

非高斯噪声激励下含周期信号 FitzHugh-Nagumo 系统的响应特征*

徐超 康艳梅[†]

(西安交通大学理学院应用数学系, 西安 710049)

(2010年12月2日收到; 2010年12月27日收到修改稿)

研究了非高斯噪声激励下含周期信号的 FHN 模型的动力学行为. 通过计算神经元的平均响应时间、观察神经元的共振活化和噪声增强稳定现象, 分析了非高斯噪声对神经元动力学行为的影响. 发现通过改变非高斯噪声的相关时间可以有效地改变共振活化和噪声增强稳定现象. 观察到在强相关噪声下不同强度的非高斯噪声抑制了神经元的噪声增强稳定现象而共振活化现象几乎不变, 也就是非高斯噪声有效地增强了神经响应的效率. 观察了平均响应时间与非高斯噪声参数 q 之间的关系, 当 q 为一个有限的小于 1 的值时, 平均响应时间取得最小值. 最后表明在一定条件下, 非高斯噪声出现重尺度现象, 即非高斯噪声产生的效果可以由高斯白噪声来估计.

关键词: FHN 神经系统, 非高斯噪声, 平均响应时间, 共振活化现象

PACS: 87.19.1l, 87.19.1c, 05.40.-a, 05.45.-a

1. 引言

世界的本质是非线性的、复杂的和充满了噪声干扰的. 噪声分为高斯噪声和非高斯噪声. 目前对高斯噪声的研究已相对完整. 非高斯噪声为不易处理的非马尔科夫过程, 所以对其的研究还比较少. 然而, 现实生活中的噪声一般为非高斯噪声, 所以研究处于非高斯噪声工作环境的非线性系统是非常有意义的^[1].

近来非线性系统中噪声诱导非平衡现象受到了人们广泛的关注. 这些现象一般都涉及到系统的响应. 系统的响应不仅由于噪声的加入而产生或者加强, 而且在噪声参数取确定值时得到优化. 这些现象包括随机共振^[2-4], 布朗马达^[5, 6], 噪声诱导相位跃迁^[7, 8], 共振活化 (resonant activation)^[9], 噪声增强稳定性^[10]等. 其中, 共振活化是由 Doering 和 Gadoua^[9]提出的. 他们发现平均逃逸时间是关于噪声的相关时间 τ 非单调的. 当 τ 为一个有限的值时, 平均逃逸时间得到最小值, 并把这种现象称为共振活化. 噪声增强稳定是由 Dayan, Gitterman 和

Weiss^[10]在研究势与时间相关的过阻尼模型系统时发现的. 他们发现当噪声强度取一个有限值时, 原本不稳定系统变得稳定, 比如原本明显变化的系统响应时间在噪声强度取该有限值时趋于一个稳定常数. 这种现象称为不稳定系统的噪声增强稳定.

神经系统是典型的非线性系统, 而且神经系统以处于噪声的工作环境中著名. 1952年, Hodgkin 和 Huxley^[11]提出了著名的四维 HH 模型, 成功地表述了神经放电的电化学机理. FitzHugh 和 Nagumo^[12]简化了 HH 模型, 提出了二维 FHN 模型^[13]. 目前对高斯噪声激励下的 FHN 模型的研究比较多^[14-17], 而对非高斯噪声环境下 FHN 神经元模型的研究还比较少, 因此, 研究非高斯噪声激励下的 FHN 神经系统是必要的.

本文通过计算非高斯噪声激励下含周期信号 FHN 模型的平均响应时间, 分析模型的共振活化和噪声增强稳定现象. 研究这两种现象跟非高斯噪声各个参数之间的关系. 最后表明在一定条件下, 非高斯噪声出现重尺度现象, 即非高斯噪声产生的效果可以由高斯白噪声来估计.

* 国家自然科学基金(批准号:11072182)资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: kangyanmei2002@yahoo.com.cn

2. 非高斯噪声激励下的随机 FHN 模型

非高斯噪声激励下的随机 FHN 模型为

$$\dot{x} = x - \frac{x^3}{3} - y + A \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (1)$$

$$\dot{y} = \varepsilon(x + I) + \zeta, \quad (2)$$

其中 x 为快变的膜电压变量, y 是慢变的恢复变量, $\varepsilon = 0.05, I = 1.1, \varphi_0 = 0$. A, ω 分别是外部输入信号的振幅和频率, $\zeta(t)$ 是非高斯噪声项. 本文记没有外部信号输入和噪声影响时系统(1), (2)的唯一稳定点 $x_0 = -I, y_0 = -I + I^3/3$ 为初始状态. 这里的非高斯噪声 $\zeta(t)$ 满足

$$\dot{\zeta} = \frac{1}{\tau} K(\zeta) + \frac{1}{\tau} \theta \eta(t), \quad (3)$$

$$K(\zeta) = - \frac{\zeta}{1 + (q - 1)(\tau/\theta^2)\zeta^2}, \quad (4)$$

q 表示非高斯噪声 $\zeta(t)$ 偏离高斯噪声的程度, 当 $q = 1$ 时, $\zeta(t)$ 服从高斯分布. $\eta(t)$ 是高斯白噪声, $\langle \eta(t) \rangle = 0, \langle \eta(t)\eta(t') \rangle = \delta(t - t')$. (3)式服从平稳分布

$$p_q(\zeta) \propto \left[1 + (q - 1) \left(\frac{\tau}{\theta^2} \right) \varepsilon^2 \right]_+^{-1/q-1}, \quad (5)$$

其中 $x \geq 0$ 时, $[x]_+ = x; x < 0$ 时, $[x]_+ = 0$. 当 $q > 1$ 时, (5)式服从长尾分布; 当 $q < 1$ 时, (5)式服从闭合分布^[18]. 系统(1), (2)的时间历程和相图如图 1.

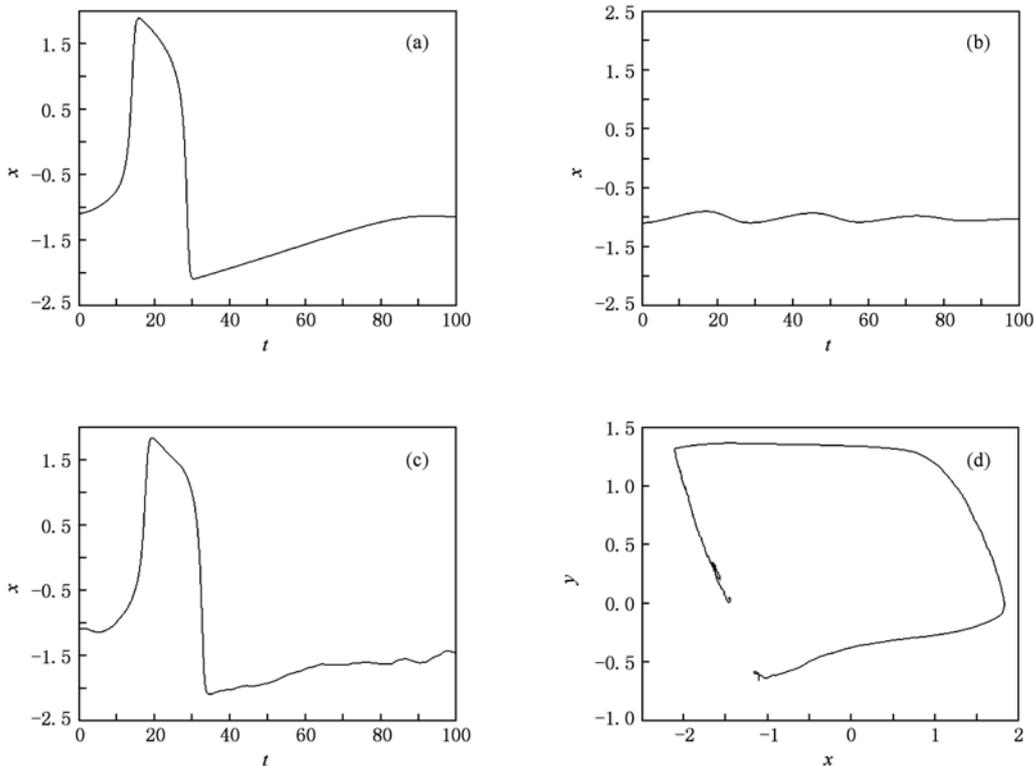


图 1 (a) 为没有噪声出现的情况下 $A = 0.5, \omega = 0.02$ 时神经元的时间历程, 其中含有 x 大于零的放电尖峰; (b) 为没有噪声出现的情况下 $A = 0.5, \omega = 0.01$ 时神经元的时间历程, 其中没有 x 大于零的放电尖峰; (c), (d) 分别为 $A = 0.5, \omega = 0.01$ 时 $q = 0.8, \tau = 1, \theta = 0.05$ 的非高斯噪声激励下神经元的时间历程和相图, 不加噪声时没有放电尖峰的 x , 在噪声的激励下产生一个大于零的放电尖峰(下文如无特殊说明, 记 $A = 0.5, \omega = 0.01$)

3. 非高斯噪声激励下 FHN 模型的平均响应时间

因为共振活化和噪声增强稳定现象涉及到系

统的响应, 所以我们通过分析神经元的平均响应时间(MRT)来研究 FHN 系统的动力学行为. 定义 MRT 为^[13]

$$\text{MRT} = \langle T \rangle = 1/N \sum_{i=1}^N T_i, \quad (6)$$

其中 T_i 是第 i 次试验的首次响应时刻, N 是试验的

总次数. 定义 $N = 15000$, 初值为 (x_0, y_0) , 当 x 穿过阈值 $x_{th} = 0$ 时, 脉冲响应发生. 我们通过 MRT 分析系统(1), (2)式的共振活化和噪声增强稳定现象.

3.1. 共振活化

共振活化是由 Doering 和 Gadoua^[9] 提出的, 他们发现平均逃逸时间是关于噪声的相关时间 τ 非单调的. 当 τ 为一个有限的值时, 平均逃逸时间得到最小值, 并把这种现象称为共振活化. 在图 2 中, 观察在不同噪声强度 θ 和相关时间 τ 下 MRT 与 ω 关

系, MRT 的最小值即为共振活化最小值. 在弱噪声激励下(如图 2(a)和(c)), 共振活化最小值很明显, 在相关时间 τ 增加时, 最小值并没有太明显的变化, 也就是说不同的 τ 对共振活化现象的影响不明显, 即发生了弱噪声抑制效果. 在强噪声激励下(如图 2(b)和(d)), 相关时间 τ 对共振活化最小值影响明显, 也就是说不同的 τ 有效地影响了共振活化现象, 而且随着 τ 的增加, 这个最小值越来越接近不含噪声的确定性方程所对应的 MRT 值, 即发生了强噪声抑制效果.

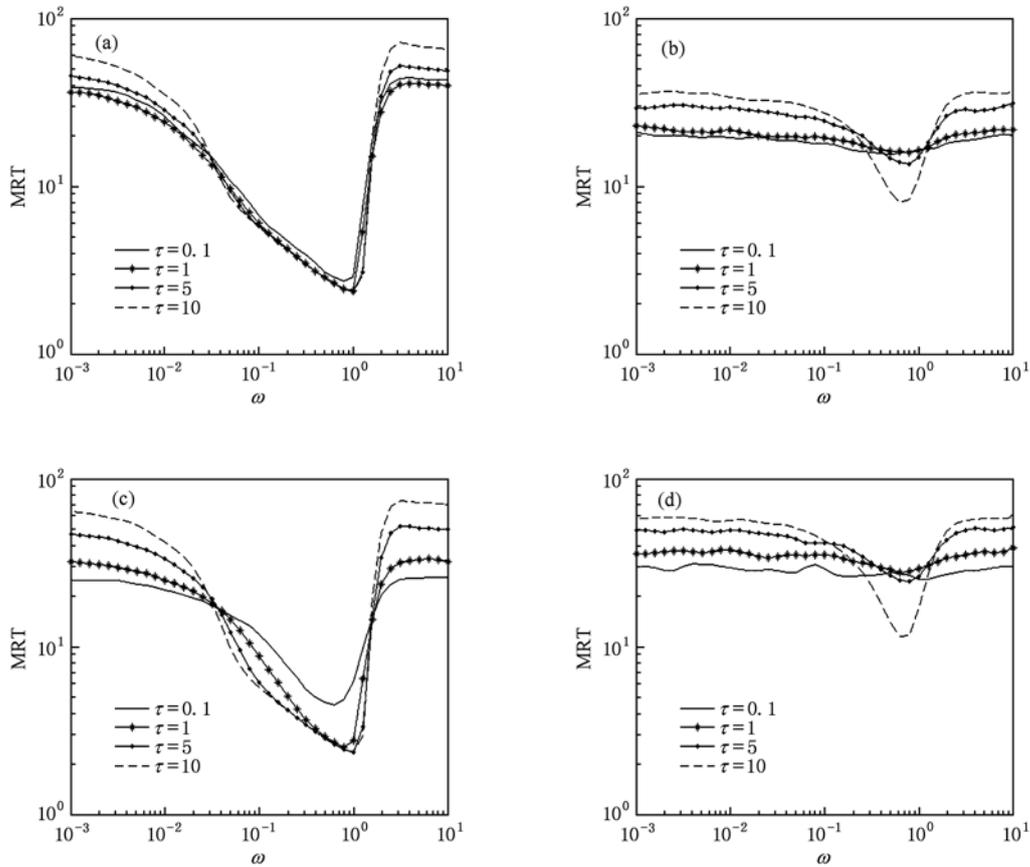


图2 (a)(c)为在弱噪声强度下, 在相关时间 τ 增加时可以发现共振活化最小值有轻微的移动; (b)(d)为在强噪声强度下, τ 的值对共振活化最小值有明显的影响. 在 τ_1 很小时, 共振活化最小值几乎没有, 在 D 很大时, 共振活化最小值很明显

3.2. 噪声增强稳定性

噪声增强稳定性是由 Dayan, Gitterman 和 Weiss^[10] 在研究势与时间相关的过阻尼模型系统时发现的. 他们发现当噪声强度取一个有限值时, 原本不稳定的系统变得稳定, 即在噪声的相关时间改变时, 原本明显变化有最小值的 MRT 趋近于一个不变的常数. 这种现象称为不稳定系统的噪

声增强稳定性. 图 2 中 τ 不变时比较不同噪声的 MRT, 可以发现随着噪声的增强 MRT 也增强了, 即随着噪声强度的增加, 共振活化最小值下凹的程度减小了. MRT 的增强表示强噪声引起了响应延迟, 降低了神经响应的效率, 称这种行为是噪声增强稳定作用. 为了进一步分析 MRT 的噪声增强稳定作用, 我们固定相关时间 τ 比较不同噪声强度的 MRT, 如图 3, 4. 可以发现弱噪声有效的影响了神

经响应的效率. 特别地, 当 $\tau = 0.1, 1$ 时, 随着噪声的增强共振活化最小值下凸的程度逐渐减小, 即噪声增强稳定作用(如图 3(a), (b), 图 4(a), (b)). 而相关时间 τ 很大时, 噪声强度的增加对共振活化最小值没有太大影响(如图 3(d), 4(d)). 从图 3(a), 图 4(a) 中, 可以发现在最小的

相关时间和噪声强度下 ($\tau = 0.1, \theta = 0.05$) 共振活化最小值大概在 $\omega \approx 0.7$ 上. 因此, 我们固定 $\omega = 0.7$, 观察 MRT 与噪声强度之间的关系(如图 5). 我们可以发现, 随着相关时间的增加, MRT 与噪声强度的相关性逐渐消失, 即随着 τ 的增加噪声对共振活化最小值的影响逐渐减小.

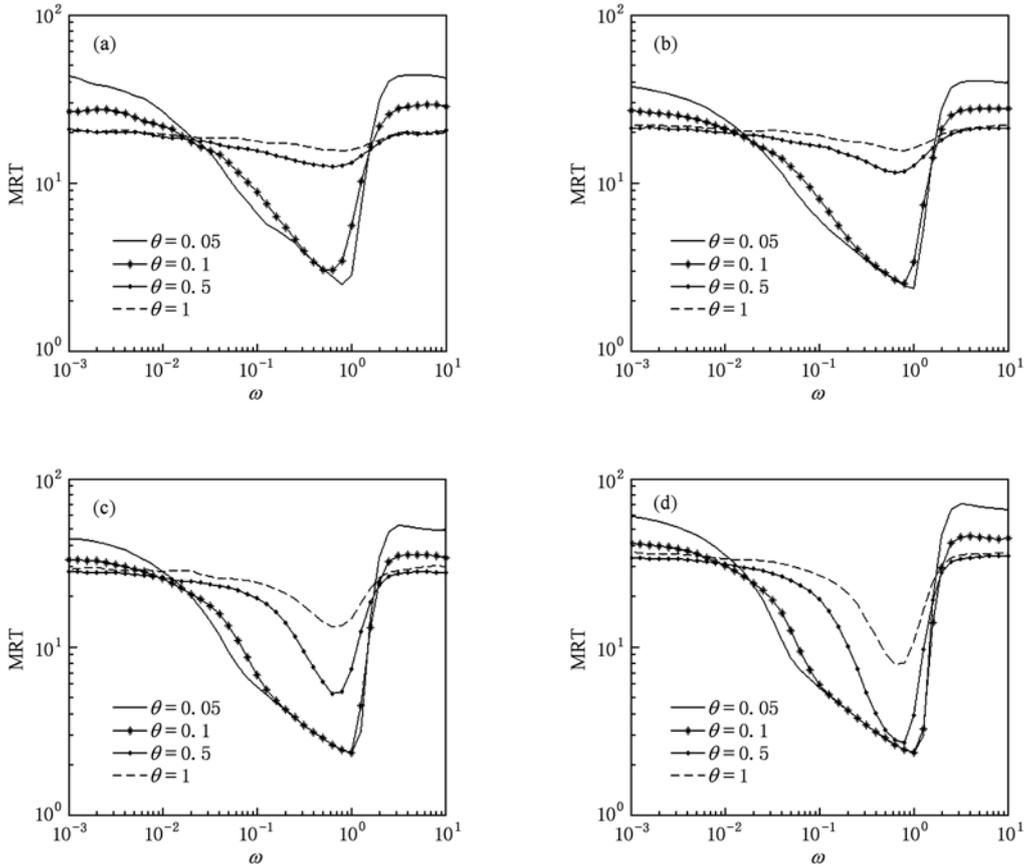


图 3 (a) 当 $q = 0.8$ 时, 在弱相关时间 ($\tau = 0.1$) 的情况下, 共振活化最小值是关于噪声强度单调的; (b) 当相关时间增加时 ($\tau = 1$), 这个现象开始减弱; (c), (d) 在强相关时间 ($\tau = 5, \tau = 10$) 的情况下, 共振活化最小值几乎与噪声强度无关

在图 5 中, 观察 MRT 与噪声强度 θ 的关系, 可以发现, 它是单调递增的. 但是, 当相关时间 τ 很大时, 在所观察的噪声强度区间中, MRT 几乎是一个常数, 不随噪声强度的增加而改变. 如图 5, 在 $\tau = 25$ 时, 噪声强度对 MRT 的影响几乎消失. 在图 6 中, 我们给出了 $\theta = 1$ 时 MRT 与 τ 的关系.

3.3. 平均响应时间与非高斯噪声参数 q 的关系

在图 7 中, 固定 ω, θ, τ 观察 MRT 与 q 的关系. 可以发现, MRT 关于 q 不单调. ω, θ, τ 不变时, 存在一个 $q_0 < 1$, 使得 MRT 在 $q = q_0$ 时取得最小值. 也就是说 $q = q_0$ 的非高斯噪声对神经响应影响最大.

可以发现在 $q = 1$ 附近, 有一部分 $q < 1$ 的非高斯噪声比高斯噪声更有利于共振活化, 而其他的非高斯噪声更有利于噪声增强稳定.

3.4. 非高斯噪声的重尺度作用

当 $|q - 1| \ll 1$ 时, 用路径积分法^[1]可得

$$\frac{1}{\tau} K(\zeta) \approx -\frac{\zeta}{\tau_1}, \quad (7)$$

其中

$$\tau_1 = \frac{2(2-q)}{(5-3q)}\tau. \quad (8)$$

将(7)式代入(3)式后, (3)式可以简化为

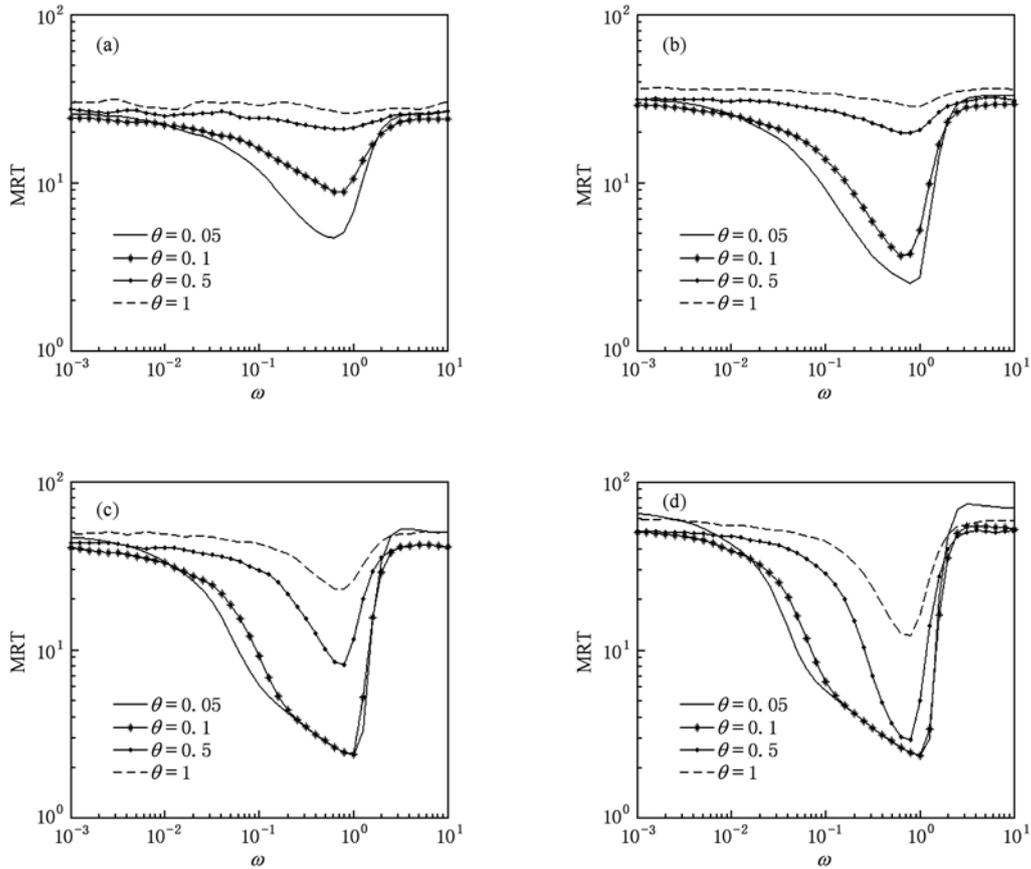


图4 (a)当 $q = 1.5$ 时,在弱相关时间($\tau = 0.1$)的情况下,共振活化最小值是关于噪声强度单调的; (b)当相关时间增加时($\tau = 1$),这个现象开始减弱; (c), (d)在强相关时间($\tau = 5, \tau = 10$)的情况下,共振活化最小值几乎与噪声强度无关

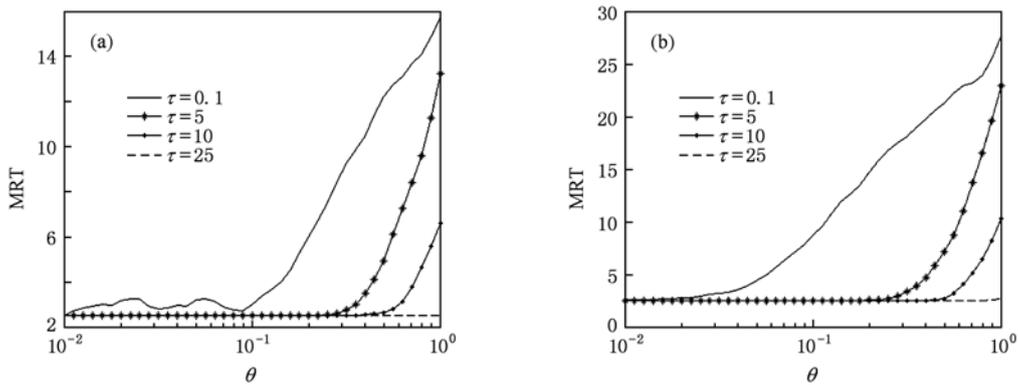


图5 当 $\omega = 0.7$ 时, MRT 是关于噪声强度 θ 单调递增的 (a) $q = 0.8, \omega = 0.7$; (b) $q = 1.5, \omega = 0.7$

$$\dot{\zeta} = -\frac{\zeta}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_1} D \eta(t), \quad (9)$$

其中

$$D = \frac{2(2-q)\theta}{(5-3q)}. \quad (10)$$

即在 $|q - 1| \ll 1$ 时,非高斯过程可以近似转化为关

联时间为 τ_1 , 噪声强度为 D 的高斯色噪声^[1]. 对于高斯色噪声(9)式,根据色噪声的重尺度作用^[13]

$$\sigma_{\text{white}}^2 = \frac{\sigma_{\text{colored}}^2}{2\tau_1}. \quad (11)$$

由方程(9)–(11)可得,当 $|q - 1| \ll 1, |t - t'| \ll \tau_1$ 时,方程(3)产生的非高斯噪声对 FHN 模型的作

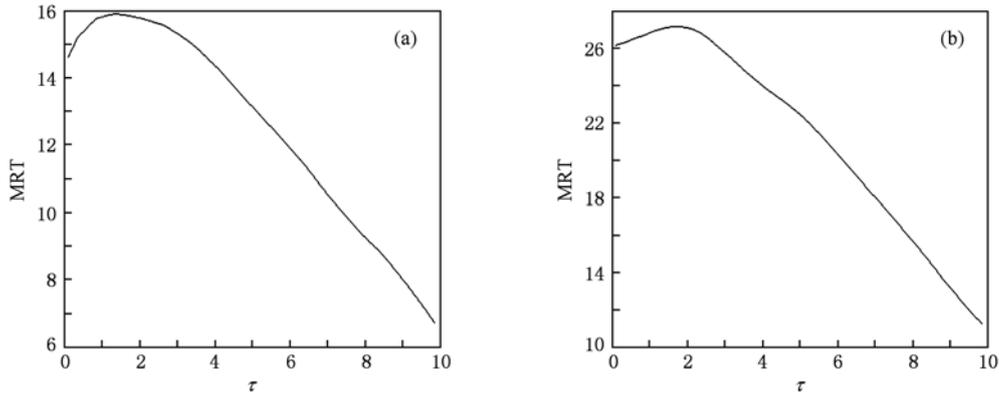


图6 当 $\omega = 0.7, \theta = 1$ 时, MRT 关于相关时间 τ 不单调, 在 τ 较小时递增, 在 τ 较大时递减 (a) $q = 0.8, \omega = 0.7, \theta = 1$; (b) $q = 1.5, \omega = 0.7, \theta = 1$

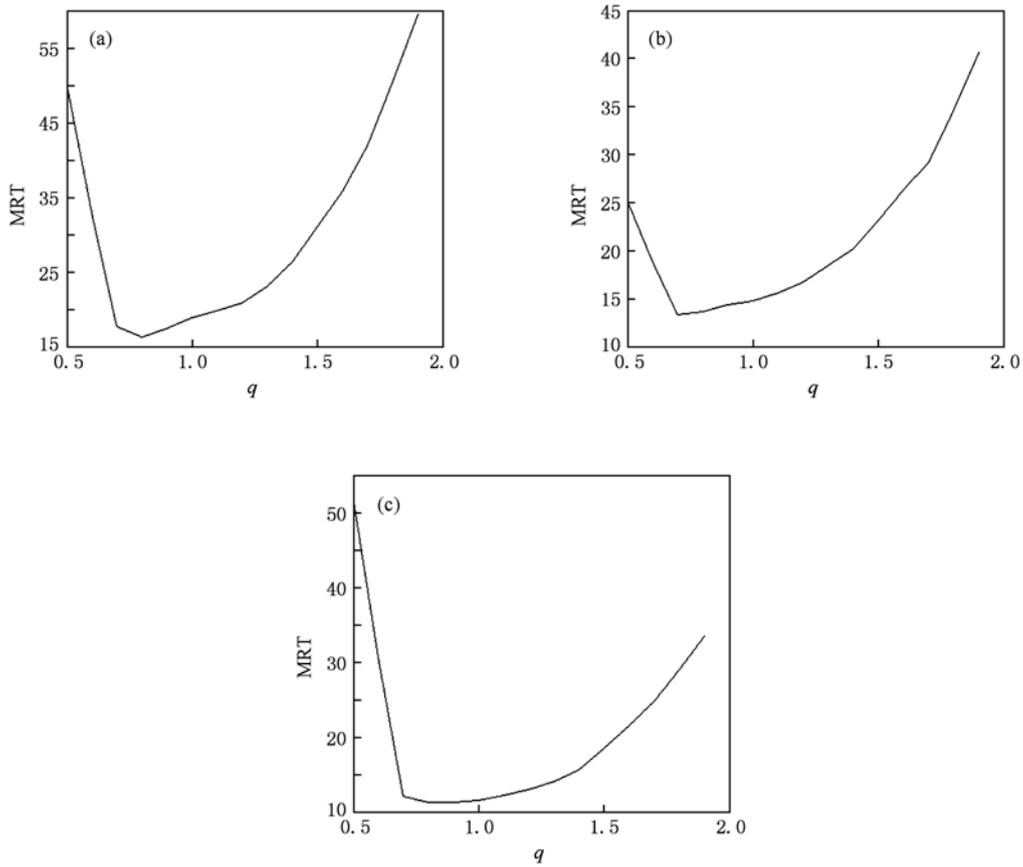


图7 MRT 关于 q 不单调, 在 q 较小时递减, 在 q 较大时递增 (a) 在 $\omega = 0.7, \theta = 1, \tau = 1.5$; (b) $\theta = 1, z = 5$; (c) $\theta = 0.5, z = 1.5$

用可以用高斯白噪声来近似, 如图 8 所示. 比较 $\theta = 0.1, \tau = 20$ 时 $q = 0.98, q = 1.02$ 的非高斯噪声

$$\text{与 } \sigma_{white} = \sqrt{\frac{\left(\frac{2(2-q)\theta}{5-3q}\right)^2}{2\tau_1}} = \sqrt{\frac{(2-q)\theta^2}{(5-3q)\tau}} \approx \sqrt{\frac{\theta^2}{2\tau}}$$

时所产生的高斯白噪声对神经元的影响, 发现它们对应的共振活化最小值相等. 即在 $|q - 1| \ll 1, \tau$ 取合适的值时, 实际影响神经元系统的噪声强度是以参数 $\sqrt{1/(2\tau)}$ 递减的. 重尺度现象减弱了噪声对 FHN 模型的作用, 有利于估算现实中非高斯噪声

激励下的神经元响应.

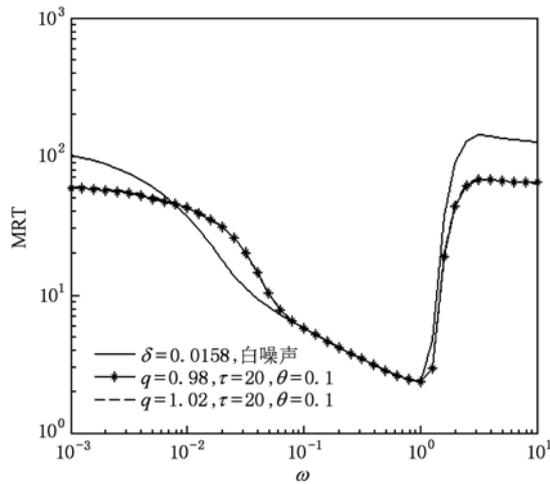


图 8 $\tau = 20, \theta = 0.1$ 时,对比 $q = 0.98, q = 1.02$ 产生的非高斯噪声和 $\sigma_{\text{white}} = \sqrt{\theta^2/2\tau}$ 产生的白噪声对 MRT 的影响,它们对应的共振活化最小值重合

4. 结 论

本文分析了平均响应时间与噪声强度和相关时间的关系. 随着相关时间 τ 的变化共振活化和噪声增强稳定现象产生了有意义的变化. 强相关噪声下相关时间 τ 增加时,噪声增强稳定受到抑制而共振活化趋近一个常数. 也就是说,当噪声源的相关时间很大时,共振活化最小值对应一个确定 ω 值并且保持不变的,相反,显示噪声作用的 MRT 增强效果渐渐消失. 观察了 MRT 与非高斯噪声参数 q 的关系,发现在 $q = 1$ 附近,有一部分 $q < 1$ 的非高斯噪声比高斯噪声更有利于共振活化. 其他的非高斯噪声更有利于噪声增强稳定. 在强相关噪声下噪声作用的削弱表明自相关噪声的重尺度作用. 通过重尺度作用,当 $|q - 1| \ll 1, \tau$ 取合适的值时,非高斯噪声所产生的效果可以由噪声强度为 $\sigma_{\text{white}} = \sqrt{\frac{\theta^2}{2\tau}}$ 的高斯白噪声估计.

[1] Zhao Y, Xu W, Zou S C 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 1396 (in Chinese) [赵燕、徐伟、邹少存 2009 物理学报 **58** 1396]
 [2] McNamara B, Wiesenfeld K, Roy R 1988 *Phys. Rev. Lett.* **60** 2626
 [3] Kang Y M, Xu J X, Xie Y 2003 *Phys. Rev. E* **68** 036123
 [4] Zhang G J, Xu J X 2005 *Acta Phys. sin.* **54** 557 (in Chinese) [张广军、徐健学 2005 物理学报 **54** 557]
 [5] Magnasco M O 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 1477
 [6] Doering C R, Horsthemke W, Riordan J 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 2984
 [7] Broeck C V D, Parrondo J M R, Toral R 1994 *Phys. Rev. Lett.* **73** 3395
 [8] Castro F, Sanchez A D, Wio H S 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 1691

[9] Doering C R, Gadoua J C 1992 *Phys. Rev. Lett.* **69** 2318
 [10] Dayan I, Gitterman M, Weiss G H 1992 *phys. Rev. A* **46** 757
 [11] Hodgkin A L, Huxley A F 1952 *J. Physiol.* **117** 500
 [12] FitzHugh R 1961 *Biophys. J.* **1** 445
 [13] Valenti D, Augello G, Spagnolo B 2008 *Eur. Phys. J. B* **65** 443
 [14] Tuckwell H C, Roger Rodriguez, Wan F Y M 2003 *Neural Computation* **15** 143
 [15] Acebron J A, Bulsara A R, Rappel W J 2004 *phys. Rev. E* **69** 026202
 [16] Hiroyuki Kitajima, Jürgen Kurths 2005 *Chaos* **15** 023704
 [17] Wang C Q, Xu W, Zhang N M, Li H Q 2008 *Acta Phys. sin.* **57** 0749 (in Chinese) [王朝庆、徐伟、张娜敏、李海泉 2008 物理学报 **57** 0749]
 [18] Hideo Hasegawa 2007 *Physica A* **384** 241

Mean response time of FitzHugh-Nagumo model in the presence of non-Gaussian noise and a periodic signal*

Xu Chao Kang Yan-Mei[†]

(Department of Applied Mathematics, School of Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

(Received 2 December 2010; revised manuscript received 27 December 2010)

Abstract

The dynamics of the FitzHugh-Nagumo (FHN) model in the presence of non-Gaussian noise and a periodic signal is analyzed in this paper. We observe the resonant activation (RA) and the noise enhanced stability (NES) phenomena and analyze the effect of the non-Gaussian noise on the neuron dynamics by the mean response time (MRT) of the neuron. Some significant changes of the resonant activation (RA) and noise enhanced stability (NES) phenomena due to the correlation time of the noise are found. We observe that the NES effect is suppressed and RA phenomenon is unchanged, i. e., the non-Gaussian noise effectively enhances the efficiency of the neuronal response, for the case of strongly correlated noise. We report on the MRT as a function of q , and find that MRT is nonmonotonically dependent on q with a minimum at a finite q value which is smaller than 1. Finally we obtain that in certain situations, the non-Gaussian noise causes rescaling phenomenon, then the effect of non-Gaussian noise can be reproduced by a white noise.

Keywords: FitzHugh-Nagumo neural system, non-Gaussian noise, mean response time, resonant activation phenomena

PACS: 87.19.1l, 87.19.1c, 05.40.-a, 05.45.-a

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11072182).

[†] Corresponding author. E-mail: kangyanmei2002@yahoo.com.cn