# 分数阶系统有限时间稳定性理论及分数阶超混沌 Lorenz 系统有限时间同步*

赵灵冬 胡建兵† 包志华 章国安 徐 晨 张士兵

(南通大学电子信息学院, 南通 226019)

(2011 年 3 月 18 日收到;2011 年 5 月 19 日收到修改稿)

研究了分数阶系统有限时间稳定性理论及分数阶混沌系统的同步问题. 根据分数阶微分性质及分数阶系统稳定性理论,建立了分数阶系统有限时间稳定性理论并进行了证明. 根据该理论设计控制器实现了分数阶超混沌 Lorenz 系统有限时间同步并运用数值仿真进行了验证.

**关键词**: 分数阶, 超混沌 Lorenz 系统, 稳定, 有限时间同步

**PACS**: 05.45.Gg

## 1. 引 言

分数阶微积分与整数阶微积分差不多有相同的历史,然而由于一直没有找到应用背景而未得到应有的重视[1]. 近十几年来,在黏滞系统、介质极化、电极-电解液极化、有色噪声和电磁波等研究中发现,许多物理过程展现出分数阶动力学行为,分数阶微积分研究得到了重视[2—5]. 整数阶微积分是实际物理系统的理想化处理,分数阶微积分更能准确描述实际的物理模型而成为当前的研究热点. 研究表明 Chen 混沌系统、Lorenz 混沌系统、统一混沌系统、Chua 混沌系统等当微分阶次为分数时也能出现混沌现象[6—8].

混沌同步由于在保密通信领域的潜在应用吸引了广大研究者的兴趣. 分数阶混沌同步由于具有更大的密钥空间得到了广泛研究,人们相继提出了多种分数阶混沌系统的同步方法如驱动-响应法、Lyapunov 方程法、滑模控制法、Backstepping 控制法、主动控制法、间歇控制法、脉冲控制和广义同步法[9—12]等,这些同步方法通常都是使同步误差渐近稳定,即无论如何选择控制参数,同步误差都不会在有限时间内趋于零.

在实际应用中,有时希望同步在“给定时间”内完成,因而有限时间同步问题得到了研究,如刘云峰等研究了基于滑模控制的整数阶混沌系统有限时间同步[13],Aghababa 等实现了参数未知的整数阶混沌系统有限时间同步[14]. 然而分数阶系统有限时间稳定性理论及分数阶系统有限时间同步国内外尚未见报道. 本文根据分数阶系统的性质研究了分数阶系统的有限时间稳定性理论,设计控制器实现了分数阶超混沌 Lorenz 系统的有限时间同步并进行了数值仿真.

## 2. 分数阶微分概述

分数阶微分概念提出了多种定义,其中常用的有 Riemann-Liouville(R-L)定义、Caputo 定义[15—17].

**定义 1** Riemann-Liouville(R-L)定义数学表达式为[16]

$$ {}_aD_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \times \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\Big[\int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}\mathrm{d}\tau\Big] $$

$$ n-1 < \alpha < n, n \in N. \qquad (1) $$

**定义 2** Caputo 分数阶微分定义为[16]

$$ {}_a^C D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \times \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha+n-1} f^{(n)}(\tau)\,\mathrm{d}\tau $$

$$ n-1 < \alpha < n, n \in N. \qquad (2) $$

R-L 分数阶微分需要预先给定初始条件并且要

---

* 国家自然科学基金(批准号: 50875132)和南通大学自然科学基金(批准号: 10Z021)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: hjb2008@163.com

 

求这些初始条件具有相同的意义或者性质，而 Caputo 分数阶微分允许非同质的初始条件. 本文采用 Caputo 定义研究. 首先介绍与本文相关的 Caputo 分数阶微分相关性质及理论.

**性质 1**[16]

$$ {}_a^C D_t^\alpha x^u = \frac{\Gamma(u+1)}{\Gamma(u+1-\alpha)} x^{u-\alpha}\, {}_a^C D_t^\alpha x. \tag{3}$$

对于一般的分数阶微分方程

$$ {}_a^C D_t^\alpha x(t) = Ax(t). \tag{4}$$

对于该方程的解为

$$ x(t) = x(0) E_\alpha (At^\alpha), \tag{5}$$

其中 Mittag-leffter 函数

$$ E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}.$$

**引理 1**[18]　对于分数阶系统(4)，当系统阶数 $\alpha < 1$ 时，如果存在实对称正定矩阵 $P$，使得对任意状态变量 $x(x = (x_1, x_2 \cdots x_n)^{\mathrm{T}})$，方程 $J = x^{\mathrm{T}} P \frac{\mathrm{d}^\alpha x}{\mathrm{d}t^\alpha} \leqslant 0$ (令形如 $x^{\mathrm{T}} P \frac{\mathrm{d}^\alpha x}{\mathrm{d}t^\alpha}$ 的函数为 $J$ 函数) 恒成立，则分数阶系统(5)稳定.

**引理 2**　当 $a, b > 0$ 且 $0 < c < 1$ 时有

$$ (a+b)^c \leqslant a^c + b^c. \tag{6}$$

## 3. 分数阶系统有限时间稳定性理论

**定理 1**　对于一般的分数阶系统，如果满足

$$ x\, {}_a^C D_t^\alpha x = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2+\alpha)}\, {}_a^C D_t^\alpha x x^\alpha \leqslant -k(xx)^\beta$$

$$ \beta < \frac{\alpha+\alpha^2}{2}, k > 0, \tag{7}$$

则状态变量 $x$ 在有限时间 $t = \left(v(0)^{\alpha - \frac{2\beta}{1+\alpha}} \frac{\Gamma(1+\alpha - \frac{2\beta}{1+\alpha})\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha - \frac{2\beta}{1+\alpha}) k\Gamma(2+\alpha)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ 内趋于 0.

**证明**

根据分数阶微分性质 1

$$ x\, {}_a^C D_t^\alpha x = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2+\alpha)}\, {}_a^C D_t^\alpha (x x^\alpha), \tag{8}$$

令 $v = xx^\alpha$，则 $(x^T x)^\beta = (xx^\alpha)^{\frac{2\beta}{1+\alpha}} = v^{\frac{2\beta}{1+\alpha}}$，故

$$ x\, {}_a^C D_t^\alpha x = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2+\alpha)}\, {}_a^C D_t^\alpha v \leqslant -k v^{\frac{2\beta}{1+\alpha}}, \tag{9}$$

即

$$ v^{-\frac{2\beta}{1+\alpha}}\, {}_a^C D_t^\alpha v \leqslant -k \frac{\Gamma(2+\alpha)}{\Gamma(2)}, \tag{10}$$

即

$$ {}_a^C D_t^\alpha v^{\alpha - \frac{2\beta}{1+\alpha}} \leqslant -k \frac{\Gamma(2+\alpha)}{\Gamma(2)} \frac{\Gamma\left(1+2\alpha - \frac{2\beta}{1+\alpha}\right)}{\Gamma\left(1+\alpha - \frac{2\beta}{1+\alpha}\right)}. \tag{11}$$

当 ${}_a^C D_t^\alpha v^{\alpha - \frac{2\beta}{1+\alpha}} = -k \frac{\Gamma(2+\alpha)}{\Gamma(2)} \frac{\Gamma\left(1+2\alpha - \frac{2\beta}{1+\alpha}\right)}{\Gamma\left(1+\alpha - \frac{2\beta}{1+\alpha}\right)}$ 时

$$ v(t)^{\alpha - \frac{2\beta}{1+\alpha}} - v(0)^{\alpha - \frac{2\beta}{1+\alpha}} = -k \frac{\Gamma(2+\alpha)}{\Gamma(2)} \frac{\Gamma\left(1+2\alpha - \frac{2\beta}{1+\alpha}\right)}{\Gamma\left(1+\alpha - \frac{2\beta}{1+\alpha}\right)\Gamma(1+\alpha)} t^\alpha. \tag{12}$$

则当

$$ t = \left( v(0)^{\alpha - \frac{2\beta}{1+\alpha}} \frac{\Gamma\left(1+\alpha - \frac{2\beta}{1+\alpha}\right)\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma\left(1+2\alpha - \frac{2\beta}{1+\alpha}\right) k\Gamma(2+\alpha)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \tag{13}$$

时，$v(t)^{\alpha - \frac{\beta}{\frac{1+\alpha}{2}}} = 0$，即 $v(t) = xx^\alpha = 0$，故有 $x = 0$.

故状态变量在有限时间

$$ t = \left( v(0)^{\alpha - \frac{2\beta}{1+\alpha}} \frac{\Gamma\left(1+\alpha - \frac{2\beta}{1+\alpha}\right)\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma\left(1+2\alpha - \frac{2\beta}{1+\alpha}\right) k\Gamma(2+\alpha)} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

内稳定. 定理一证毕.

## 4. 有限时间同步分数阶超混沌 Lorenz 系统

分数阶超混沌 Lorenz 可以表示为

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}t^\alpha} x_1 &= a(x_2 - x_1) + x_4, \\
\frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}t^\alpha} x_2 &= cx_1 - x_1 x_3 - x_2, \\
\frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}t^\alpha} x_3 &= x_1 x_2 - b x_3, \\
\frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}t^\alpha} x_4 &= -x_2 x_3 + r x_4,
\end{aligned} \tag{14}$$

其中 $a = 10, b = 8/3, c = 28, r = -1$. 以分数阶系统(14)为驱动系统，设响应系统为

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}t^\alpha} y_1 &= a(y_2 - y_1) + y_4 - u_1, \\
\frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}t^\alpha} y_2 &= cy_1 - y_1 y_3 - y_2 - u_2, \\
\frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}t^\alpha} y_3 &= y_1 y_2 - b y_3 - u_3, \\
\frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}t^\alpha} y_4 &= -y_2 y_3 + r y_4 - u_4,
\end{aligned} \tag{15}$$

其中 $u = [u_1, u_2, u_3, u_4]'$ 为待设计的控制器. 定义响应系统(15)与驱动系统(14)的同步误差: $e_1 = y_1 - x_1$, $e_2 = y_2 - x_2$, $e_3 = y_3 - x_3$, $e_4 = y_4 - x_4$, 则

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}t^\alpha}e_1 &= a(e_2 - e_1) + e_4 - u_1,\\
\frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}t^\alpha}e_2 &= ce_1 - e_1x_3 - y_1e_3 - e_2 - u_2,\\
\frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}t^\alpha}e_3 &= y_1e_2 + x_2e_1 - be_3 - u_3,\\
\frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}t^\alpha}e_4 &= -y_2e_3 - x_3e_2 + re_4 - u_4.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

**定理 2** 如果设计的控制器满足

$$
\begin{aligned}
u_1 &= (a + c - x_3)e_2 + x_2e_3 - ke_1^\gamma,\\
u_2 &= -x_3e_4 - ke_2^\gamma,\\
u_3 &= -y_2e_4 - ke_3^\gamma,\\
u_4 &= e_1 + re_4 - ke_4^\gamma,
\end{aligned}
\tag{17}
$$

则分数阶误差系统(16)在有限时间

$$
t = (xx^\alpha)\frac{\Gamma\left(1+\alpha-\frac{1+\gamma}{1+\alpha}\right)\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma\left(1+2\alpha-\frac{1+\gamma}{1+\alpha}\right)k\Gamma(2+\alpha)})^{\frac{1}{\alpha}}
$$

内稳定于平衡点,即响应系统(15)与驱动系统(14)在有限时间内实现了同步.

**证明** 根据设计的控制器可得同步误差

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}t^\alpha}e_1 &= -ae_1 - (c - x_3)e_2 - x_2e_3 + e_4 - ke_1^\gamma,\\
\frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}t^\alpha}e_2 &= (c - x_3)e_1 - e_2 - y_1e_3 + x_3e_4 - ke_2^\gamma,\\
\frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}t^\alpha}e_3 &= x_2e_1 + y_1e_2 - be_3 + y_2e_4 - ke_3^\gamma,\\
\frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}t^\alpha}e_4 &= -e_1 - x_3e_2 - y_2e_3 - ke_4^\gamma.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

根据(7)式构造函数

$$
\begin{aligned}
&\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2+\alpha)}\frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}t^\alpha}[e_1\quad e_2\quad e_3\quad e_4]\\
&\times[e_1^\alpha\quad e_2^\alpha\quad e_3^\alpha\quad e_4^\alpha]^{\mathrm{T}}\\
&=[e_1\quad e_2\quad e_3\quad e_4]\\
&\times\left[\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}e_1\quad \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}e_2\quad \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}e_3\quad \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}e_4\right]^{\mathrm{T}}\\
&= -ae_1^2 - (c - x_3)e_1e_2 - x_2e_1e_3 + e_1e_4\\
&\quad - ke_1e_1^\gamma + (c - x_3)e_1e_2 - e_2^2 - y_1e_2e_3\\
&\quad + x_3e_2e_4 - ke_2e_2^\gamma + x_2e_1e_3 + y_1e_2e_3\\
&\quad - be_3^2 + y_2e_3e_4 - ke_3e_3^\gamma - e_4e_1\\
&\quad - x_3e_2e_4 - y_2e_3e_4 - ke_4e_4^\gamma\\
&= -ae_1^2 - ke_1e_1^\gamma - e_2^2 - ke_2e_2^\gamma\\
&\quad - be_3^2 - ke_3e_3^\gamma - ke_4e_4^\gamma\\
&\leqslant -ke_1e_1^\gamma - ke_2e_2^\gamma - ke_3e_3^\gamma - ke_4e_4^\gamma\\
&= -k(e_1^2)^{\frac{1+\gamma}{2}} - k(e_2^2)^{\frac{1+\gamma}{2}} - k(e_3^2)^{\frac{1+\gamma}{2}} - k(e_4^2)^{\frac{1+\gamma}{2}}.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

根据引理 2 有

$$
\begin{aligned}
&-(e_1^2)^{\frac{1+\gamma}{2}} - (e_2^2)^{\frac{1+\gamma}{2}} - (e_3^2)^{\frac{1+\gamma}{2}} - (e_4^2)^{\frac{1+\gamma}{2}}\\
&\leqslant -(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2)^{\frac{1+\gamma}{2}},
\end{aligned}
\tag{20}
$$

故

$$
\begin{aligned}
&\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2+\alpha)}\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}[e_1\quad e_2\quad e_3\quad e_4]\\
&\times[e_1^\alpha\quad e_2^\alpha\quad e_3^\alpha\quad e_4^\alpha]^{\mathrm{T}}\\
&\leqslant -k(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2)^{\frac{1+\gamma}{2}}\\
&= -k([e_1\quad e_2\quad e_3\quad e_4]\\
&\times[e_1\quad e_2\quad e_3\quad e_4]^T)^{\frac{1+\gamma}{2}},
\end{aligned}
\tag{21}
$$

根据定理 1,误差系统在

$$
t = (xx^\alpha)^{\alpha-\frac{1+\gamma}{2}}\frac{\Gamma\left(1+\alpha-\frac{1+\gamma}{1+\alpha}\right)\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma\left(1+2\alpha-\frac{1+\gamma}{1+\alpha}\right)k\Gamma(2+\alpha)})^{\frac{1}{\alpha}}
$$

内趋于稳定,定理二证毕.

## 5. 仿真研究

为了验证理论的正确性和所设计的控制器的有效性,采用预估-校正解法进行数值仿真[10],选取分数阶阶次 $\alpha = 0.97$ ,时间步长 $ts = 0.005$,仿真时间 $T = 1.8\mathrm{s}$,系统参数 $a = 10$, $b = 8/3$, $c = 28$, $r = -1$, 任意选取状态初始值分别为 $x(0) = [0.23\quad 0.51\quad 0.43\quad 0.32]^{\mathrm{T}}$, $y(0) = [2.23\quad 3.41\quad 2.2\quad 1.50]^{\mathrm{T}}$, $\gamma = 0.5$. 当 $k = 0$ 时,根据(22)式 $[e_1\quad e_2\quad e_3\quad e_4]\left[\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}e_1\quad \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}e_2\quad \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}e_3\quad \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}e_4\right]^{\mathrm{T}} \leqslant 0$, 根据引理 1 知:误差系统稳定,即响应系统(15)与驱动系统(14)实现完全同步,其仿真结果如图 1 所示. 当 $k > 0$ 时,响应系统(15)与驱动系统(14)实现有限时间同步,取 $k = 2$, 响应系统(15)与驱动系统(14)同步误差如图 2 所示,对比图 1 和图 2 可知,利用设计的控制器对响应分数阶超混沌系统进行控制,响应系统能在有限时间内与驱动系统实现同步,同步速度快,而完全同步则同步误差在无限时间长内稳定,同步速度慢.

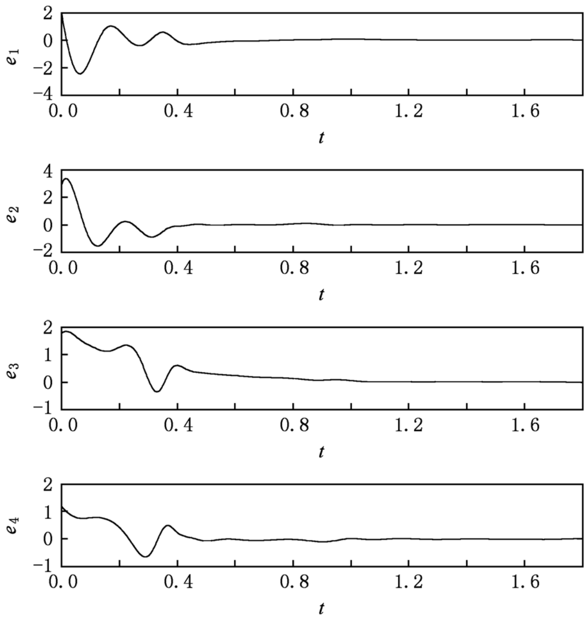


图 1　$k = 0$ 时,同步误差 $e_1, e_2, e_3, e_4$ 随时间演化图

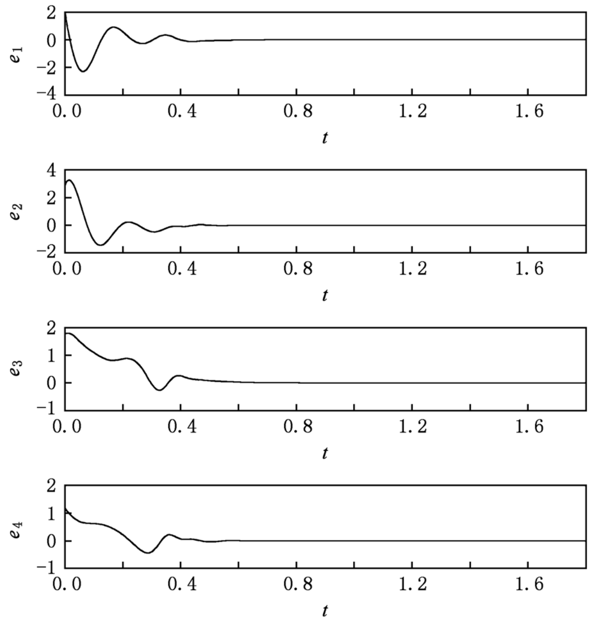


图 2　$k = 2$ 时,有限时间同步误差 $e_1, e_2, e_3, e_4$ 随时间演化图

## 6. 结　论

本文基于分数阶微分性质,提出了分数阶系统有限时间稳定性理论. 基于该理论并结合分数阶系统稳定性理论实现了分数阶超混沌 Lorenz 系统有限时间同步并将同步结果与完全同步进行对比可以看出:有限时间同步同步速度快,能在有限时间内稳定,鲁棒性强等特点.


[1] Chen J R, Tao R J 2001 *Journal of Shanghai University* **5** 292

[2] Chen W, Zhang X D, Korosak D. 2010 *Int. J. Nonlin. Sci. Num.* **11** 3

[3] Li Z B 2010 *Int. J. Nonlin. Sci. Num.* **11** 335

[4] Li Z B, He J H 2010 *Mathematical & Computational Applications* **15** 970

[5] Cui B T, Ji Y, Qiu F 2009 *Chin. Phys.* B **18** 5203

[6] Wu X J, Lu H T, Shen S L 2009 *Phys. Lett.* A **373** 2329

[7] Mohammad Saleh Tavazoei, Mohammad Haeri 2008 *Physica* A **387** 57

[8] Liu C X 2004 *Chaos Solitons and Fractals* **22** 1031

[9] Jia H Y, Chen Z Q, Yuan Z Z 2010 *Chin. Phys.* B **19** 507

[10] Hu J B, Han Y, Zhao L D 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7522 (in Chinese) [胡建兵、韩　焱、赵灵冬 2008 物理学报 **57** 7522]

[11] Zhang R X, Yang S P 2009 *Journal of Hebei Normal University* **33** 37 (in Chinese) [张若洵、杨世平 2009 河北师范大学学报 **33** 37]

[12] Vedat Suat Erturk, Shaher Momani, Zaid Odibat 2008 *J. Cnsns* 1642

[13] Liu Y F, Yang X G, Miu D, Yuan R P 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6250 (in Chinese) [刘云峰、杨小冈、缪　栋、袁润平 2007 物理学报 **56** 6250]

[14] Aghababa MP, Khanmohammadi S, Alizadeh G 2011 *Applied Mathematical Modeling* **35** 3080

[15] Liu D, Yan X M 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3747 (in Chinese) [刘丁、闫晓妹 2009 物理学报 **58** 3747]

[16] Podlubny I 1999 *Fractional differential equations* (San Diego: Academic Press) p18

[17] He J H 2011 *Thermal Science* **15** 145

[18] Matignon D. 1996 *IMACS*, *IEEE-SMC*, *Lille* (France)

# A finite-time stable theorem about fractional systems and finite-time synchronizing fractional super chaotic Lorenz systems*

Zhao Ling-Dong Hu Jian-Bing† Bao Zhi-Hua Zhang Guo-An Xu Chen Zhang Shi-Bing

(*School of Electronics & Information*, *Nantong University*, *Nantong* 226019, *China*)

(Received 18 March 2011; revised manuscript received 19 May 2011)

Abstract

Finite-time stable theorem about fractional system and finite-time synchronizing fractional chaotic system are studied in this paper. A finite-time stable theorem is proposed and proved according to the properties of fractional equation. Using this theorem, fractional super chaotic Lorenz systems is synchronized in finite-time. Numerical simulation certifies the effectiveness of the theorem proposed in this paper.

**Keywords**: fractional, super chaotic Lorenz system, stable, finite-time synchronizing

**PACS**: 05. 45. Gg

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 50875132) and the Nantong University Natural Science Foundation of China (Grant No. 10Z021).

† Corresponding author. E-mail: hjb2008@163.com