

Lorenz 混沌系统的近似有限时间稳定控制*

赵建利[†] 王京 魏伟

(北京科技大学, 高效轧制国家工程研究中心, 北京 100083)

(2010 年 10 月 17 日收到; 2011 年 1 月 24 日收到修改稿)

针对 Lorenz 混沌系统, 研究其有限时间稳定控制问题. 考虑系统存在不确定非线性, 提出一种可使受控 Lorenz 系统实现近似有限时间稳定的控制方法. 改进并设计一种扩张状态观测器, 解决了受控 Lorenz 系统中不确定非线性未知问题. 通过引入奇异扰动性理论, 分析了闭环系统的近似有限时间稳定性. 仿真实验结果验证了该控制方法及扩张状态观测器的有效性.

关键词: Lorenz 混沌系统, 近似有限时间稳定, 扩张状态观测器, 奇异扰动

PACS: 02.40.Xx, 05.45.-a, 05.45.Gg

1. 引言

在动力学系统中, 混沌系统是一类普遍存在且重要的非线性系统, 具有复杂和难以预测的行为, 其基本特征是具有正的 Lyapunov 指数、系统状态的有界性、运动轨迹的不确定性和非周期性、对初值的极端敏感性、长期行为的不可预测性、无限宽频功率谱以及遍历性等^[1]. 目前, 混沌学已发展成为一门影响深远、发展迅速的前沿科学. 混沌系统的控制不仅是工程界和学术界研究的热点, 也是 20 世纪 90 年代以来非线性系统控制理论突出研究的一个方面, 利用混沌系统运动轨迹的不确定性、随机性进行保密通信以及如何抑制混沌现象的发生正在掀起研究混沌的热潮. Lorenz 混沌系统, 是混沌系统控制领域研究的基准对象, 常被用来验证各种不同控制方法的有效性.

近年来, 针对 Lorenz 混沌系统, 已经提出了许多不同的控制方法^[2-16]. 其中, 文献[3, 4]研究了反馈控制方法; 文献[5, 6]研究了自适应控制方法; 文献[7]研究了串级控制方法; 文献[8]研究了模糊控制方法; 文献[10, 11]研究了 backstepping 控制方法; 文献[13-16]研究了滑模变结构控制方法. 这些方法实现 Lorenz 混沌系统的稳定或渐近稳定控制. 但是, 在实际工程实践中, 如轧钢过程控制, 由

于要求精度高、响应快, 轧机自激振动引发混沌现象的控制, 不仅要求闭环系统是稳定的, 而且要求闭环系统能够在有限的时间内稳定, 即有限时间稳定. 另外, 在控制理论的发展过程中, 系统有限时间稳定控制也是控制理论重点研究的一个方面. 同时, 由于在混沌系统中存在着不确定非线性, 难以得到系统精确的数学模型, 进而导致混沌系统难于控制. 因此, 研究混沌系统不依赖精确数学模型的有限时间稳定控制问题具有重要的理论和现实意义. 本文针对 Lorenz 混沌系统, 提出一种可使受控 Lorenz 系统实现近似有限时间稳定的控制方法; 改进并设计一种扩张状态观测器, 解决受控 Lorenz 系统中不确定非线性未知问题; 结合奇异扰动性理论, 给出受控 Lorenz 闭环系统的近似有限时间稳定性分析. 理论分析和仿真实验, 结果均验证了该控制方法的正确性.

2. Lorenz 混沌系统的近似有限时间稳定控制原理

2.1. 问题的描述

Lorenz 混沌系统的数学模型为^[1]

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \sigma(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 &= rx_1 - x_2 - x_1x_3,\end{aligned}$$

* 国家高技术研究发展计划(批准号:2009AA04Z163)资助的课题.

[†] E-mail: jianli791026@yahoo.com.cn

$$\dot{x}_3 = -bx_3 + x_1x_2, \quad (1)$$

式中, $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ 为系统状态, 满足可测性条件; σ, r, b 为系统未知参数.

当 $\sigma = 10, r = 28, b = 8/3, x_1(0) = 1, x_2(0) = 3, x_3(0) = 2$ 时, Lorenz 系统(1)产生混沌现象, 对应混沌吸引子的相轨迹如图 1 所示.

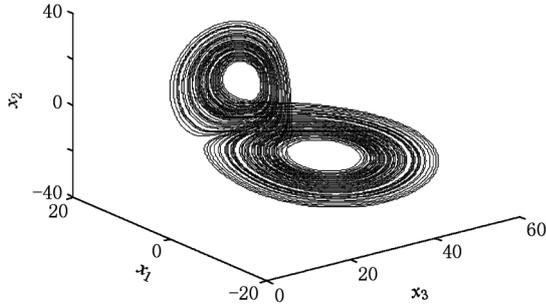


图 1 Lorenz 混沌系统混沌吸引子的相轨迹

为了抑制 Lorenz 混沌系统(1)混沌现象的产生, 并使其在有限时间范围内稳定到平衡点 $x = 0$, 采用主动控制方法. 受控后的 Lorenz 系统为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sigma(x_2 - x_1) + u_1, \\ \dot{x}_2 &= rx_1 - x_2 - x_1x_3 + u_2, \\ \dot{x}_3 &= -bx_3 + x_1x_2 + u_3. \end{aligned} \quad (2)$$

针对受控 Lorenz 系统(2), 定义 $f_1(x) = \sigma(x_2 - x_1), f_2(x) = rx_1 - x_2 - x_1x_3, f_3(x) = x_1x_2 - bx_3$, 由于未知参数 σ, r, b 的存在, 此时 $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ 可以看作是受控 Lorenz 系统(2)的不确定非线性. 同时, 为了分析问题方便, 定义受控 Lorenz 系统的可测输出为 $y = (y_1, y_2, y_3)^T$, 系统状态 x 表示为 $x = (x_{11}, x_{21}, x_{31})^T$, 其中 $x_{11} = x_1, x_{21} = x_2, x_{31} = x_3, y_1 = x_{11}, y_2 = x_{21}, y_3 = x_{31}$. 以后, 凡是没有进行特殊声明, 均采用此表示方法. 此时, 受控 Lorenz 系统(2)可描述为

$$\begin{aligned} \dot{x}_{11} &= f_1(x) + u_1, \\ \dot{x}_{21} &= f_2(x) + u_2, \\ \dot{x}_{31} &= f_3(x) + u_3, \\ y_1 &= x_{11}, \\ y_2 &= x_{21}, \\ y_3 &= x_{31}, \end{aligned} \quad (3)$$

系统(3)也可以看作是由 3 个闭环子系统组成, 它们分别为

$$\begin{aligned} \dot{x}_{i1} &= f_i(x) + u_i, \\ y_i &= x_{i1}, \end{aligned} \quad (4)$$

其中, $i = 1, 2, 3$. 根据混沌系统状态的有界性及不确定非线性 $f_i(x)$ 的组成形式, 可以看出, 此时 $f_i(x)$ 满足: 1) 连续可导; 2) 直到一阶导数有界. 由于 $f_i(0) = 0$, 可以看出, 此时受控 Lorenz 系统(3)的闭环平衡点为 $(x, u) = (0, 0)$, 其中 $u = (u_1, u_2, u_3)^T$.

为了使受控 Lorenz 系统(3)能够实现有限时间稳定, 设计控制律 u . 根据文献[17], 可以推得, 当受控 Lorenz 系统(3)中的不确定非线性 $f_i(x)$ 完全已知时, 给定 $k_i > 0$, 存在 $\sigma_i \in (0, 1)$, 使得受控 Lorenz 系统(3)在具有动态主动补偿特性的控制律

$$u_i = u'_i(x_{i1}) - f_i(x) \quad (5)$$

作用下, 其第 i 个闭环子系统变为

$$\dot{x}_{i1} = u'_i(x_{i1}), \quad (6)$$

是有限时间稳定的, 即此时 Lorenz 混沌系统(1)实现了有限时间稳定控制.

其中, $u'_i(x_{i1})$ 为

$$u'_i(x_{i1}) = -k_i \text{sign}(x_{i1}) |x_{i1}|^{\sigma_i}. \quad (7)$$

但是, 由于不确定非线性 $f_i(x)$ 未知, 使得控制律 u_i 无法实现. 基于此, 针对受控 Lorenz 系统(3), 改进并设计了一种扩张状态观测器, 即利用可测输出量 y_i 对第 i 个闭环子系统(4)的不确定非线性 $f_i(x)$ 进行实时估计. 然后, 利用估计值 \hat{f}_i 构建第 i 个闭环子系统具有动态主动补偿特性的反馈控制律 $u_i = u'_i(x_{i1}) - \hat{f}_i$, 使得第 i 个闭环子系统近似实现有限时间稳定控制, 即 Lorenz 混沌系统(1)实现近似有限时间稳定控制.

2.2. 扩张状态观测器设计

考虑受控 Lorenz 系统(3), 针对其第 i 个闭环子系统(4), 定义扩张状态变量 x_{i2} , 使得 $x_{i2} = f_i(x), \dot{x}_{i2} = \dot{f}_i(x)$. 令 $x^* = (x_1^{*T}, x_2^{*T}, x_3^{*T})^T \in R^6$ 为受控 Lorenz 系统(3)扩张后的状态, 即扩张状态, 其中 $x_i^* = \begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \end{pmatrix} \in R^2$ 为受控 Lorenz 系统(3)第 i 个闭环子系统(4)的扩张状态. 同时, 令(5)式所示控制律 u_i 用 u_i^* 表示为

$$u_i^* = u'_i(x_{i1}) - x_{i2}, \quad (8)$$

其中, $u'_i(x_{i1})$ 由(7)式给定. 此时, 受控 Lorenz 系统(3)可描述为

$$\begin{aligned} \dot{x}_{i1} &= x_{i2} + u_1^*, \\ \dot{x}_{i2} &= x_{i2} + u_2^*, \\ \dot{x}_{i3} &= x_{i3} + u_3^*, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= x_{11}, \\ y_2 &= x_{21}, \\ y_3 &= x_{31}, \end{aligned} \quad (9)$$

是有限时间稳定的. 但是, 不确定非线性 $f_i(\mathbf{x})$ 的存在, 使得(8)式所示控制律 u_i^* 无法实现. 于是, 针对受控 Lorenz 系统(9), 考虑其第 i 个闭环子系统 $\dot{x}_{i1} = x_{i2} + u_i^*$, 在文献[18,19]基础上, 改进并设计了一种扩张状态观测器, 其表现形式为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_{i1} &= \hat{x}_{i2} + \frac{\alpha_{i1}}{\varepsilon_i^2}(x_{i1} - \hat{x}_{i1}) + \hat{u}_i^*, \\ \dot{\hat{x}}_{i2} &= \frac{\alpha_{i2}}{(\varepsilon_i^2)^2}(x_{i1} - \hat{x}_{i1}), \end{aligned} \quad (10)$$

其中, $i = 1, 2, 3, \hat{\mathbf{x}}_i^* = (\hat{x}_{i1}, \hat{x}_{i2})^T \in \mathbf{R}^2$ 为 x_i^* 的估计值; 参数 $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \varepsilon_i$ 为大于零的常数且 ε_i 满足 $\varepsilon_i \ll 1$. \hat{u}_i^* 为由估计值 $\hat{\mathbf{x}}_i^*$ 构成的具有动态主动补偿特性的控制律, 即

$$\hat{u}_i^* = u_i'(\hat{x}_{i1}) - \hat{x}_{i2}, \quad (11)$$

其中, $u_i'(x_{i1}) = -k_i \text{sign}(x_{i1}) |x_{i1}|^{\sigma_i}$. 同时, 根据题意, 可知 x_{i1} 可测, 因此实际控制律为

$$\hat{u}_i^* = -k_i \text{sign}(x_{i1}) |x_{i1}|^{\sigma_i} - \hat{x}_{i2}, \quad (12)$$

但是, 为了分析问题方便, 暂且使用(11)式所示控制律替代(12)式所示控制律.

这种改进后的扩张状态观测器, 不仅给受控 Lorenz 闭环系统近似有限时间稳定性分析带来方便, 而且使得其估计值跟踪上各闭环子系统扩张状态 x_i^* 所需的时间是 $O(\varepsilon_i)$. 同时, 这种观测器也使得参数 ε_i 的调节范围进一步缩小, 方便系统参数 ε_i 的选取. 在此基础上, 给出闭环系统的近似有限时间稳定性分析.

2.3. 受控 Lorenz 闭环系统近似有限时间稳定性分析

令 $\eta_{ij} = \frac{x_{ij} - \hat{x}_{ij}}{(\varepsilon_i^2)^{(2-j)}} (j = 1, 2)$, 可得

$$\hat{\mathbf{x}}_i^* = \mathbf{x}_i^* - D_i \boldsymbol{\eta}_i, \quad (13)$$

其中, $\boldsymbol{\eta}_i = (\eta_{i1}, \eta_{i2})^T, D_i = \text{diag}\{\varepsilon_i^2, 1\}$. 对 $\boldsymbol{\eta}_i$ 求导, 由受控 Lorenz 系统(9)及扩张状态观测器(10)可得, 在具有动态主动补偿特性的控制律(11)作用下, 受控 Lorenz 闭环系统可描述为

$$\begin{aligned} \dot{x}_{i1} &= x_{i2} + \hat{u}_i^*, \\ y_i &= x_{i1}, \\ (\varepsilon_i^2) \dot{\boldsymbol{\eta}}_i &= \mathbf{A}_i \boldsymbol{\eta}_i + (\varepsilon_i^2)(\mathbf{B}_{i1} \dot{f}_i + \mathbf{B}_{i2} \tilde{u}_i), \end{aligned} \quad (14)$$

其中, $i = 1, 2, 3, \tilde{u}_i = u_i^* - \hat{u}_i^*. 2 \times 2$ 矩阵 $\mathbf{A}_i, 2 \times 1$ 矩阵 $\mathbf{B}_{i1}, 2 \times 1$ 矩阵 \mathbf{B}_{i2} 分别为

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} -\alpha_{i1} & 1 \\ -\alpha_{i2} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{i1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{i2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

由闭环系统(14)可以看出, 当 ε_i 非常小时, 闭环系统(14)是一个标准的奇异扰动系统. 为此, 采用奇异扰动性理论分析其闭环有限时间稳定性. 同时, 由于当 ε_i 非常小时, 扩张状态观测器(10)的反馈增益很大, 根据文献[20—22]中的奇异扰动性理论可知, 很大的反馈增益可能导致闭环系统(14)出现脉冲峰值现象, 以至于破坏闭环系统(14)的稳定性. 而这种脉冲峰值现象是由控制律 \hat{u}_i^* 的瞬间非常大产生. 为此, 采用饱和函数 $\text{Sat}(\cdot)$ 对控制律 \hat{u}_i^* 进行处理, 使得受控 Lorenz 闭环系统(14)的状态 \mathbf{x} 在脉冲峰值现象发生时仍然处于可稳定范围内, 进而消除脉冲峰值现象对闭环系统稳定性的影响. 处理后的控制律 \hat{u}_i^* 变为

$$\hat{u}_i^* = \text{Sat}(\hat{u}_i^*) = \begin{cases} m_i \cdot \text{sign}(\hat{u}_i^*), & |\hat{u}_i^*| > m_i, \\ \hat{u}_i^*, & |\hat{u}_i^*| \leq m_i, \end{cases} \quad (15)$$

其中, m_i 为控制律 u_i^* 在系统状态 \mathbf{x} 可稳定范围内绝对值的上界. 可以看出, 此时 $\tilde{u}_i = u_i^* - \hat{u}_i^*$ 是有界的. 另外, 研究发现当扩张状态观测器(10)式的反馈增益很大时, 一定的观测误差, 将有利于脉冲峰值现象的产生, 但是当扩张状态观测器(10)式的状态初始值 $\hat{x}_{i1}(0) = x_{i1}(0)$ 时, 可以取得更好的效果.

定理 1 (快速跟踪定理), 考虑 Lorenz 混沌系统(1), 在具有动态主动补偿特性的控制律(11)式作用下, 其闭环系统(14)存在非常小正常数 ε_i^* , 使得当 $\varepsilon_i < \varepsilon_i^* (i = 1, 2, 3)$ 时, 扩张状态观测器(10)式在很短时间内跟踪上闭环系统(14)中的扩张状态 \mathbf{x}^* .

证明 考虑受控 Lorenz 闭环系统(14), 由奇异扰动性理论^[20]及矩阵 \mathbf{A}_i 定义可得, 当 $\varepsilon_i = 0$ 时, 方程 $\mathbf{A}_i \boldsymbol{\eta}_i = 0$ 有唯一解 $\boldsymbol{\eta}_i = 0$, 则闭环系统(14)中第 i 个闭环子系统的降阶系统(慢速系统)为

$$\dot{x}_{i1} = x_{i2} + u_i^* = u_i'(x_{i1}), \quad (16)$$

边界层系统(快速系统)为

$$\dot{\zeta}_i = A_i \zeta_i, \quad (17)$$

其中, $\zeta_i = \frac{d\eta_i}{d\tau_i}$, $\tau_i = \frac{t}{\varepsilon_i^2}$.

针对边界层系统(17),由于参数 α_{i1}, α_{i2} 大于零,则边界层系统 $\zeta_i = A_i \zeta_i$ 渐近稳定. 进一步,根据 Lyapunov 判据^[23],可得边界层系统(17)存在连续正定 Lyapunov 函数 $W_i(\boldsymbol{\eta}_i) = \boldsymbol{\eta}_i^T P_i \boldsymbol{\eta}_i$,其中对称正定矩阵 P_i 满足 $P_i A_i + A_i^T P_i = -I_i$. 此时,沿闭环系统(14)对 $W_i(\boldsymbol{\eta}_i)$ 进行求导,可得

$$\dot{W}_i = -\frac{1}{(\varepsilon_i^2)} \boldsymbol{\eta}_i^T \dot{\boldsymbol{\eta}}_i + 2P_i \boldsymbol{\eta}_i (B_{i1} \dot{f}_i + B_{i2} \dot{u}_i). \quad (18)$$

由于 \dot{f}_i, \dot{u}_i 有界,可知 $B_{i1} \dot{f}_i + B_{i2} \dot{u}_i$ 有界,定义 $k_{i0} = \sup(\|B_{i1} \dot{f}_i + B_{i2} \dot{u}_i\|)$,则(18)式可化为

$$\begin{aligned} \dot{W}_i &= -\frac{1}{(\varepsilon_i^2)} \boldsymbol{\eta}_i^T P_i \boldsymbol{\eta}_i + 2P_i \boldsymbol{\eta}_i (B_{i1} \dot{f}_i + B_{i2} \dot{u}_i) \\ &\leq -\frac{1}{(\varepsilon_i^2)} \boldsymbol{\eta}_i^T P_i \boldsymbol{\eta}_i + 2\|P_i\| \|\boldsymbol{\eta}_i\| \|B_{i1} \dot{f}_i + B_{i2} \dot{u}_i\| \\ &\leq -\frac{1}{(\varepsilon_i^2)} W_i + 2\|P_i\| k_{i0} \frac{\sqrt{\boldsymbol{\eta}_i^T \lambda_{\min}\{P_i\} \boldsymbol{\eta}_i}}{\sqrt{\lambda_{\min}\{P_i\}}} \\ &\leq -\frac{1}{(\varepsilon_i^2)} W_i + 2 \frac{\|P_i\| k_{i0}}{\sqrt{\lambda_{\min}\{P_i\}}} \sqrt{W_i} \\ &= -\frac{2c_i}{(\varepsilon_i^2)} W_i + 2 \frac{k_0 \|P_i\|}{\sqrt{\lambda_{\min}\{P_i\}}} \sqrt{W_i} \\ &= -\frac{c_i}{(\varepsilon_i^2)} W_i - \frac{c_i}{(\varepsilon_i^2)} W_i + 2 \frac{k_0 \|P_i\|}{\sqrt{\lambda_{\min}\{P_i\}}} \sqrt{W_i}, \end{aligned} \quad (19)$$

其中, $c_i = \frac{1}{2\|P_i\|}$. 令 $c_{i1} = \frac{16k_{i0}^2 \|P_i\|^4}{\lambda_{\min}\{P_i\}}$, 则当 $W_i(\boldsymbol{\eta}_i(t)) \geq c_{i1} \varepsilon_i^4$ 时,(19)式可变换为

$$\dot{W}_i \leq -\frac{c_i}{(\varepsilon_i^2)} W_i. \quad (20)$$

定义闭环系统(14)的初始时刻为 t_0 ,且令 $W_i(\boldsymbol{\eta}_i(t_0)) = c_{i2}, c_{i2}$ 为正常数,则当 $c_{i2} \geq c_{i1} \varepsilon_i^4$ 时,(20)式存在正常数

$$\tau_{\varepsilon_i} = -(\varepsilon_i^2/c_i) \ln\left(\frac{c_{i1} \varepsilon_i^4}{c_{i2}}\right), \quad (21)$$

使得 $W_i(\boldsymbol{\eta}_i(t))$ 满足

$$W_i(\boldsymbol{\eta}_i(t)) \leq c_{i2} e^{-(c_i/\varepsilon_i^2)(t-t_0)} \quad (t \in (t_0, t_0 + \tau_{\varepsilon_i}]), \quad (22)$$

且 $W_i(\boldsymbol{\eta}_i(t_0 + \tau_{\varepsilon_i})) \leq c_{i1} \varepsilon_i^4$. 又由于当 $W_i(\boldsymbol{\eta}_i(t)) = c_{i1} \varepsilon_i^4$ 时,(20)式仍然成立且 $\dot{W}_i < 0$,可得

$$W_i(\boldsymbol{\eta}_i(t)) < c_{i1} \varepsilon_i^4 \quad (t > t_0 + \tau_{\varepsilon_i}), \quad (23)$$

即 $t > t_0 + \tau_{\varepsilon_i}$ 时, $W_i(\boldsymbol{\eta}_i(t))$ 是 $O(\varepsilon_i)$. 同时,由于矩阵 P_i 为对称正定矩阵,可知存在正交矩阵(酉矩阵) Q_i ,使得

$$Q_i^T P_i Q_i = \text{diag}\{\lambda_{i1}, \lambda_{i2}\}, \quad (24)$$

其中, $\lambda_{ij}(j=1,2)$ 为矩阵 P_i 的特征值,它们都是正数. 从而,有

$$P_i = Q_i \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_{i1}} & \\ & \sqrt{\lambda_{i2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_{i1}} & \\ & \sqrt{\lambda_{i2}} \end{bmatrix} Q_i^T.$$

令 $B_i = \text{diag}(\sqrt{\lambda_{i1}}, \sqrt{\lambda_{i2}}) Q_i^T$, 根据 Lyapunov 函数 $W_i(\boldsymbol{\eta}_i)$ 的定义及向量的椭圆范数^[24],可得

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\eta}_i(t)\|_{P_i}^2 &= \boldsymbol{\eta}_i^T P_i \boldsymbol{\eta}_i = \boldsymbol{\eta}_i^T B_i^T B_i \boldsymbol{\eta}_i \\ &= (\boldsymbol{\eta}_i^T B_i^T) (B_i \boldsymbol{\eta}_i) \\ &= \|B_i \boldsymbol{\eta}_i\|_2^2, \end{aligned} \quad (25)$$

进一步,由(23)式可得

$$\|B_i \boldsymbol{\eta}_i(t)\|_2 < c_{i3} \varepsilon_i^2 \quad (t > t_0 + \tau_{\varepsilon_i}), \quad (26)$$

其中, $c_{i3} = \sqrt{c_{i1}}$. 令 $\gamma_i = \min\{\sqrt{\lambda_{i1}}, \sqrt{\lambda_{i2}}\}$, $C_i = \text{diag}\{\sqrt{\lambda_{i1}}, \sqrt{\lambda_{i2}}\}$, 由于矩阵 Q_i 为酉矩阵,则根据矩阵 B_i 定义及酉矩阵的范数特性^[24],可得

$$\begin{aligned} \|B_i \boldsymbol{\eta}_i(t)\|_2 &= \|C_i Q_i^T \boldsymbol{\eta}_i\|_2 \\ &\geq \gamma_i \cdot \|Q_i^T \boldsymbol{\eta}_i\|_2 \\ &= \gamma_i \cdot \|\boldsymbol{\eta}_i\|_2, \end{aligned} \quad (27)$$

令 $c_{i4} = \frac{c_{i3}}{\gamma_i}$, 则由(26)式可得

$$\|\boldsymbol{\eta}_i(t)\|_2 < c_{i4} \varepsilon_i^2 \quad (t > t_0 + \tau_{\varepsilon_i}), \quad (28)$$

根据 $\|\boldsymbol{\eta}_i(t)\|_2$ 的定义,可得 $\eta_{ij}(t)(j=1,2)$ 满足

$$|\eta_{ij}(t)| < c_{i4} \varepsilon_i^2 \quad (t > t_0 + \tau_{\varepsilon_i}), \quad (29)$$

是 $O(\varepsilon_i)$. 进一步,由(13)式可以看出,此时 $x_{ij} - \hat{x}_{ij} < c_{i4} \varepsilon_i^{2+2(2-j)}(j=1,2)$,也是 $O(\varepsilon_i)$. 另外,由(21)式可以看出, τ_{ε_i} 是 $O(\varepsilon_i)$. 在这里, τ_{ε_i} 不仅是奇异扰动系统(14)脉冲峰值时间常数的估计值,也是扩张状态观测器(10)式跟踪上第 i 个闭环子系统(14)中扩张状态 \mathbf{x}_i^* 所需的时间. 因此,闭环子系统(14)存在 ε_{i1} , 当 ε_{i1} 非常小且 $\varepsilon_i < \varepsilon_{i1}$ 时,扩张状态观测器(10)式将在很短时间内跟踪上第 i 个闭环子系统中扩张状态 \mathbf{x}_i^* . 令 $\varepsilon^* = \min\{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{31}\}$, 则

当 $\varepsilon_i < \varepsilon^*$, 扩张状态观测器(10)式将在很短时间内跟踪上闭环系统(14)中的扩张状态 \mathbf{x}^* . 定理1证毕.

由定理1分析过程可以看出,通过选取 ε_i , 当 ε_i 非常小时,扩张状态观测器(10)式跟踪上第 i 个闭环子系统(14)中扩张状态 \mathbf{x}_i^* 所需的时间 τ_{ε_i} 更小,并且使得当 $t > t_0 + \tau_{\varepsilon_i}$ 时,观测器(10)式跟踪上第 i 个闭环子系统(14)中的扩张状态 \mathbf{x}_i^* . 另外,由于对扩张状态观测器(10)式的状态初始值进行了设计,并且采用饱和函数 $\text{Sat}(\cdot)$ 对控制律 \hat{u}_i^* 进行了处理,使得受控 Lorenz 闭环系统(14)的状态 \mathbf{x} 在其脉冲峰值现象发生时仍然处于可稳定的范围内,进而消除了脉冲峰值现象对闭环系统稳定性的影响. 因此,在此基础上,给出闭环系统(14)的近似有限时间稳定性定理是合理的.

定理2 (近似有限时间稳定性定理),考虑 Lorenz 混沌系统(1),在定理1基础上,其受控 Lorenz 闭环系统(14)存在非常小正常数 ε^* ,使得当 $\varepsilon_i < \varepsilon^*$ 时,受控 Lorenz 闭环系统(14)近似实现有限时间稳定,即 Lorenz 混沌系统(1)实现近似有限时间稳定控制.

证明 针对降阶系统(16),根据文献[17],由(7)式所示控制律 $u'_i(x_{i1})$ 可得,此时降阶系统(16)是有限时间稳定的. 根据有限时间稳定性定理^[25],可知降阶系统(16)存在连续正定 Lyapunov 函数 $V_i(x_{i1})$,使得 $V_i(0) = 0$,且对于 $\forall x_{i1} \neq 0$,满足

$$\dot{V}_i(x_{i1}) = \frac{\partial V_i}{\partial x_{i1}} \dot{x}_{i1} = \frac{\partial V_i}{\partial x_{i1}} u'_i(x_{i1}) \leq -\beta_{i1} V_i, \quad (30)$$

其中, β_{i1} 为正常数, $0 < \beta_{i2} < 1$.

同时,在定理1基础上,考虑控制律(11)式,针对表达式 $-k_i \text{sign}(\hat{x}_{i1}) |\hat{x}_{i1}|^{\sigma_i}$,当 $t > t_0 + \tau_{\varepsilon_i}$ 时,满足

$$\begin{aligned} & -k_i \text{sign}(\hat{x}_{i1}) |\hat{x}_{i1}|^{\sigma_i} \\ & = -k_i \text{sign}(x_{i1} - \varepsilon_i^2 \eta_{i1}) |x_{i1} - \varepsilon_i^2 \eta_{i1}|^{\sigma_i} \\ & < -k_i \text{sign}(x_{i1}) |x_{i1}|^{\sigma_i} + 2k_i |\varepsilon_i^2 \eta_{i1}|^{\sigma_i} \\ & < -k_i \text{sign}(x_{i1}) |x_{i1}|^{\sigma_i} + 2k_i (c_{i4} \varepsilon_i^4)^{\sigma_i}, \quad (31) \end{aligned}$$

选取 $\sigma_i \in [\frac{1}{2}, 1)$, 令 $a_i = 4\sigma_i$, 可得 $a_i \geq 2$. 令 $\delta_i = ((c_{i4} \varepsilon_i^4)^{\sigma_i}, c_{i4} \varepsilon_i^2)^T, K_i = (k_i, 1)$, 根据(13)式,由(29)式及(31)式可得

$$\hat{u}_i^* + x_{i2} \leq u_i(x_{i1}) + 2K_i \delta_i, \quad (32)$$

此时,沿闭环系统(14)对 $V_i(x_{i1})$ 进行求导,可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(x_{i1}) & = \frac{\partial V_i}{\partial x_{i1}} \dot{x}_{i1} \leq \frac{\partial V_i}{\partial x_{i1}} u'_i(x_{i1}) + 2K_i \delta_i \frac{\partial V_i}{\partial x_{i1}} \\ & \leq -\beta_{i1} V_i(x_{i1})^{\beta_{i2}} + 2 \|K_i\| \|\delta_i\| \left| \frac{\partial V_i}{\partial x_{i1}} \right|, \quad (33) \end{aligned}$$

由于 $\frac{\partial V_i}{\partial x_{i1}}$ 连续且系统状态 \mathbf{x} 满足有界性,则 $\frac{\partial V_i}{\partial x_{i1}}$ 有界,定义 $m_i = \sup \left\{ \left| \frac{\partial V_i}{\partial x_{i1}} \right| \right\}$. 令 $c_{i5} = \max \{c_{i4}^{\sigma_i}, c_{i4}\}, c_{i6} = 2c_{i5} m_i \|K_i\|$, 由于 $\varepsilon_i \ll 1, a_i \geq 2$, 则(33)式可变为

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(x_{i1}) & \leq -\beta_{i1} V_i(x_{i1})^{\beta_{i2}} + c_{i6} \varepsilon_i^2 \\ & = -\frac{\beta_{i1}}{2} V_i(x_{i1})^{\beta_{i2}} - \frac{\beta_{i1}}{2} V_i(x_{i1})^{\beta_{i2}} \\ & \quad + c_{i6} \varepsilon_i^2, \quad (34) \end{aligned}$$

令 $c_{i7} = (\frac{2c_{i6}}{\beta_{i1}})^{1/\beta_{i2}}$, 则由(34)式可以看出,当 $t > t_0 + \tau_{\varepsilon_i}, V_i(x_{i1}(t)) \geq c_{i7} \varepsilon_i^{2/\beta_{i2}}$ 时,(34)式可变为

$$\dot{V}_i(x_{i1}) \leq -\left(\frac{\beta_{i1}}{2}\right) V_i(x_{i1})^{\beta_{i2}}, \quad (35)$$

令 $t_{i1} = t_0 + \tau_{\varepsilon_i}, c_{i8} = V_i(x_{i1}(t_{i1}))$, 则当 $c_{i8} > c_{i7} \varepsilon_i^{2/\beta_{i2}}$ 时,由(35)式及有限时间稳定性定理^[25],可知(35)式存在时间常数 T_{S_i} ,使得

$$V_i(x_{i1}(t_{i2})) \leq c_{i7} \varepsilon_i^{2/\beta_{i2}}, \quad (36)$$

其中, $t_{i2} = t_0 + \tau_{\varepsilon_i} + T_{S_i}$. 由于当 $t > t_{i1}, V_i(x_{i1}(t)) = c_{i7} \varepsilon_i^{2/\beta_{i2}}$ 时,(35)式仍然成立且 $\dot{V}_i(x_{i1}) < 0$, 可得

$$V_i(x_{i1}(t)) < c_{i7} \varepsilon_i^{2/\beta_{i2}} (t > t_{i2}). \quad (37)$$

由于 $0 < \beta_{i2} < 1$, 则由(37)式可以看出,当 $t > t_{i2}$ 时, $V_i(x_{i1})$ 是 $O(\varepsilon_i)$. 又由于 $V_i(x_{i1})$ 连续可导且 $V_i(0) = 0$, 可得对于任意小常数 $r_i > 0$, 存在非常小常数 $\varepsilon_{i2} > 0$, 使得当 $\varepsilon_i < \varepsilon_{i2}$ 且 $t > t_{i2}$ 时,第 i 个闭环子系统(14)状态 $x_{i1} \in B_{r_i}(0), r_i$ 满足 $\lim_{\varepsilon_i \rightarrow 0} r_i = 0$. 同时,也可以看出,对于任意小常数 $r > 0$, 存在非常小常数 $\varepsilon_2^* > 0$, 使得 $\varepsilon_i < \varepsilon_2^* < \min \{\varepsilon_{i2}\}, t > \max \{t_{i2}\}$ 时,受控 Lorenz 闭环系统(14)状态 $\mathbf{x} \in B_r(0), r$ 满足 $\lim_{\varepsilon_i^* \rightarrow 0} r = 0$. 其中, $B_{r_i}(0)$ 为以 $x_{i1} = 0$ 为圆心、 r_i 为半径的闭区域 $[-r_i, r_i]$; $B_r(0)$ 为以 $x = 0$ 为圆心、 r 为半径的闭球.

令 $\varepsilon^* = \min \{\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*\}$, 由定理1及以上分析可得,当 $\varepsilon_i < \varepsilon^*$ 时,扩张状态观测器(10)不仅在很短时间内跟踪上第 i 个闭环子系统(14)中的扩张状态 x_i^* , 而且使得第 i 个闭环子系统(14)在控制律(11)作用下,近似复现有限时间稳定特性,即 Lorenz 混沌系统(1)实现近似有限时间稳定控制. 定理2证毕.

3. 仿真实验

令 Lorenz 混沌系统(1) 状态的初始值为 $x_1(0)$

$= 1, x_2(0) = 3, x_3(0) = 2$, 系统参数选取为 $\sigma = 10, r = 28, b = 8/3$, 扩张状态观测器及控制器参数选取为 $\alpha_{11} = \alpha_{21} = \alpha_{31} = 2, \alpha_{12} = \alpha_{22} = \alpha_{32} = 4, \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon, \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0.75, k_1 = 5, k_2 =$

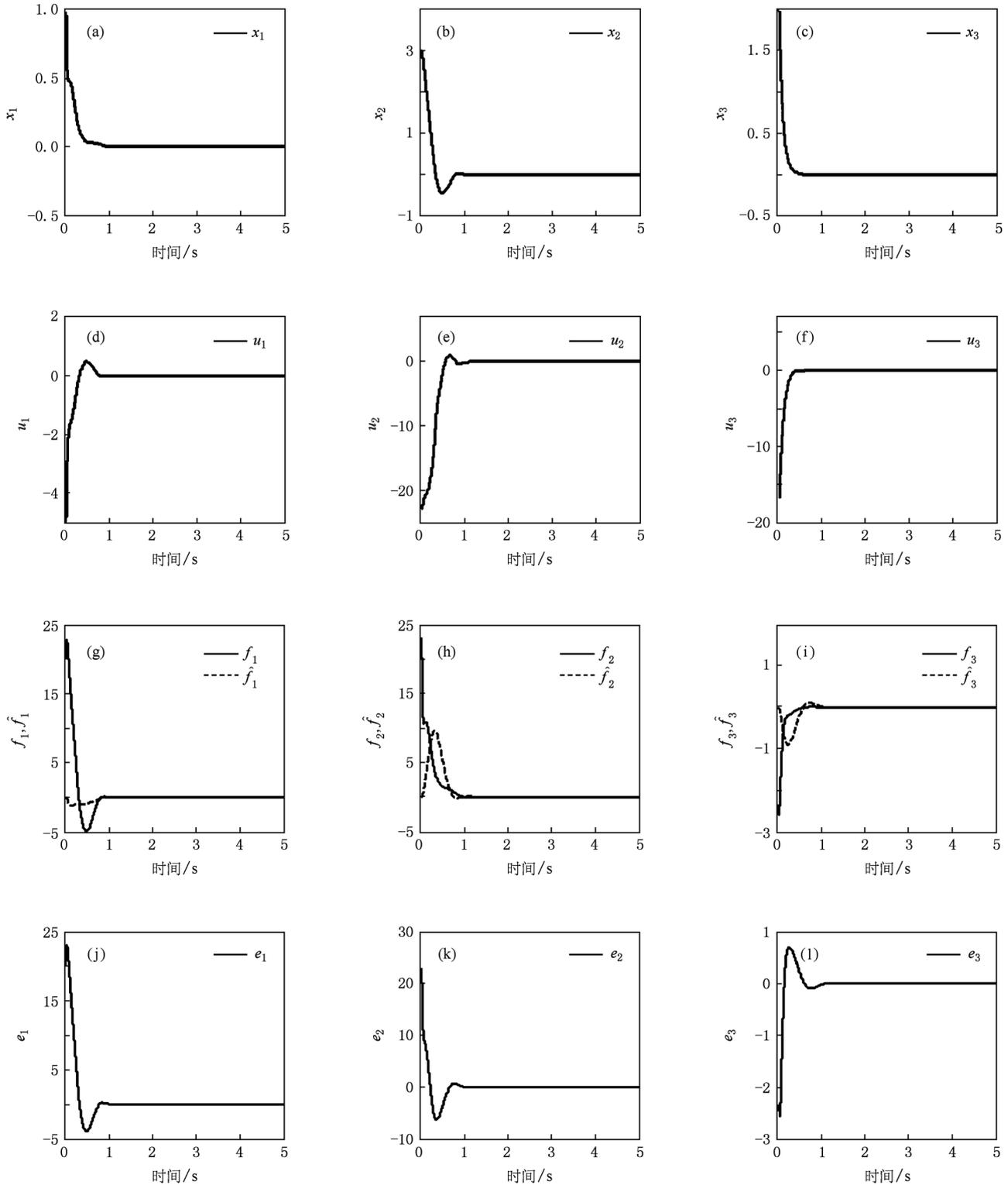


图2 仿真效果 ($\varepsilon = 0.5$) (a)–(c)为受控系统状态 x 运动曲线;(d)–(f)为控制输入 u ; (g)–(i)分别为受控系统不确定非线性 f_i 及其估计值 \hat{f}_i 变化曲线;(j)–(l)分别为受控系统不确定非线性 f_i 估计误差 e_i 的变化曲线

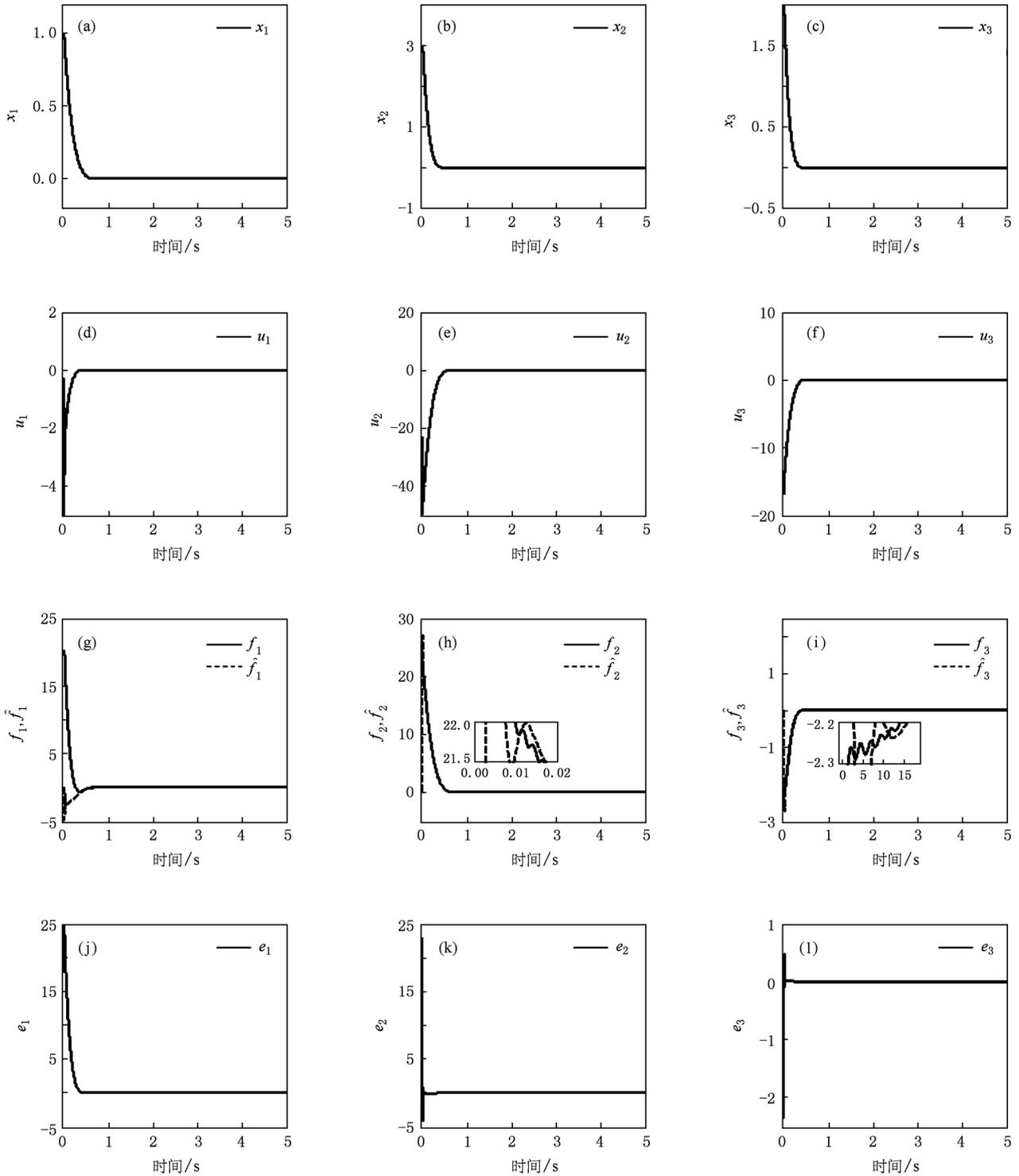


图3 仿真效果($\varepsilon = 0.05$) (a)–(c)为受控系统状态 x 运动曲线;(d)–(f)为控制输入 u ;(g)–(i)分别为受控系统不确定非线性 f_i 及其估计值 \hat{f}_i 变化曲线;(j)–(l)分别为受控系统不确定非线性 f_i 估计误差 e_i 的变化曲线

$k_3 = 10$. 另外,由定理 1,2 的证明分析过程可知, ε_i 值越小, τ_{ε_i} 值越小,扩张状态观测器(10)式的跟踪性能及闭环系统的近似有限时间稳定特性越好. 于是,取 $\varepsilon = 0.5, \varepsilon = 0.05$ 进行仿真,结果分别如图

2,3 所示. 为了表示方便,定义受控 Lorenz 闭环系统中不确定非线性 $f_i(\mathbf{x})$ 的估计误差为 e_i . 同时,为了消除脉冲峰值现象对闭环系统稳定性的影响,采用文中所提方法,对扩张状态观测器状态初始值进行

设计,对控制律 \hat{u}_i^* 进行饱和和处理.

由仿真结果可以看出,采用本文提出的控制方法,Lorenz 混沌系统(1)能够很好地近似实现有限时间稳定控制.同时,通过对图 2,3 中相对应仿真结果图形的比较,进一步验证了其理论分析的正确性,即由图 2,3 中的图(g)—(l)可以看出, ε 值越小,扩张状态观测器(10)的跟踪性能越好;由图 2,3 中的图(a)—(c)可以看出, ε 值越小,受控 Lorenz 闭环系统(14)的近似有限时间稳定特性越好.

4. 结 论

采用本文提出的控制方法,不仅能够很好地抑制 Lorenz 混沌系统混沌现象的产生,而且使得受控 Lorenz 混沌系统实现了近似有限时间稳定控制.理论分析和数值仿真,结果均验证了该控制方法的正确性和有效性.同时,为了抑制脉冲峰值现象的产生,给出了两种抑制方法:1. 对控制律 \hat{u}_i^* 进行饱和和处理;2. 令 $\hat{x}_{i1}(0) = x_{i1}(0)$.

- [1] Chen G R, Lü J H 2003 *Dynamics Analysis, Control and Synchronization for Lorenz system families* (1st ed) (Beijing: Science press) P1, P4 (in Chinese) [陈关荣、吕金虎 2003 Lorenz 系统族的动力学分析、控制与同步(第一版)(北京:科学出版社)第1页、第4页]
- [2] Yu J Z, Su N, Vincent T L 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** P0397 (in Chinese) [余建祖、苏楠 1998 物理学报 **47** P0397]
- [3] Tang G N, Luo X S, Kong L J 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 0030 (in Chinese) [唐国宁、罗晓曙、孔令江 2000 物理学报 **49** 0030]
- [4] Chen M Y, Zhou D H, Shang Y 2004 *Chaos, Solitons and Fractals* **21** P295
- [5] Chen G P, Hao J B 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2914 (in Chinese) [陈光平、郝加波 2009 物理学报 **58** 2914]
- [6] Cai G L, Zheng S, Tian L X 2008 *Chin. Phys. B* **17** 2412
- [7] Li S H, Tian Y P 2003 *Chin. Phys.* **12** P590
- [8] Wang Y N, Tan W, Duan F 2006 *Chin. Phys.* **15** P89
- [9] Qi D L, Wang Q, Gu H 2008 *Chin. Phys. B* **17** P847
- [10] Wang C, Ge S S 2001 *International Journal of Bifurcation and Chaos* **11** 1115
- [11] Pishkenari H N, Meghdari A 2008 *Proceeding of the 5th International Symposium on Mechatronics and its Applications (ISMA08)* **8** 4244
- [12] Bai E W, Karl E L 2000 *Chaos, Solitons and Fractals* **11** 1041
- [13] Guo H J, Liu J H 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 4080 (in Chinese) [郭会军、刘君华 2004 物理学报 **53** 4080]
- [14] Yang S K, Chen C L, Yau H T 2002 *Chaos, Solitons and Fractals* **13** 767
- [15] Yau H T, Yan J J 2004 *Chaos, Solitons and Fractals* **19** 891
- [16] Zhang H, Ma X K, Liu W Z 2004 *Chaos, Solitons and Fractals* **21** 1249
- [17] Sanjay P B, Dennis S B 2005 *Math. Control Signals Systems* **17** 101
- [18] Ahmad N A, Hassan K K. A 1999 *IEEE Transactions on Automatic Control* **44** 1672
- [19] Zheng Q, Gao L Q, Gao Z Q 2007 *Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control* ThB07.6 3501
- [20] Hassan K K 2007 *Nonlinear Systems* (3rd ed) (Beijing: Publishing House of Electronics Industry) P613
- [21] Hassan K K 2008 *International Conference on Control, Automation and Systems* xvii - lvii
- [22] Kokotovic P, Hassan K 1986 *Singular Perturbation Methods in control Analysis and Design* (London: Academic Press, SIAM) P136
- [23] Zheng D Z 2002 *Linear System Theory* (2nd ed) (Beijing: Tsinghua University Press) P238 (in Chinese) [郑大钟 2002 线性系统理论(第二版)(北京:清华大学出版社)第238页]
- [24] Zhang K Y, Xu Z, Lu Q 2001 *MATRIX THEORY* (1st ed) (Xi an: Northwestern Polytechnical University Press) P83 (in Chinese) [张凯院、徐仲、陆全 2001 矩阵论(第一版)(西安:西北工业大学出版社)第83页]
- [25] Andrea B, Lionel R 2005 *Liapunov Functions and Stability in Control Theory* (2nd ed) (Springer-Verlag Berlin Heidelberg) P175

Approximate finite-time stable control of Lorenz Chaos system*

Zhao Jian-Li[†] Wang Jing Wei Wei

(National Engineer Research Center of Advanced Rolling, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China)

(Received 17 October 2010; revised manuscript received 24 January 2011)

Abstract

In the paper, the finite-time stability control problem for the Lorenz chaos system is studied. Considering the existence of uncertainty and nonlinearity in the Lorenz chaos system, a control method is proposed, which makes the controlled Lorenz system achieve approximate finite-time stability. And one kind of extended state observer is improved and designed to solve the unknown problem of uncertainty and nonlinearity for the controlled Lorenz system. The approximate finite-time stability of the closed-loop system is analysed by introducing the singular perturbation theory. Simulation results show the effectiveness of the control method and observer.

Keywords: Lorenz chaos system, approximate finite-time stable, extended state observer, singular perturbation

PACS: 02.40.Xx, 05.45.-a, 05.45.Gg

* Project supported by the National High Technology Research and Development Program of China (Grant No. 2009AA04Z163).

[†] E-mail: jianli791026@yahoo.com.cn