

新乌龟坐标变换下的动态 Kinnersley 黑洞的 Hawking 辐射*

潘伟珍[†] 杨学军 骆金彩

(绍兴文理学院物理与电子信息系, 绍兴 312000)

(2010 年 9 月 16 日收到; 2011 年 1 月 12 日收到修改稿)

采用两种新的乌龟坐标变换, 用改进的 Damour-Ruffini 方法研究了动态 Kinnersley 黑洞的 Hawking 辐射. 在新乌龟坐标变换下, 将 Klein-Gordon 方程在视界附近变换成平直时空的标准波动方程形式, 得到了黑洞的表面引力及 Hawking 温度, 该温度在黑洞表面不同点有不同的值. 值得注意的是, 旧的乌龟坐标变换存在量纲错误, 新乌龟坐标变换没有量纲问题, 选不同的旧乌龟坐标变换计算同一黑洞所得结果不同, 但是采用不同的新乌龟坐标变换所得结果仍然不同.

关键词: 黑洞, 乌龟坐标变换, Hawking 辐射, Klein-Gordon 方程

PACS: 97.60.Lf, 04.70.-s, 04.70.Dy

1. 引言

黑洞是爱因斯坦广义相对论最有深远意义的预言之一, 也是目前物理学和天文学领域的一个研究热点. 黑洞理论是一个包括相对论、量子论、统计物理和天体物理在内的多学科和交叉学科理论. 自从 20 世纪 70 年代, Hawking 从理论上给出黑洞辐射^[1]以来, Hawking 辐射引起了科学界的广泛关注. Hawking 辐射又称黑洞蒸发, 是黑洞通过量子效应产生的辐射, 它不同于原子的自发辐射和受激辐射, 这些辐射是非热辐射, 与温度没有关系, 而 Hawking 辐射是由温度所决定的黑体辐射, 其物理机理是量子真空被黑洞周围的引力场所极化. Gibbons 和 Hawking 证明黑洞辐射谱是严格的黑体谱^[2]. Hawking 辐射的发现表明黑洞不再是一颗“僵死”的星体, 它不是恒星演化的最终结局, 而是恒星演化过程中的一个阶段, 后来人们进一步研究发现, 不仅正在塌缩中的黑洞, 而且完成塌缩后的永久黑洞以及任何一个具有未来视界的静态或稳态时空都具有 Hawking 辐射. Hawking 辐射的发现不仅使黑洞热力学名正言顺, 而且揭示了引力理论、

热力学和量子理论之间的联系. 黑洞辐射一直是人们非常关注的研究课题之一, 对它的彻底研究需要量子引力理论, 但至今还没有一个成功的量子引力理论.

黑洞热辐射除了 Hawking 用弯曲时空量子场论方法给出的证明以外, 还有多种其他的导出方法. 这里要特别提到 Damour 和 Ruffini 的方法^[3], 该方法不用考虑黑洞的塌缩, 也不用二次量子化, 只用弯曲时空的相对论性量子力学就可得到黑洞的 Hawking 辐射. 该方法认为, 视界面可看作量子力学的势垒, 辐射粒子正是穿过这样的势垒而产生的. 通过引入乌龟坐标变换, 将弯曲时空背景下粒子的相对论量子力学方程的径向部分, 在视界面附近化成平直时空的标准波动方程形式, 然后通过解析延拓得到视界内外的出射波函数, 再利用波函数的内积关系得到辐射粒子谱. 后来, 该方法经过 Sannan^[4]的改进和赵峥等人^[5-7]在动态黑洞中的推广, 成为研究一般稳态和动态黑洞 Hawking 辐射的非常有效的方法^[8-13]. 该方法在求 Hawking 辐射谱的同时还能求出动态黑洞视界应满足的方程和视界面上逐点的表面引力和温度.

用 Damour-Ruffini 方法和改进的 Damour-Ruffini

* 国家自然科学基金(批准号:10873003, 11045005)和浙江省自然科学基金(批准号:Y6090739)资助的课题.

[†] E-mail: panwz8@usx.edu.cn

方法得到的 Hawking 辐射谱,均为纯热谱.对黑洞信息疑难问题的讨论认为,如果信息守恒,黑洞辐射会偏离纯热谱.如 Parikh 和 Wilczek 等人用半经典的方法研究粒子的隧穿效应所得黑洞热辐射就不是纯热谱^[14].但是,黑洞信息疑难问题还没有定论,信息是否守恒还不能下最后结论,Hawking 辐射谱是否为纯热谱还并不清楚.

本文用改进的 Damour-Ruffini 方法和两种新乌龟坐标变换^[15],研究动态 Kinnersley 黑洞的 Hawking 辐射.值得注意的是,旧的乌龟坐标变换存在量纲错误,新乌龟坐标变换没有量纲问题,选不同的旧乌龟坐标变换计算同一黑洞所得结果不同,但是采用两种新乌龟坐标变换所得结果仍然不同.

2. 动态 Kinnersley 黑洞的时空线元

采用超前爱丁顿坐标和 $(-, +, +, +)$ 号差,动态 Kinnersley 黑洞的时空线元为^[16]

$$ds^2 = - \left[1 - 2\arccos\theta - \frac{2m}{r} - r^2(f^2 + h^2\sin^2\theta) \right] dv^2 + 2dvdr + 2f^2 dv d\theta + 2hr^2\sin^2\theta dv d\varphi + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2, \quad (1)$$

其中

$$f = -a\sin\theta + b\sin\varphi + c\cos\varphi, \\ h = \cot\theta(bc\sin\varphi - c\sin\varphi).$$

参量 $m = m(v)$ 为源质量, $a = a(v)$ 为加速度的大小, $b = b(v)$, $c = c(v)$ 代表加速度的方向的改变.由于黑洞质量可变和黑洞的任意加速,时空是动态和非轴对称的.

容易算出度规行列式和逆变度规分别为

$$g = -r^4\sin^2\theta, \quad (2)$$

$$(g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 - 2\arccos\theta - \frac{2m}{r} & -f & -h \\ 0 & -f & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & -h & 0 & \frac{1}{r^2\sin^2\theta} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

令事件视界的曲面方程为

$$F(v, r, \theta, \varphi) = 0 \text{ 或 } r_H = r_H(v, \theta, \varphi), \quad (4)$$

其应满足类光超曲面条件

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial F}{\partial X^\mu} \frac{\partial F}{\partial X^\nu} = 0, \quad (5)$$

由(3),(4)和(5)式可得事件视界 $r_H = r_H(v, \theta, \varphi)$ 满足的如下方程:

$$1 - 2\arccos\theta - \frac{2m}{r_H} - 2\dot{r}_H + 2f_H r'_H + 2h_H r'_{H\varphi} + \frac{r_H'^2}{r_H^2} + \frac{r_H'^2}{r_H^2 \sin^2\theta} = 0, \quad (6)$$

其中

$$\dot{r}_H = \frac{\partial r_H}{\partial v}, r'_H = \frac{\partial r_H}{\partial \theta}, r'_{H\varphi} = \frac{\partial r_H}{\partial \varphi}.$$

3. 黑洞的 Hawking 辐射

本文研究标量粒子的 Hawking 辐射.在弯曲时空中质量为 μ 的标量粒子,即 Klein-Gorden 粒子满足的动力学方程为

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{-g} \cdot g^{\mu\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\nu} \right) = \mu^2 \Phi.$$

将(2)式度规行列式及(3)式逆变度规代入此式并整理后有

$$\begin{aligned} & \left(1 - 2\arccos\theta - \frac{2m}{r} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial v} - 2f \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} \\ & - 2h \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial v} \\ & + \frac{2r - 4ar^2 \cos\theta - 2m}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \left(-\frac{2}{r} f + \frac{\cot\theta}{r^2} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \\ & - \frac{2}{r} h \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - \mu^2 \Phi = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

引入新乌龟坐标变换^[15]

$$r_* = r + \frac{1}{2\kappa(v_0, \theta_0, \varphi_0)} \ln \left[\frac{r - r_H(v, \theta, \varphi)}{r_H(v, \theta, \varphi)} \right],$$

$$v_* = v - v_0, \theta_* = \theta - \theta_0, \varphi_* = \varphi - \varphi_0, \quad (8)$$

其中 $\kappa(v_0, \theta_0, \varphi_0)$ 是可调节参数(后面将看到其代表辐射的温度)并在乌龟坐标变换中保持不变, v_0 , θ_0 和 φ_0 是常数, v_0 是辐射粒子脱离黑洞表面的时刻, θ_0 和 φ_0 是辐射粒子脱离黑洞表面的位置.

在(8)式的坐标变换下,方程(7)变为

$$\frac{r_H'^2}{\sin^2\theta} + [1 + 2\kappa(r - r_H)] \left\{ -2rr_H(\dot{r}_H - fr'_H - hr'_{H\varphi}) + r_H^2[1 + 2\kappa(r - r_H)] \left(1 - 2\arccos\theta - \frac{2m}{r} \right) \right\} \\ 2\kappa r_H^2(r - r_H)[1 + 2\kappa(r - r_H)]$$

$$\begin{aligned}
 & \times \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r_*^2} + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r_* \partial v_*} - \frac{2r'_H + 2frr_H[1 + 2\kappa(r - r_H)]}{rr_H[1 + 2\kappa(r - r_H)]} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r_* \partial \theta_*} - \frac{2r'_{H\Phi} + 2hrr_H[1 + 2\kappa(r - r_H)] \sin^2 \theta}{rr_H[1 + 2\kappa(r - r_H)] \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r_* \partial \varphi_*} \\
 & + \left\{ \frac{1}{r_H^2 r(r - r_H)[1 + 2\kappa(r - r_H)]} \left[- \left(1 - 2\arccos \theta - \frac{2m}{r} \right) r_H^2 r + 2\dot{r}_H r_H^2 r - 2f r'_H r_H^2 r - 2h r'_{H\Phi} r_H^2 r - r_H'' r_H(r - r_H) \right. \right. \\
 & \left. \left. + r_H'^2(r - r_H) - r_H'^2 r_H - \frac{r_{H\Phi}'' r_H(r - r_H) - r_{H\Phi}'^2(r - r_H) + r_{H\Phi}'^2 r_H}{\sin^2 \theta} - r_H(r - r_H)r^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. \times \left(\frac{2}{r} \dot{r}_H - \frac{2}{r} f r'_H + \frac{\cot \theta}{r^2} r'_H - \frac{2}{r} h r'_{H\Phi} \right) \right] + \frac{2r - 4ar^2 \cos \theta - 2m}{r^2} \right\} \frac{\partial \Phi}{\partial r_*} + \frac{2\kappa(r - r_H)}{1 + 2\kappa(r - r_H)} \\
 & \times \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta_*^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi_*^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial v_*} + \left(-\frac{2}{r} f + \frac{\cot \theta}{r^2} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_*} + \left(-\frac{2}{r} h \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_*} - \mu^2 \Phi \right] = 0. \quad (9)
 \end{aligned}$$

从黑洞视界面满足的类光超曲面方程(6)可知, $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r_*^2}$ 项系数的分子在视界 r_H 处趋于0, 其分母在

视界 r_H 处也趋于0, 它是不定式 $\frac{0}{0}$ 型, 故可用罗必达法则求系数的极限, 假设系数的极限为 I , 则

$$\begin{aligned}
 I = \lim_{r \rightarrow r_H, v \rightarrow v_0, \theta \rightarrow \theta_0, \varphi \rightarrow \varphi_0} & \left\{ r_H'^2 + \frac{r_{H\Phi}'^2}{\sin^2 \theta} + [1 + 2\kappa(r - r_H)] \left\{ -2rr_H(\dot{r}_H - f r'_H - h r'_{H\Phi}) \right. \right. \\
 & \left. \left. + r_H^2[1 + 2\kappa(r - r_H)] \left(1 - 2\arccos \theta - \frac{2m}{r} \right) \right\} / 2\kappa r_H^2(r - r_H)[1 + 2\kappa(r - r_H)] \right\}.
 \end{aligned}$$

可通过选择调节参数 κ 使 $I = 1$, 则得到

$$\kappa = \frac{\frac{2m}{r_H^2} - \frac{r_H'^2}{2r_H^3} - \frac{r_{H\Phi}'^2}{2r_H^3 \sin^2 \theta_0} - \frac{1}{2r_H}}{2r_H \left(a \cos \theta_0 + \frac{m}{r_H^2} + \frac{r_H'^2}{2r_H^3} + \frac{r_{H\Phi}'^2}{2r_H^3 \sin^2 \theta_0} \right)}. \quad (10)$$

按照改进的 Damour-Ruffini 方法的思想, κ 就是黑洞的表面重力.

用乌龟坐标表示的 Klein-Gordon 方程在视界附近应该具有平直时空的标准波动方程形式. 对于方程(9), 当 $r \rightarrow r_H$ (表示 $r \rightarrow r_H(v_0, \theta_0, \varphi_0)$), $v \rightarrow v_0$, $\theta \rightarrow \theta_0$, $\varphi \rightarrow \varphi_0$) 时, 可以约化成

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r_*^2} + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r_* \partial v_*} + A \frac{\partial \Phi}{\partial r_*} + B \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r_* \partial \theta_*} \\
 & + C \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r_* \partial \varphi_*} = 0, \quad (11)
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 A = \frac{1}{r_H} - \frac{2m}{r_H^2} - \frac{r_H'}{r_H^2} \cot \theta_0 - \frac{r_H''}{r_H^2} + \frac{r_H'^2}{r_H^3} \\
 - \frac{r_{H\Phi}''}{r_H^2 \sin^2 \theta_0} + \frac{r_{H\Phi}'^2}{r_H^3 \sin^2 \theta_0}, \quad (12)
 \end{aligned}$$

$$B = \lim_{r \rightarrow r_H} \left(-2f - \frac{2r'_H}{rr_H} \right) = -2f_H - \frac{2r'_H}{r_H^2}$$

$$= 2 \left(a \sin \theta_0 - b \sin \varphi_0 - c \cos \varphi_0 - \frac{r'_H}{r_H^2} \right), \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
 C = \lim_{r \rightarrow r_H} \left(-2h - \frac{2r'_{H\Phi}}{rr_H \sin^2 \theta_0} \right) & = -2h_H - \frac{2r'_{H\Phi}}{r_H^2 \sin^2 \theta_0} \\
 & = 2 \left(c \sin \varphi_0 \cot \theta_0 - b \cos \varphi_0 \cot \theta_0 - \frac{r'_{H\Phi}}{r_H^2 \sin^2 \theta_0} \right). \quad (14)
 \end{aligned}$$

在视界面外附近, 方程(11)的解可写为^[6]

$$\Phi = R(r_*) e^{-i\omega v_* + ik_\theta \theta_* + ik_\varphi \varphi_*}, \quad (15)$$

将(15)式代入(11)式, 可得

$$\frac{\partial^2 R(r_*)}{\partial r_*^2} + [A - i(2\omega - Bk_\theta - Ck_\varphi)] \frac{\partial R(r_*)}{\partial r_*} = 0, \quad (16)$$

解方程(16)可得

$$R_\omega^{\text{in}} = e^{-i\omega v_*}, R_\omega^{\text{out}} = e^{-i\omega v_*} \cdot e^{-Ar_* + i(2\omega - Bk_\theta - Ck_\varphi)r_*} \quad (17)$$

进而在视界面上的入射波与出射波分别为

$$\begin{aligned}
 \Phi_\omega^{\text{in}} & = e^{-i\omega v_*} \cdot e^{ik_\theta \theta_* + ik_\varphi \varphi_*}, \\
 \Phi_\omega^{\text{out}} & = e^{-i\omega v_*} \cdot e^{-Ar_* + i(2\omega - Bk_\theta - Ck_\varphi)r_*} \cdot e^{ik_\theta \theta_* + ik_\varphi \varphi_*} \\
 & = e^{-i\omega v_*} \cdot e^{-Ar_* + i(2\omega - Bk_\theta - Ck_\varphi)r_*} \\
 & \quad \times \left(\frac{r - r_H}{r_H} \right)^{-A/2\kappa + i(2\omega - Bk_\theta - Ck_\varphi)/2\kappa} \cdot e^{ik_\theta \theta_* + ik_\varphi \varphi_*} \quad (18)
 \end{aligned}$$

Φ_ω^{out} 在 $r = r_H$ 处奇异, 只能描述视界面外的出射粒

子,不能描述视界内的出射粒子.为此通过复平面绕过视界解析延拓到视界内部,则 $r - r_H \rightarrow |r - r_H| e^{-i\pi} = (r_H - r) e^{-i\pi}$, 于是视界内的出射波为

$$\begin{aligned} \Phi_{\omega}^{\text{out}}(r < r_H) &= e^{-i\omega v_*} \cdot e^{-Ar + i(2\omega - Bk_{\theta} - Ck_{\varphi})r} \\ &\times \left[\left(\frac{r_H - r}{r_H} \right) e^{-i\pi} \right]^{-A/2\kappa + i(2\omega - Bk_{\theta} - Ck_{\varphi})/2\kappa} \\ &\times e^{ik_{\theta}\theta_* + ik_{\varphi}\varphi_*} \\ &= e^{-i\omega v_*} \cdot e^{-Ar + i(2\omega - Bk_{\theta} - Ck_{\varphi})r} \\ &\times e^{ik_{\theta}\theta_* + ik_{\varphi}\varphi_* + iA\pi/2\kappa} \cdot e^{\pi(2\omega - Bk_{\theta} - Ck_{\varphi})/2\kappa}, \end{aligned} \quad (19)$$

所以出射波在视界处的散射概率为

$$\left| \frac{\Phi_{\omega}^{\text{out}}(r > r_H)}{\Phi_{\omega}^{\text{out}}(r < r_H)} \right|^2 = e^{-\pi(2\omega - Bk_{\theta} - Ck_{\varphi})/\kappa}, \quad (20)$$

根据 Damour-Ruffini^[3] 和 sannan^[4] 的方法,可以得到出射波的黑体谱为

$$N_{\omega} = \frac{1}{e^{(\omega - Bk_{\theta}/2 - Ck_{\varphi}/2)/k_B T} - 1}, \quad (21)$$

其中 k_B 为玻尔兹曼常数, $T = \frac{\kappa}{2\pi k_B}$ 是辐射的

Hawking 温度. (10) 式的 κ 表明温度 T 随时间和视界面上的位置而变化,是局域量,而不像稳态黑洞那样为一个整体参量.这是局域热平衡的体现,是动态黑洞所具有的特征, (21) 式给出的辐射谱实际为准黑体谱. (21) 式中 $\frac{Bk_{\theta} + Ck_{\varphi}}{2}$ 代表黑洞辐射粒子的化学势,在下面的 (25) 式会看到 B, C 与黑洞的拖曳角速度有关,当然还与 θ_0, φ_0 有关,这说明粒子化学势与黑洞的拖曳角速度有关,也与辐射的方位角有关.

4. 拖曳角速度

对度规 (1) 作 $R = r - r_H(v, \theta, \varphi)$, $dR = dr - \dot{r}_H dv - r'_H d\theta - r'_{H\varphi} d\varphi$ 的坐标变换^[13], 可得

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left\{ - \left[1 - 2\text{arccos}\theta - \frac{2m}{r} - r^2(f^2 + h^2 \sin^2\theta) \right] \right. \\ &\quad + 2\dot{r}_H - \frac{(fr^2 + r'_H)^2}{r^2} - \frac{(hr^2 \sin^2\theta + r'_{H\varphi})^2}{r^2 \sin^2\theta} \left. \right\} dv^2 \\ &\quad + 2dv dR + r^2 \left(d\theta + \frac{fr^2 + r'_H}{r^2} dv \right)^2 \\ &\quad + r^2 \sin^2\theta \left(d\varphi + \frac{hr^2 \sin^2\theta + r'_{H\varphi}}{r^2 \sin^2\theta} dv \right)^2, \end{aligned} \quad (22)$$

显见,拖曳速度为

$$\Omega_{\theta} = \frac{d\theta}{dv} = - \frac{fr^2 + r'_H}{r^2} = -f - \frac{r'_H}{r^2}, \quad (23)$$

$$\Omega_{\varphi} = \frac{d\varphi}{dv} = - \frac{hr^2 \sin^2\theta + r'_{H\varphi}}{r^2 \sin^2\theta} = -h - \frac{r'_{H\varphi}}{r^2 \sin^2\theta}. \quad (24)$$

比较 (13) 式和 (23) 式, (14) 和 (24) 式, 可知

$$\frac{B}{2} = (\Omega_{\theta})_{r=r_H}, \quad \frac{C}{2} = (\Omega_{\varphi})_{r=r_H}. \quad (25)$$

可见 (11) 式中的参数 B, C 与黑洞的拖曳角速度有关.

5. 另一种乌龟坐标变换的计算结果

引入另一种新乌龟坐标变换

$$\begin{aligned} r_* &= \frac{1}{2\kappa(v_0, \theta_0, \varphi_0)} \ln \left[\frac{r - r_H(v, \theta, \varphi)}{r_H(v, \theta, \varphi)} \right], \\ v_* &= v - v_0, \theta_* = \theta - \theta_0, \varphi_* = \varphi - \varphi_0. \end{aligned} \quad (26)$$

对动态 Kinnersley 黑洞进行相应计算, 所得结果如下:

$$\kappa = \frac{2m}{r_H^2} - \frac{r'^2_H}{2r_H^3} - \frac{r'^2_{H\varphi}}{2r_H^3 \sin^2\theta_0} - \frac{1}{2r_H}, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r_*^2} + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r_* \partial v_*} + A \frac{\partial \Phi}{\partial r_*} + B \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r_* \partial \theta_*} \\ + C \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r_* \partial \varphi_*} = 0, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{r_H} - \frac{2m}{r_H^2} - \frac{r'_H}{r_H^2} \cot\theta_0 - \frac{r''_H}{r_H^2} \\ &\quad + \frac{r'^2_H}{r_H^3} - \frac{r''_{H\varphi}}{r_H^2 \sin^2\theta_0} + \frac{r'^2_{H\varphi}}{r_H^3 \sin^2\theta_0}, \end{aligned} \quad (29)$$

$$B = 2 \left(a \sin\theta_0 - b \sin\varphi_0 - c \cos\varphi_0 - \frac{r'_H}{r_H^2} \right), \quad (30)$$

$$C = 2 \left(c \sin\varphi_0 \cot\theta_0 - b \cos\varphi_0 \cot\theta_0 - \frac{r'_{H\varphi}}{r_H^2 \sin^2\theta_0} \right), \quad (31)$$

$$N_{\omega} = \frac{1}{e^{(\omega - Bk_{\theta}/2 - Ck_{\varphi}/2)/k_B T} - 1}. \quad (32)$$

以上结果分别与 (10), (11), (12), (13), (14) 和 (21) 式比较可知, 用两种新乌龟坐标变换给出的波动方程, 包括方程系数因而辐射粒子的化学势和 Hawking 辐射谱都一样, 但是黑洞表面重力 κ 不一样, 这样的结果是意料之外的.

以前文献采用以下的乌龟坐标变换^[17,18]

$$r_* = r + \frac{1}{2\kappa(v_0, \theta_0, \varphi_0)} \ln[r - r_H(v, \theta, \varphi)],$$

$$v_* = v - v_0, \theta_* = \theta - \theta_0, \varphi_* = \varphi - \varphi_0 \quad (33)$$

和

$$r_* = \frac{1}{2\kappa(v_0, \theta_0, \varphi_0)} \ln[r - r_H(v, \theta, \varphi)],$$

$$v_* = v - v_0, \theta_* = \theta - \theta_0, \varphi_* = \varphi - \varphi_0. \quad (34)$$

对同一黑洞计算的黑洞表面重力 κ 不一样,但计算结果应该与乌龟坐标变换的选取无关,这是一个以前没有解决的问题. 虽然,对静态球对称黑洞, r_H 为常数,新乌龟坐标变换(8)和(26)式分别与旧乌龟坐标变换(33)和(34)式相比只差一常数,二者相差一个整体坐标平移,没有实质性的差别. 但对非球对称或非稳态黑洞,二者有实质性的差别. (33)和(34)式的乌龟坐标变换存在量纲的错误,因此,也可以说(33)和(34)式的乌龟坐标变换是不正确的,计算所得结果不一样是意料之中的. 我们预期采用两种新的正确乌龟坐标变换得到的结果应该相同,但结果却不同,这让人费解,是需要进一步探讨的问题.

6. 讨 论

1) 本文采用两种新乌龟坐标变换研究得到了动态 Kinnersley 黑洞视界面上的温度和 Hawking 辐射谱,但计算结果表明所得黑洞表面重力 κ 不同. 我们认为这种情况的出现,可能的原因有二:

第一,新乌龟坐标变换(8)和(26)式只有一个正确. Damour 和 Ruffini^[3]的原始文献只给出了乌龟坐标变换的具体定义式,而没有给出界定其物理内涵的一般性定义,因此,乌龟坐标变换的定义原则上具有一定的任意性,(8)和(26)式两种新乌龟坐标变换并没有实质性的差别,应该都是合理的.

第二,这很可能反映了 Damour-Ruffini 方法的局限性. Hawking 辐射反映的是黑洞表面附近粒子的产生,其涉及到黑洞引力场与真空的相互作用, Hawking 辐射应该是黑洞引力场中粒子的产生和湮没过程, Hawking 正是用量子场论方法证明的黑洞辐射. 我们知道,量子力学是不能描述粒子数可变的量子系统行为的,而 Damour-Ruffini 方法用的是弯曲时空的量子力学,原则上是不能处理粒子的产生和湮没过程的. 虽然 Damour-Ruffini 方法处理问题的角度是将辐射作为穿过视界势垒的波来处理,但 Hawking 辐射毕竟是粒子的产生问题,这样处理是有疑问的.

2) 当 $a = b = c = 0$ 时, (1) 式所示的时空成为 Vaidya 时空,

$$ds^2 = - \left[1 - \frac{2m(v)}{r} \right] dv^2 + 2dvdr + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

其事件视界为 $r_H = \frac{2m}{1 - 2\dot{r}_H}$, 表面引力为 $\kappa =$

$\frac{1 - 2\dot{r}_H}{4m}$, 黑体谱为 $N_\omega = \frac{1}{e^{\omega/k_B T} - 1}$, 辐射温度为 $T =$

$\frac{\kappa}{2\pi k_B} = \frac{1 - 2\dot{r}_H}{8\pi m k_B}$. 显然,黑洞的半径 r_H 和温度 T 都随时间变化. 不过,在任何一个确定的时刻 v_0 , 黑洞表面各点的温度都相同. 也就是说, Vaidya 黑洞的温度只随时间变化,与方位角无关. 因此, Vaidya 黑洞不仅形状是球形的,温度也是球对称的, Vaidya 黑洞在演化过程中,始终保持球对称性.

容易看出,当 Vaidya 黑洞不再随时间变化时,它退化为史瓦西黑洞,其视界半径和温度等表达式也都退化到史瓦西黑洞的情况.

本文的写作过程中与赵峥教授的讨论受益匪浅,在此致以诚挚的谢意.

- [1] Hawking S W 1974 *Nature* **248** 30
- [2] Gibbons G W, Hawking S W 1977 *Phys. Rev. D* **15** 2752
- [3] Damour T, Ruffini R 1976 *Phys. Rev. D* **14** 332
- [4] Sannan S 1988 *Gen. Rel. Grav.* **20** 239
- [5] Zhao Z 1999 *Thermal Property of Black Hole and Singularity of Spacetime* (Beijing: Beijing Normal University Press) p236 (in Chinese) [赵 峥 1999 黑洞的热性质与时空奇异性(北京:北京师范大学出版社)第 236 页]

- [6] Zhao Z, Dai X X 1991 *Chin. Phys. Lett.* **8** 548
- [7] Sun M C, Zhao R, Zhao Z 1995 *IL Nuovo Cimento B* **110** 829
- [8] Zhao Z, Huang W H 1993 *J. Beijing Normal University (Natural Science)* **29** 87 (in Chinese) [赵 峥、黄维华 1993, 北京师范大学学报(自然科学版) **29** 87]
- [9] Zhao Z, Luo Z Q, Dai X X 1994 *IL Nuovo Cimento B* **109** 483
- [10] Zhao R, Zhang L C, Li H F 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2982 (in Chinese) [赵 仁、张丽春、李怀繁 2010 物理学报 **59** 2982]

- [11] Niu Z F, Liu W B 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 475 (in Chinese)
[牛振风、刘文彪 2005 物理学报 **54** 475]
- [12] Pan W Z, Yang X J, Xie Z K 2011 *Chin. Phys. B* **20** 049701
- [13] Meng Q M, Jiang J J, Li C A 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 778 (in Chinese) [孟庆苗、蒋继建、李传安 2010 物理学报 **59** 778]
- [14] Parikh M, Wilczek F 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 5042
- [15] Zhao Z, Yang J, Liu W B 2010 *J. Beijing Normal University (Natural Science)* **46** 32 (in Chinese) [赵 峥、杨 健、刘文彪 2010 北京师范大学学报(自然科学版) **46** 32]
- [16] Wu S Q, Cai X 2002 *Gen. Rel. Grav.* **34** 1207
- [17] Yang X J 2003 *Ph. D. Dissertation* (Beijing: Beijing Normal University) (in Chinese) [杨学军 2003 博士学位论文 北京: 北京师范大学]
- [18] Niu Z F, Cao J L, Liu W B 2004 *J. Beijing Normal University (Natural Science)* **40** 481 (in Chinese) [牛振风、曹江陵、刘文彪 2004 北京师范大学学报(自然科学版) **40** 481]

Hawking radiation of dynamical Kinnersley black hole under the new tortoise coordinate transformation *

Pan Wei-Zhen[†] Yang Xue-Jun Luo Jin-Cai

(Department of Physics and Electronic Information, Shaoxing University, Shaoxing 312000, China)

(Received 16 September 2010; revised manuscript received 12 January 2011)

Abstract

With two new tortoise coordinate transformations, Hawking effect from a dynamical Kinnersley black hole is investigated by using the improved Damour-Ruffini method. After the tortoise coordinate transformation, the Klein-Gordon equation can be written in the standard form at the event horizon. Then extending the outgoing wave from outside to inside of the horizon analytically, the surface gravity and the Hawking temperature can be obtained automatically. It is found that Hawking temperature of different points on the surface are different. There is a problem of dimension in the usual tortoise coordinate and the results are different from those of the same black hole by using two different tortoise coordinate transformations. The results obtained by using two new tortoise coordinate transformations are still different.

Keywords: black hole, tortoise coordinate transformation, Hawking radiation, Klein-Gordon equation

PACS: 97.60.Lf, 04.70.-s, 04.70.Dy

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10873003, 11045005), and the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant No. Y6090739).

[†] E-mail: panwz8@usx.edu.cn