附近的内层解为 U. 这时方程(3)为

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon\xi + a}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 U - N(\varepsilon\xi + a)\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}\xi^2} = 0. \tag{9}$$

再设 U 为

$$U = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(\xi)\varepsilon^i. \tag{10}$$

将(10)式代入(9)和(2)式中的第 1,3 式, 合并 ε 的同次幂的系数, 并分别令 $\varepsilon^i (i = 0,1)$ 的系数为零. 可得

$$\frac{\mathrm{d}^4 u_0}{\mathrm{d}\xi^4} - N(a)\frac{\mathrm{d}^4 u_0}{\mathrm{d}\xi^2} = 0. \tag{11}$$

$$u_0\big|_{\xi=0} = A_0, \frac{\mathrm{d}^4 u_0}{\mathrm{d}\xi}\bigg|_{\xi=0} = 0, \tag{12}$$

$$\frac{\mathrm{d}^4 u_1}{\mathrm{d}\xi^4} - N(a)\frac{\mathrm{d}^2 u_1}{\mathrm{d}\xi^2} = -\frac{2}{a}\frac{\mathrm{d}^3 u_0}{\mathrm{d}\xi^3} + \xi N'(a)\frac{\mathrm{d}^2 u_0}{\mathrm{d}\xi^2}, \tag{13}$$

$$u_1\big|_{\xi=0} = 0, \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}\xi}\bigg|_{\xi=0} = A_1. \tag{14}$$

2) 外缘边界 $r = b$ 的内层解问题

引入伸长变量

$$\eta = \frac{b - r}{\varepsilon}. \tag{15}$$

于是有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} = -\varepsilon^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}, \quad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} = \varepsilon^{-2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\eta^2}.$$

设在外缘边界 $r = 1$ 附近的内层 解为 V. 这时方程(3)为

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\eta^2} - \frac{\varepsilon}{b - \varepsilon\eta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\right)^2 V - N(b - \varepsilon\eta)\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}\eta^2} = 0. \tag{16}$$

再设 V 为

$$V = \sum_{i=0}^{\infty} v_i(\xi)\varepsilon^i. \tag{17}$$

将(17)式代入(16)和(2)式中的第 2,4 式, 合并 ε 的同次幂的系数, 并分别令 $\varepsilon^i (i = 0,1)$ 的系数为零. 可得

$$\frac{\mathrm{d}^4 v_0}{\mathrm{d}\eta^4} - N(b)\frac{\mathrm{d}^2 v_0}{\mathrm{d}\eta^2} = 0. \tag{18}$$

$$v_0\big|_{\eta=0} = B_0, \frac{\mathrm{d}v_0}{\mathrm{d}\xi}\bigg|_{\eta=0} = 0, \tag{19}$$

$$\frac{\mathrm{d}^4 v_1}{\mathrm{d}\eta^4} - N(b)\frac{\mathrm{d}^2 v_1}{\mathrm{d}\eta^2} = \frac{2}{b}\frac{\mathrm{d}^3 v_0}{\mathrm{d}\eta^3} - \eta N'(b)\frac{\mathrm{d}^2 v_0}{\mathrm{d}\eta^2}. \tag{20}$$

$$v_1\big|_{\eta=0} = 0, \frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}\eta}\bigg|_{\eta=0} = B_1, \tag{21}$$

4. 零次内层解及其与外部解匹配

1. 零次内层解.

i) 薄板内缘边界 $r = a$ 附近的零次内层解. 由(11)和(12)式, 得到具有边界层性态内层解的零次项

$$u_0(\xi) = A_0 + c_0(\exp(-\sqrt{N(a)}\xi) + \sqrt{N(a)}\xi - 1). \tag{22}$$

于是, 我们便构造了在内缘边界 $r = a$ 附近的内层解 U 的零次渐近式 U_0

$$U_0(\xi) = A_0 + c_0(\exp(-\sqrt{N(a)}\xi) + \sqrt{N(a)}\xi - 1), \tag{23}$$

其中 c_0 为任意常数.

ii) 薄板外缘边界 $r = b$ 附近的零次内层解. 由(18)和(19)式, 得到具有边界层性态内层解的零次项

$$v_0(\eta) = B_0 + d_0(\exp(-\sqrt{N(b)}\eta)$$

$$+\sqrt{N(b)}\eta-1).\tag{24}$$

于是，我们便构造了在外缘边界 $r=b$ 附近的内层解 V 的零次渐近式 V_0

$$V_0(\eta)=B_0+d_0(\exp(-\sqrt{N(b)}\eta)+\sqrt{N(b)}\eta-1),\tag{25}$$

其中 d_0 为任意常数.

2. 现用 Van Dyke 匹配原理[8,9]，将环形薄板模型的零次外部解和环形薄板内、外缘边界零次内层解分别进行匹配.

i) 将外部解(7)式的零次渐近式 C_0+D_0r 中的外变量 r 由内变量 ξ 来表示，得到 $C_0+(\varepsilon\xi+a)D_0$. 固定 ξ 按 ε 展开，取其关于 ε 的零次幂项的内展开式 $(\overline{W}_{0_1})^i$ 得

$$(\overline{W}_0)^i=C_0+aD_0.\tag{26}$$

将零次内层解(23)式 $A_0+c_0[\exp(-\sqrt{N(a)}\xi)+\sqrt{N(a)}\xi-1]$ 中的内变量 ξ 由外变量 r 来表示. 得到 $A_0+c_0\left[\exp\left(-\sqrt{N(a)}\frac{r-a}{\varepsilon}\right)+\sqrt{N(a)}\frac{r-a}{\varepsilon}-1\right]$. 固定 r 按 ε 展开，得到 $A_0+c_0\left[\sqrt{N(a)}\frac{r-a}{\varepsilon}-1\right]+EST$，其中 EST 表示具有指数型衰减的项. 然后取其关于 ε 的零次幂项为主项的外展开式 $(U_0)^o$ 得

$$(U_0)^o=A_0,\ c_0=0.\tag{27}$$

由匹配原则[8,9]和(26)，(27)式，有

$$C_0+aD_0=A_0,\quad c_0=0.\tag{28}$$

ii) 将外部解(7)式的零次渐近式 C_0+D_0r 中的外变量 r 由内变量 η 来表示，得到 $C_0+(b-\varepsilon\eta)D_0$. 固定 η 按 ε 展开，取其关于 ε 的零次幂项的内展开式 $(\widetilde{W}_{0_1})^i$ 得

$$(\widetilde{W}_0)^i=C_0+bD_0.\tag{29}$$

将零次内层解(25)式 $B_0+d_0[\exp(-\sqrt{N(b)}\eta)+\sqrt{N(b)}\eta-1]$ 中的内变量 η 由外变量 r 来表示. 得到 $B_0+d_0\left[\exp\left(-\sqrt{N(b)}\frac{b-r}{\varepsilon}\right)+\sqrt{N(b)}\frac{b-r}{\varepsilon}-1\right]$. 固定 r 按 ε 展开得到 $B_0+d_0\left[\sqrt{N(b)}\frac{b-r}{\varepsilon}-1\right]+EST$. 然后取其关于 ε 的零次幂项为主项的外展开式 $(V_0)^o$ 得

$$(V_0)^o=B_0,\quad d_0=0.\tag{30}$$

由匹配原则和(29)，(30)式，有

$$C_0+bD_0=B_0,\quad d_0=0.\tag{31}$$

因此由(28)，(31)式，可得

$$C_0=\frac{aB_0-bA_0}{a-b},$$
$$D_0=\frac{A_0-B_0}{a-b},$$
$$c_0=d_0=0.\tag{32}$$

5. 一次内层解及其与外部解匹配

1. 一次内层解.

i) 薄板内缘边界 $r=a$ 附近的一次内层解. 考虑到(22)，(32)式，方程(13)可改写为

$$\frac{\mathrm{d}^4u_1}{\mathrm{d}\xi^4}-N(a)\frac{\mathrm{d}^2u_1}{\mathrm{d}\xi^2}=0.$$

再由上式和条件(14)式，便可得到具有边界层性态的解

$$u_1(\xi)=A_1\xi+c_1(\exp(-\sqrt{N(a)}\xi)+\sqrt{N(a)}\xi-1),\tag{33}$$

其中 c_1 为任意常数.

于是，由(22)，(33)和(32)式我们便构造了问题(13)和(14)在内缘边界 $r=a$ 附近的一次内层解 U_1 为

$$U_1(\xi)=A_0+\varepsilon[A_1\xi+c_1(\exp(-\sqrt{N(a)}\xi)+\sqrt{N(a)}\xi-1],\tag{34}$$

其中 c_1 为待定常数.

ii) 薄板外缘边界 $r=b$ 附近的一次内层解. 考虑到(24)，(32)式，方程(20)可改写为

$$\frac{\mathrm{d}^4v_1}{\mathrm{d}\eta^4}-N(b)\frac{\mathrm{d}^2v_1}{\mathrm{d}\eta^2}=0.$$

再由上式和条件(21)式，便可得到具有边界层性态的解

$$v_1(\eta)=B_1\eta+d_1(\exp(-\sqrt{N(b)}\eta)+\sqrt{N(b)}\eta-1),\tag{35}$$

其中 c_1 为任意常数.

于是，由(24)，(35)和(32)式，便构造了在外缘边界 $r=b$ 附近的一次内层解 V_1 为

$$V_1(\xi)=B_0+\varepsilon[B_1\xi+d_1(\exp(-\sqrt{N(b)}\eta)+\sqrt{N(b)}\eta-1)],\tag{36}$$

其中 d_1 为待定常数.

2. 一次外部解和环形薄板内、外缘边界附近的一次内层解匹配.

i) 将一次外部解(7)的外展开式 $C_0 + D_0 r + \varepsilon(C_1 + D_1 r)$ 中的外变量 r 由内变量 ξ 来表示, 得 $C_0 + (\varepsilon\xi + a)D_0 + \varepsilon(C_1 + (\varepsilon\xi + a)D_1)$. 固定 ξ 按 ε 展开, 取其关于 ε 的零次、一次幂项的内展开式 $(\overline{W}_1)^i$, 得

$$(\overline{W}_1)^i = C_0 + aD_0 + \varepsilon(C_1 + D_0\xi + aD_1).$$

将上式用外变量 r 表示

$$(\overline{W}_1)^i = C_0 + aD_0 + D_0(r - a) + \varepsilon(C_1 + aD_1). \tag{37}$$

将一次内层解(34)式

$A_0 + \varepsilon[A_1\xi + c_1(\exp(-\sqrt{N(a)}\xi) + \sqrt{N(a)}\xi - 1]$

中的内变量 ξ 由外变量 r 来表示,得到

$$A_0 + \varepsilon\left[A_1 \frac{r-a}{\varepsilon} + c_1\left(\exp\left(-\sqrt{N(a)}\frac{r-a}{\varepsilon}\right) + \sqrt{N(a)}\frac{r-a}{\varepsilon} - 1\right)\right].$$

固定 r 按 ε 展开, 得到 $A_0 + A_1(r-a) + c_1 N(a)(r-a) - \varepsilon c_1 + EST$. 然后取其关于 ε 的零次、一次幂项的外展开式 $(U_1)^o$ 得

$$(U_1)^o = A_0 + (A_1 + c_1 N(a))(r - a) - \varepsilon c_1. \tag{38}$$

由匹配原则和(37), (38)式, 有

$$D_0 = A_1 + c_1 N(a),\ C_1 + aD_1 = -c_1.$$

再由(32)式, 得

$$c_1 = \frac{A_0 - B_0 - A_1(a-b)}{N(a)(a-b)},$$

$$C_1 + aD_1 = \frac{-A_0 + B_0 + A_1(a-b)}{N(a)(a-b)}. \tag{39}$$

ii) 将外部解(7)式的外展开式 $C_0 + D_0 r + \varepsilon(C_1 + D_1 r)$ 中的外变量 r 由内变量 η 来表示, 得 $C_0 + D_0(b - \varepsilon\eta) + \varepsilon(C_1 + D_1(b - \varepsilon\eta))$. 固定 η 按 ε 展开, 取其关于 ε 的零次、一次幂项的内展开式 $(\widetilde{W}_1)^i$, 得

$$(\widetilde{W}_1)^i = C_0 + bD_0 + \varepsilon(C_1 - D_0\eta + bD_1).$$

将上式用外变量 r 表示

$$(\widetilde{W}_1)^i = C_0 + bD_0 - D_0(b - r) + \varepsilon(C_1 + bD_1). \tag{40}$$

将一次内层解(36)式

$B_0 + \varepsilon[B_1\eta + d_1(\exp(-\sqrt{N(b)}\eta) + \sqrt{N(b)}\eta - 1)$

中的内变量 η 由外变量 r 来表示, 得到

$$B_0 + \varepsilon\left[B_1 \frac{b-r}{\varepsilon} + d_1\left(\exp\left(-\sqrt{N(b)}\frac{b-r}{\varepsilon}\right) + \sqrt{N(b)}\frac{b-r}{\varepsilon} - 1\right)\right].$$

固定 r 按 ε 展开, 得到 $B_0 + B_1(b-r) + d_1 N(b)(b-r) - \varepsilon d_1 + EST$. 然后取其关于 ε 的零次、一次幂项的外展开式 $(V_1)^o$, 得

$$(V_1)^o = B_0 + (B_1 + d_1 N(b))(b - r) - \varepsilon d_1. \tag{41}$$

由匹配原则和(40), (41)式, 有

$$-D_0 = B_1 + d_1 N(b),\ C_1 + bD_1 = -d_1.$$

再由(32)式, 得

$$d_1 = -\frac{A_0 - B_0 + B_1(a-b)}{N(b)(a-b)},$$

$$C_1 + bD_1 = \frac{A_0 - B_0 + B_1(a-b)}{N(b)(a-b)}. \tag{42}$$

由(39), (42), 可得

$$d_1 = -\frac{A_0 - B_0 + B_1(a-b)}{N(b)(a-b)}, \tag{43}$$

$$C_1 = \frac{(A_0 - B_0)(aN(a) + bN(b)) + (B_1 aN(a) - A_1 bN(b))(a-b)}{N(a)N(b)(a-b)^2}, \tag{44}$$

$$D_1 = \frac{-(A_0 - B_0)(N(a) + N(b)) + (A_1 N(b) - B_1 N(a))(a-b)}{N(a)N(b)(a-b)^2}. \tag{45}$$

6. 解的合成展开式

由(7), (32), (34), (36)式, 便得到薄板弯曲模型(2), (3)的外部解 $\overline{W}$ 和内、外缘边界附近的内层解 U 和 V 的一次渐近表示式

$$\overline{W}_1(r) = [C_0 + D_0 r] + \varepsilon[C_1 + D_1 r],\quad 0 < \varepsilon \ll 1, \tag{46}$$

$$U_1(\xi) = A_0 + \varepsilon[A_1\xi + c_1(\exp(-\sqrt{N(a)}\xi) + \sqrt{N(a)}\xi - 1)],\quad 0 < \varepsilon \ll 1, \tag{47}$$

$$V_1(\eta) = B_0 + \varepsilon[B_1\eta - d_1(\exp(-\sqrt{N(b)}\eta)$$

$$+\sqrt{N(b)}\eta-1)],\quad 0<\varepsilon\ll 1. \tag{48}$$

因此, 原问题(2), (3)解 W 的一次渐近合成展开式[8,9]为

$$W(r)=\overline{W}_1(r)+U_1(\xi)+V_1(\eta)-(\overline{W}_1)^i$$
$$-(\widetilde{W}_1)^i+O(\varepsilon^2),\quad 0<\varepsilon\ll 1.$$

于是由(37), (40), (46)—(48)式, 得到

$$\begin{aligned}W(r)=&[A_0(r-a)+B_0(b-r)-(C_0+D_0r)]\\&+[c_0(\exp(-\sqrt{N(a)}\xi)+\sqrt{N(a)}\xi-1)]\\&+d_0(\exp(-\sqrt{N(b)}\xi)+\sqrt{N(b)}\eta-1)]\\&+\varepsilon[(C_1+D_1r)+c_1(\exp(-\sqrt{N(a)}\xi)\\&+\sqrt{N(a)}\xi-1)+d_1(\exp(-\sqrt{N(b)}\eta)\\&+\sqrt{N(b)}\eta-1)]+O(\varepsilon^2),\quad 0<\varepsilon\ll 1,\end{aligned}$$

其中 $\xi=\dfrac{r-a}{\varepsilon},\eta=\dfrac{b-r}{\varepsilon}$, 而 $c_i,d_iC_i,D_i(i=0,1)$ 分别由(32), (39), (43)—(45)式表示.

注:由上述方法, 可以继续得到薄板弯曲的挠度问题(1),(2)的更高次渐近解.

7. 结 论

求解薄板弯曲的挠度问题是涉及到求解高阶常、偏微分方程的问题. 众所周知, 对于高阶微分方程, 一般不能用初等方法来求出其精确解. 因此需要用有效的方法来求出其近似解. 本文提供的求奇摄动问题渐近解的匹配方法, 就是一种简单而有效的方法.

本文在使用奇摄动匹配方法求解相应问题的渐近解时, 在过去常规求解步骤的基础上, 作了某些优化和调正. 这样在计算量上可以相应减少. 这种方法上的优化和调正, 更适合于求解高阶方程的多个边界层和高阶近似的情形.

由本文方法得到的解还可进行解析运算. 从得到的结果可以进一步进行微分、积分等解析运算. 从而还能得到更多的薄板弯曲相关的弹性力学所涉及到的物理量的渐近性态.

[1] Alzheimer W E, Davis R T 1968 *J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE* **4** 905

[2] Timoshenk S, Woinowsky-Krieger S 1959 *Theory of Plates and Shells* McGraw-Hill, Now York.

[3] Besjes J G 1975 *J. Math. Appl*. **49** 24

[4] Mo J Q, Shi B G 1981 *Appl. Math. Mech*. **2** 567

[5] Yu D L, Wang G, Liu Y Z, Wen J H, Qiu J 2006 *Chin. Phys* **15** 266

[6] Yang Bo, Ding H J, Chen W Q 2008 *Appl. Math. Mech*. **29** 9994

[7] Luminita B, Gheorghe M 2007 *Singularly Perturbed Boundary-Value Problem* Birkhauser Berlin

[8] Leach J A, Needham D J 2004 *Matched Asymptotic Expansions in Reaction-Diffusion Theory*, Springer London

[9] Nayfeh A H 1981 *Introduction to Perturbation Techniques* John Wiley & sons New York

[10] Mo J Q, Lin Y H, Lin W T 2010 *Chin. Phys*. B **19** 030202

[11] Mo J Q 2010 *Chin. Phys*. B **19** 010203

[12] Mo J Q, Chen X F 2010 *Chin. Phys*. B **19** 100203

Matched asymptotic solution to a class of singularly perturbed thin plate bending problem*

Xu Hui[1)] Chen Li-Hua[2)] Mo Jia-Qi[3)†]

1) (*School of Statistics & Applied Mathematics, Anhui University of Finance and Economics, Bengbu 233030, China*)

2) (*Department of Mathematics and Computer Science, Fuqing Branch of Fujian Normal University, Fuqing 350300, China*)

3) (*Department of Mathematics, Anhui Normal University, Wuhu 241003, China*)

(Received 25 December 2010; revised manuscript received 11 January 2011)

Abstract

The thin plate-bending problem is studied. Introducing the stretched variables, the internal layer solutions near the boundary are constructed for the fourth order singularly perturbed boundary problem. Then matching the solutions with outer solution and using the theory of the composite expansion, the asymptotic solution is obtained finally.

Keywords: thin plate bend, deflexion, asymptotic solution.

PACS: 02.30.Mv

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 40876010), the Strategic Priority Research Program-Climate Change: Carbon Budget and Relevant Issues of the Chinese Academy of Sciences (Grant No. XDA01020304), the R & D Special Fund for Public Welfare Industry (Grant No. GYHY200806010), the LASG State Key Laboratory Special Fund, the Foundation of E-Institutes of Shanghai Municipal Education Commission (Grant No. E03004), the Natural Science Foundation of Zhejiang Province (Grant No. Y6110502), the Natural Science Foundation from the Education Bureau of Anhui Province, China (Grant Nos. KJ2011A135, KJ2011Z003) and the Foundation of the Education Department of Fujian Province, China (Grant No. JA10288).

† Corresponding author. E-mail: mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn