

# 脉冲激励下环形耦合 Duffing 振子间的瞬态同步突变现象\*

吴勇峰<sup>†</sup> 张世平 孙金玮 Peter Rolfe 李 智

(哈尔滨工业大学电气工程及自动化学院, 哈尔滨 150001)

(2010 年 12 月 28 日收到; 2011 年 1 月 11 日收到修改稿)

研究非周期信号激励下 Duffing 振子动力学行为变化特征时, 发现处于倍周期分岔的环形耦合 Duffing 振子系统, 在一定的参数条件下, 脉冲信号能引起其中一个振子与其他振子运动轨迹间出现短暂失同步的现象即瞬态同步突变现象. 利用这种现象可以快速检测出强噪声背景中的微弱脉冲信号, 从而扩展了现有的 Duffing 振子对非周期信号的检测范围及应用领域.

**关键词:** 瞬态同步突变, 微弱信号检测, 脉冲信号, Duffing 振子

**PACS:** 05.45.Xt

## 1. 引言

强噪声背景下微弱信号的检测一直是国内外学者研究的热点<sup>[1-5]</sup>. 1992 年 Bix<sup>[6]</sup> 首次尝试将混沌振子用于微弱周期信号检测. 该方法对小信号极度敏感和对噪声免疫能力强, 能达到比传统方法更低的信噪比工作门限. 王冠宇等人于 1997 年提出利用微弱周期信号的扰动引发混沌振子在混沌态和大尺度周期态的相互转换即相变, 通过相变的判别来检测信号<sup>[7,8]</sup>. 之后, Li 等人研究了混沌振子对不同类型的微弱周期信号的检测性能以及对不同类型的噪声的抑制能力<sup>[9,10]</sup>, 并于 2003 年和 2006 年提出用修正 Duffing-Holmes 方程<sup>[11]</sup> 和双耦合 Duffing 振子<sup>[12]</sup> 来检测微弱周期信号, 这些研究对混沌振子检测方法的迅速发展起到了重要的作用.

上述研究中检测的对象都是周期信号或准周期信号. 而目前关于混沌振子对非周期信号的检测鲜有报道. 在 2009 年 Yuan 等人<sup>[13]</sup> 通过研究 Duffing 振子对混沌序列的非线性响应, 发现了序列混沌程度越高, Duffing 振子的相图越混沌, 并利用这种规律来检测 EEG 信号, 从而首次将 Duffing 振子的检测范围扩展到非周期信号.

本文研究非周期信号激励下 Duffing 振子动力学行为变化特征时, 发现处于倍周期分岔的环形耦合 Duffing 振子系统, 在一定参数条件下(包括周期策动力的周期和幅值、系统的初始值), 当其中一个振子受到脉冲信号激励时, 该振子与其他振子的运动轨迹间将由同步状态突变到不同步状态, 随着脉冲信号的消失, 它们之间的运动轨迹又回到同步状态. 这种由脉冲信号引起的振子运动轨迹间短暂失同步的现象, 在这里定义为瞬态同步突变现象.

利用这种瞬态同步突变现象, 只需根据振子间是否同步就可以实现对强噪声背景中不同类型的微弱脉冲信号进行检测. 因此, 该现象在激光通信、超宽带通信、地震信号检测等领域都有着潜在的应用.

## 2. 环形耦合 Duffing 振子系统的瞬态同步突变

自从 Pecora 等<sup>[14]</sup> 发现混沌同步以来, 非线性同步的研究取得了很多成果<sup>[15-20]</sup>. 近年来关于在外部激励下耦合振子间的同步现象成为新的研究焦点<sup>[21-26]</sup>. 如 Salas 等人<sup>[21]</sup> 研究两个系统受相同信号激励时耦合振子间出现的不同形式的同步;

\* 国家高技术研究发展计划(批准号:2007AA06Z228)和哈尔滨科技创新人才研究专项资金(批准号:2009RFLXS006)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: vicwu306@163.com

Anishchenko 等人<sup>[22]</sup>研究在外部谐波信号激励下振子间的准周期同步行为;本文作者在前期工作中<sup>[26]</sup>研究了环形耦合 Duffing 振子受同一周期策动力激励时出现的同步突变现象. 这些研究的共同特点是外部激励信号都是周期信号.

Ott 等人<sup>[27]</sup>在研究耦合 Kuramoto 系统时,发现在脉冲信号激励后系统会产生回声脉冲的现象. 本文受此启发,采用脉冲信号激励环形耦合 Duffing 振子系统中的一个振子,研究该振子与其他振子运动轨迹间的同步变化规律.

### 2.1. 环形耦合 Duffing 振子系统

本文构造如下环形耦合 Duffing 振子系统:

$$\ddot{x}_i + \xi \dot{x}_i - x_i + x_i^3 - k(x_{i-1} - x_i) = f \cos(\omega t) \quad (i = 1, 2, 3, \dots, N; N \geq 2), \quad (1)$$

式中  $N$  表示振子个数,  $\xi$  为阻尼比,  $f \cos(\omega t)$  为周期策动力,  $k(x_{i-1} - x_i)$  为相邻振子间的线性耦合项,  $k(x_N - x_1)$  为首、尾两振子的耦合项, 其中  $k$  为耦合系数表示耦合强度, 在该系统中所有振子间的耦合强度保持一致.

以 2 个振子构成的耦合系统为例, 令  $N = 2, \xi = 0.35, k = 0.1, \omega = 1, (x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2)$  的初始值都小于零, 加入脉冲信号后的耦合系统方程为

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + 0.35 \dot{x}_1 - x_1 + x_1^3 - 0.1(x_2 - x_1) &= f \cos(t) + s(t), \\ \ddot{x}_2 + 0.35 \dot{x}_2 - x_2 + x_2^3 - 0.1(x_1 - x_2) &= f \cos(t), \end{aligned} \quad (2)$$

脉冲信号  $s(t)$  加入到其中任意一个振子中, 本文以加入到第 1 个振子中为例.

### 2.2. 倍周期分岔状态下的瞬态同步突变

本节研究耦合系统处于倍周期分岔、混沌态、大尺度周期态时, 在脉冲信号激励下振子运动轨迹间的同步变化规律. 令脉冲信号  $s(t)$  为正方波脉冲信号, 如图 1 所示, 同时调节各振子的周期策动力的幅值  $f$ , 使耦合系统分别进入倍周期分岔、混沌态、大尺度周期态.

当耦合系统处于倍周期分岔态时, 第 1 个振子在脉冲信号的激励下相平面轨迹偏离了原轨道进入另一个焦点做了短暂的准周期运动, 脉冲信号消失后, 相平面轨迹又回到倍周期分岔轨道上, 如图 2 (a) 所示. 而第 2 个振子始终处于倍周期分岔状态, 如图 2 (b) 所示.

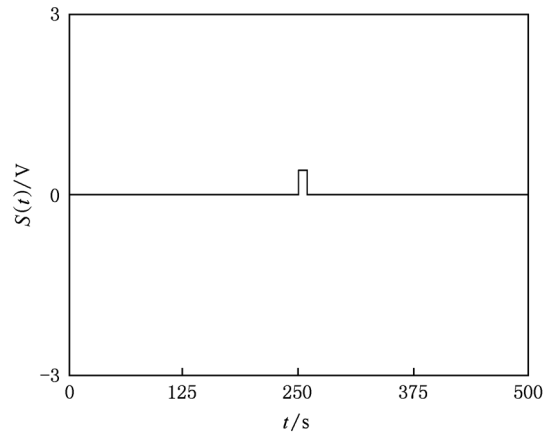


图 1 正方波脉冲信号

第 1, 2 个振子间的同步误差如图 3 所示, 在脉冲信号的激励下, 第 1 个振子运动轨迹出现了很大的偏移, 以致振子间出现了短暂失同步的现象本文称之为瞬态同步突变.

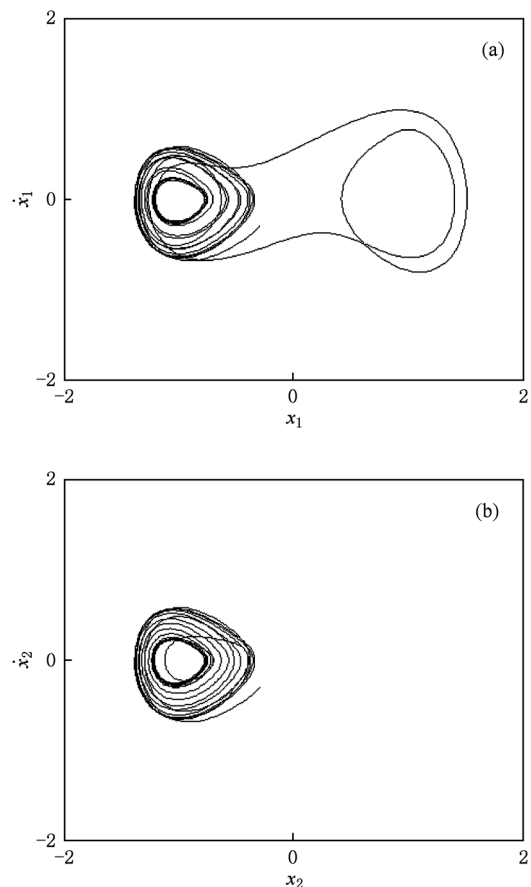


图 2 倍周期分岔的相图 (a) 第 1 个振子的相图; (b) 第 2 个振子的相图

当耦合系统处于混沌态时, 环形耦合 Duffing 振

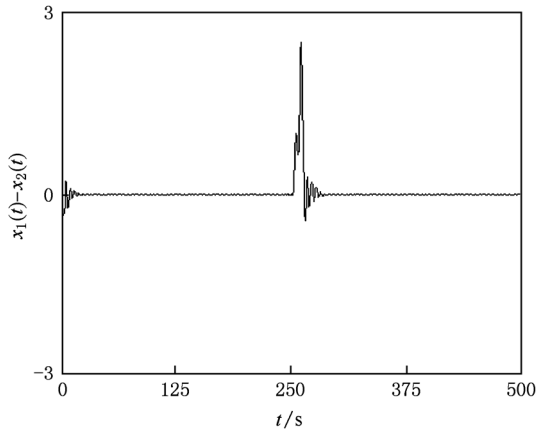


图3 倍周期分岔时第1,2振子间同步误差

子间始终处于不同步状态,它们之间的同步误差始终不为零,一直处于不同步状态,如图4所示.因此当耦合系统处于混沌态时,振子运动轨迹间不能产生瞬态同步突变现象.

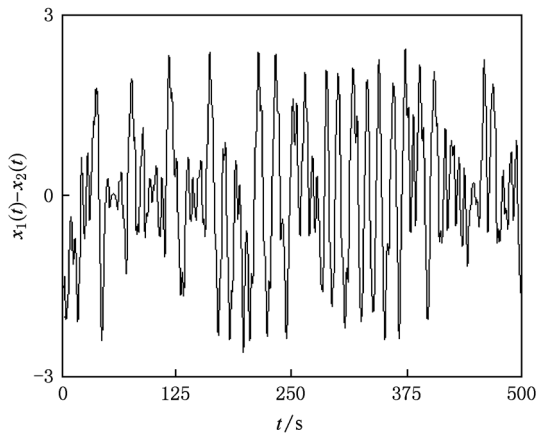


图4 混沌态时第1,2振子间同步误差

当耦合系统处于大尺度周期态时,第1个振子在脉冲信号激励下相平面轨迹虽然偏离了大尺度周期轨道,但只有较小的偏移量,如图5(a)所示.第2个振子始终处于大尺度周期态,如图5(b)所示.

第1,2振子的同步误差如图6所示,可以看出,脉冲信号只引起振子间同步误差出现了微小的波动.因此当耦合系统处于大尺度周期态时,振子运动轨迹间不能产生瞬态同步突变现象.

上述研究表明,只有当耦合系统处于倍周期分岔态时,脉冲信号才能引起其中一个振子与其他振子运动轨迹间出现短暂失同步的现象即瞬态同步突变现象.

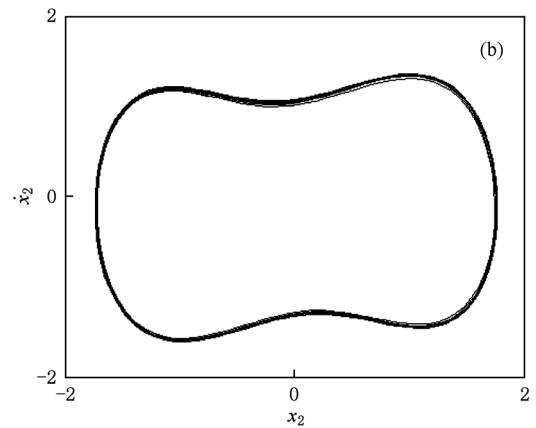
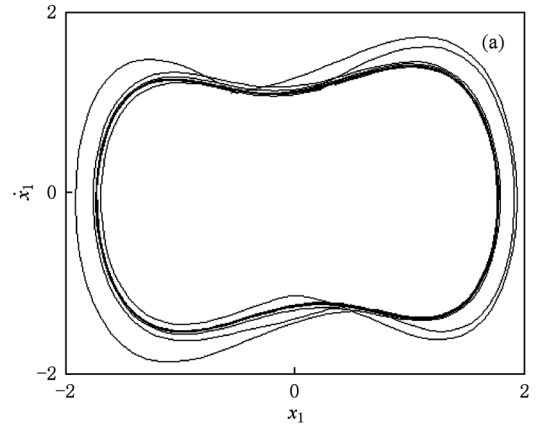


图5 大尺度周期态的相图 (a)第1个振子的相图;(b)第2个振子的相图

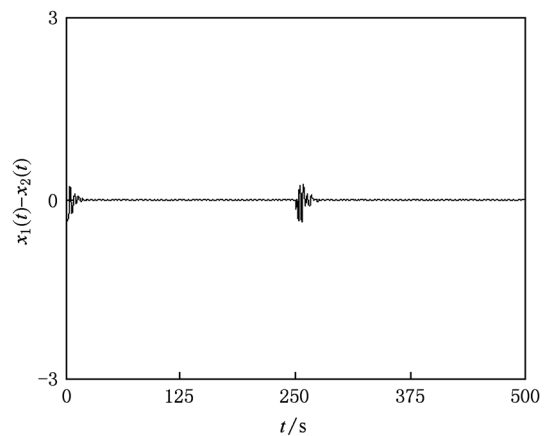


图6 大尺度周期态时第1,2振子间同步误差

### 2.3. 周期策动力的影响

在研究中发现,周期策动力的周期和幅值的大小会影响振子间瞬态同步突变现象的效果.

当耦合系统处于倍周期分岔态时,令  $s(t)$  包含

4 个脉冲信号,其脉冲宽度分别为周期策动力的周期的 0.4 倍,1 倍,1.5 倍,2.2 倍,如图 7 所示. 在  $s(t)$  的激励下,第 1,2 个振子间的同步误差如图 8 所示. 可以看出,当脉宽太小时,瞬态同步突变的幅度会减小;当脉宽不断增大时,失同步持续时间也相应增长;当脉宽过大时,将会破坏振子间的同步状态,使它们一直处于不同步状态.

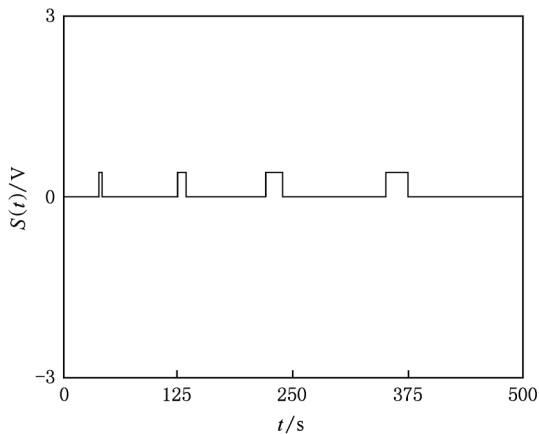


图 7 四个脉宽不同的脉冲信号

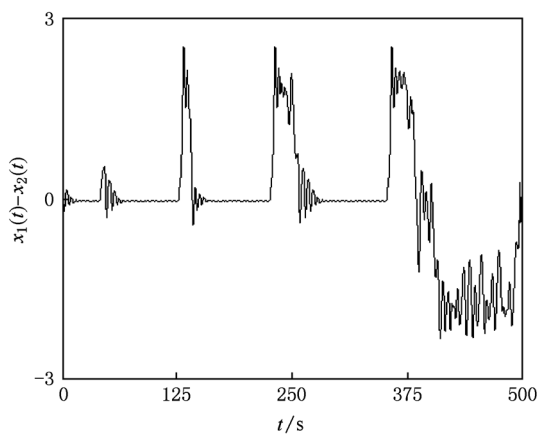


图 8 在四个脉冲信号激励下第 1,2 振子间的同步误差

周期策动力的幅值的大小也影响瞬态同步突变的效果. 例如,当周期策动力幅值为 0.18 时,在图 1 中的脉冲信号激励下,振子运动轨迹间的瞬态同步突变幅值大大减小,如图 9 所示.

研究发现,当周期策动力的周期为脉冲信号宽度的 0.5—1 倍之间、幅值在 0.2—0.26 之间时,脉冲信号能激励耦合系统产生理想的瞬态同步突变现象.

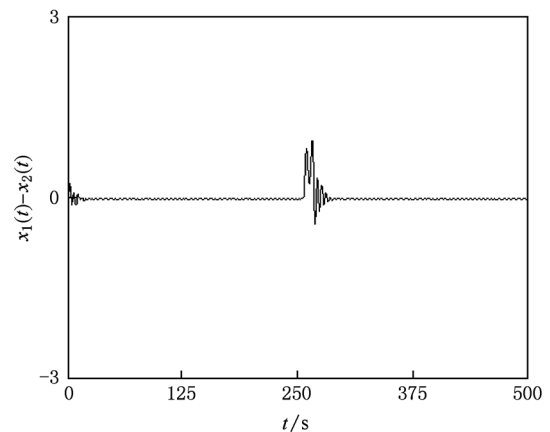


图 9 周期策动力的幅值为 0.18 时第 1,2 振子间的同步误差

### 2.4. 初始值的影响

在研究中发现,耦合系统的初始值决定了哪种性质的脉冲信号(正脉冲、负脉冲)能激励耦合系统产生瞬态同步突变.

当耦合系统处于倍周期分岔态时,令  $s(t)$  包含正负两个脉冲信号,如图 10 所示. 在  $s(t)$  的激励下,当  $(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2)$  的初始值都大于零时,第 1,2 个振子间的同步误差如图 11 所示,只有负脉冲信号能激励耦合系统产生理想的瞬态同步突变;当  $(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2)$  的初始值都小于零时,只有正脉冲信号能激励耦合系统产生理想的瞬态同步突变,如图 12 所示;当  $(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2)$  的初始值为其他正负组合时,不同数值决定性质不同的脉冲信号能激励耦合系统产生瞬态同步突变,但它们之间没有明确的规律.

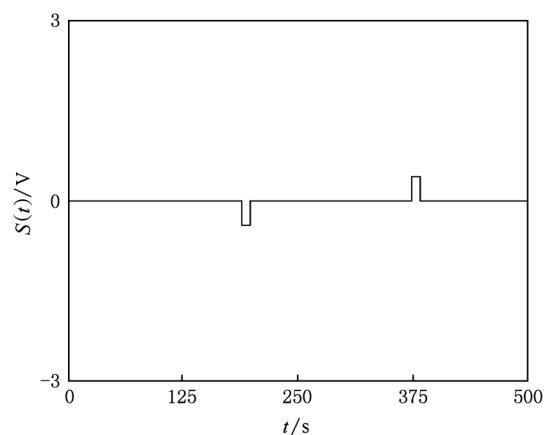


图 10 正负两个脉冲信号

因此,当耦合系统的初始值都大于零时,负脉

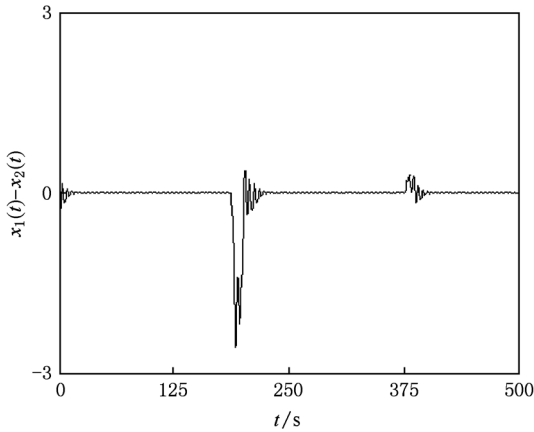


图 11 当初始值都大于零时,第 1,2 振子间的同步误差

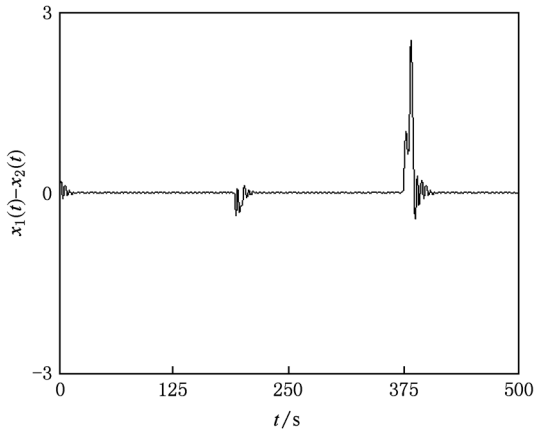


图 12 当初始值都小于零时,第 1,2 振子间的同步误差

冲信号能够激励耦合系统产生瞬态同步突变;当耦合系统的初始值都小于零时,正脉冲信号能够激励耦合系统产生瞬态同步突变。

### 3. 利用瞬态同步突变检测脉冲信号

上述研究表明,脉冲信号能引起振子运动轨迹间出现短暂失同步的现象即瞬态同步突变,因此可以通过判断振子间的同步误差来检测脉冲信号的有无。

构造如下环形耦合 Duffing 振子检测系统:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \xi \dot{x}_1 - x_1 + x_1^3 - k(x_2 - x_1) &= f \cos(\omega t) + s(t) + n(t), \\ \ddot{x}_2 + \xi \dot{x}_2 - x_2 + x_2^3 - k(x_1 - x_2) &= f \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (3)$$

令  $\xi = 0.35, k = 0.1, \omega = 1, f = 0.22$ , 此时耦合

系统处于倍周期分岔状态.  $s(t)$  为待检测的脉冲信号,其脉冲宽度为周期策动力周期的 1.5 倍,加入到第 1 个振子中,同时为检验噪声对这种瞬态同步突变的影响,加入高斯白噪声  $n(t)$ 。

下面分别为正脉冲信号和负脉冲信号的检测过程。

#### 3.1. 正脉冲信号检测

为检测正脉冲信号,令  $(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2)$  的初始值都小于零。

1) 待检测信号  $s(t)$  包含一个幅值为 0.3 V 的正三角波脉冲和正方波脉冲,如图 13(a) 所示. 在  $s(t)$  的激励下,第 1,2 振子间的同步误差如图 13(b) 所示。

可以看出,当  $t = 125$  s 时,正三角波脉冲信号引起振子运动轨迹间产生一个瞬态同步突变;当  $t = 375$  s 时,正方波脉冲信号引起振子运动轨迹间产生一个瞬态同步突变。

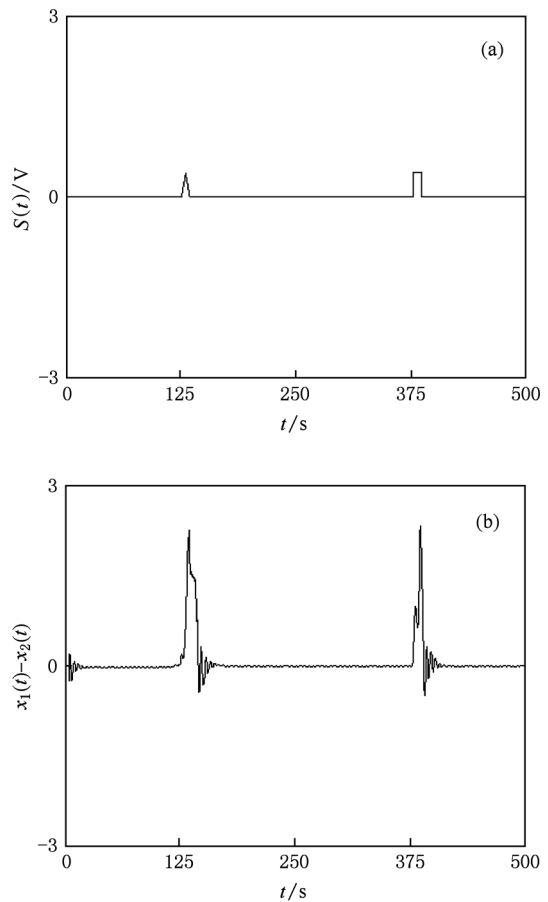


图 13 无噪声时正脉冲信号检测 (a) 正脉冲信号;(b) 第 1,2 振子间的同步误差

2)加入噪声,使  $s(t)$  的信噪比达到  $-20$  dB, 脉冲信号被噪声完全淹没,如图 14(a)所示. 在  $s(t)$  的激励下,第 1,2 振子间的同步误差如图 14(b)所示.

可以看出,在  $t = 125$  s,  $t = 375$  s 时,脉冲信号同样能激励耦合系统产生瞬态同步突变,而噪声仅使振子间同步误差出现了微小的波动,并不影响瞬态同步突变. 因此,通过判断振子间的同步误差就能检测出强噪声背景中正脉冲信号的有无.

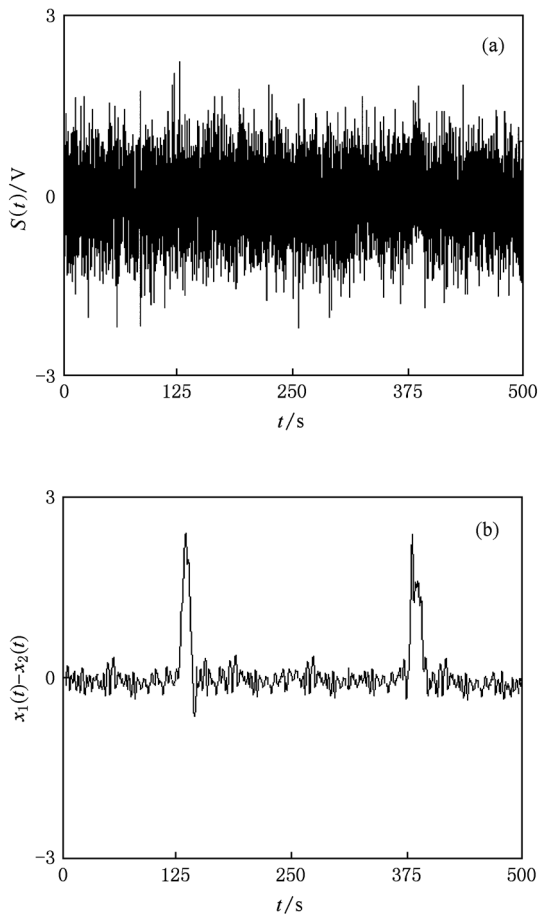


图 14 信噪比  $-20$  dB 时正脉冲信号检测 (a)带噪声的正脉冲信号;(b)第 1,2 振子间的同步误差

### 3.2. 负脉冲信号检测

为检测负脉冲信号,令  $(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2)$  的初始值都大于零.

1)待检测信号  $s(t)$  包含一个幅值为  $0.3$  V 的负三角波脉冲和负方波脉冲,如图 15(a)所示. 在  $s(t)$  的激励下,第 1,2 振子间的同步误差如图 15(b)所示.

可以看出,当  $t = 125$  s,  $t = 375$  s 时,负三角波脉冲和负方波脉冲都能激励耦合系统产生瞬态同步突变现象.

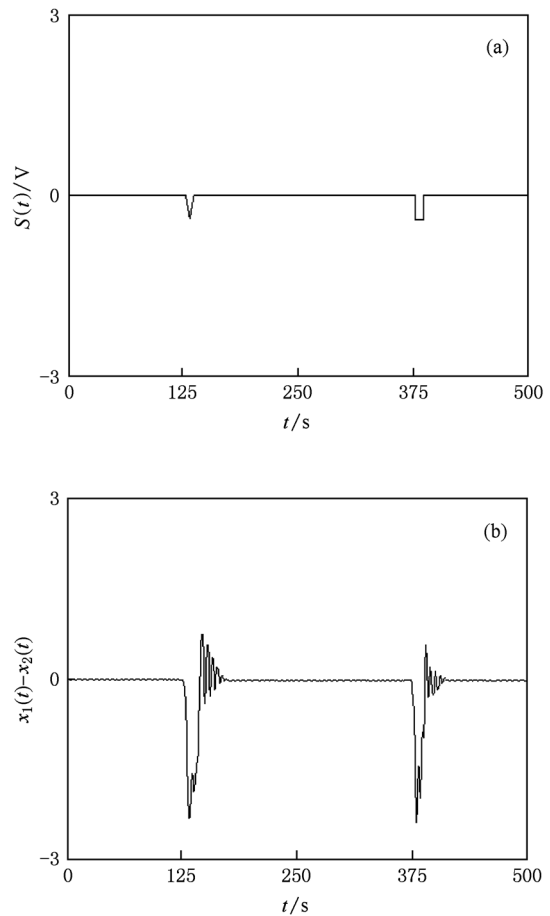


图 15 无噪声时负脉冲信号检测 (a)负脉冲信号;(b)第 1,2 振子间的同步误差

2)同理,加入噪声使  $s(t)$  的信噪比达到  $-20$  dB,如图 16(a)所示. 在  $s(t)$  的激励下,第 1,2 振子间的同步误差如图 16(b)所示.

可以看出,噪声没改变振子间的瞬态同步突变现象,仅使振子间同步误差出现了微小波动,因此,通过计算振子间的同步误差同样能检测出强噪声背景中负脉冲信号的有无.

上述研究表明,环形耦合 Duffing 振子间的瞬态同步突变现象对脉冲信号非常敏感且对噪声有较强的免疫性. 利用这种瞬态同步突变现象可以准确地检测强背景噪声中不同类型的微弱脉冲信号,因此可以将混沌振子检测技术推广到激光通信、超宽带通信、地震信号识别领域中的脉冲信号检测.

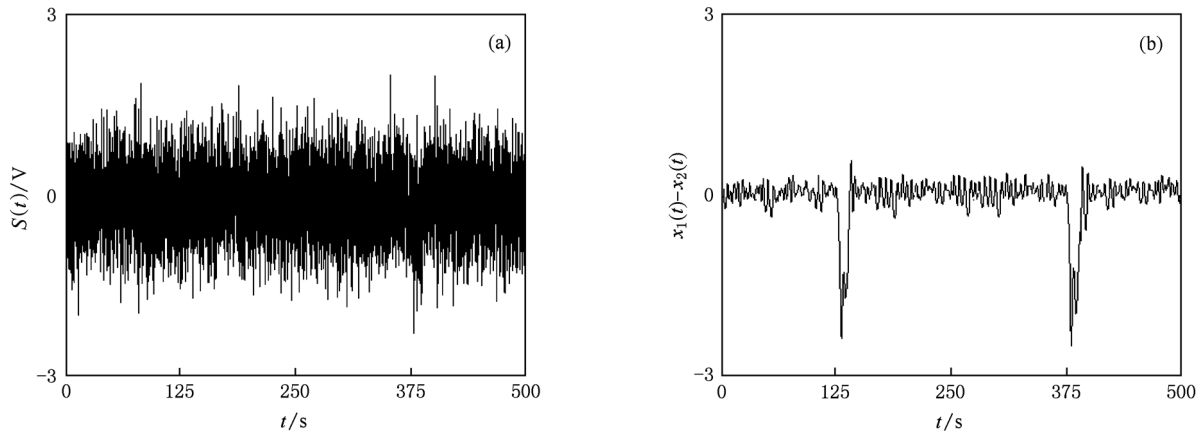


图 16 信噪比  $-20$  dB 时负脉冲信号检测 (a)带噪声的负脉冲信号;(b)第 1,2 振子间的同步误差

## 4. 结 论

1. 发现了处于倍周期分岔的环形耦合 Duffing 振子系统,在一定的参数条件下,脉冲信号能引起其中一个振子与其他振子运动轨迹间出现短暂失

同步的现象,即瞬态同步突变现象.

2. 利用瞬态同步突变现象对脉冲信号的敏感性和对噪声的免疫性,只需计算振子间同步误差,就能快速检测出强噪声背景中不同类型的微弱脉冲信号.

- [1] Li Y, Yang B J, Du L Z, Yuan Y 2003 *Chin. Phys.* **12** 0714
- [2] Wang Y C, Zhao Q C, Wang A B 2008 *Chin. Phys B* **17** 2373
- [3] Xiang X Q, Shi B C 2010 *Chaos* **20** 013104
- [4] Wang Y S, Jiang W Z, Zhao J J, Fan H D 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2053 (in Chinese) [王永生、姜文志、赵建军、范洪达 2008 物理学报 **57** 2053]
- [5] Zhai D Q, Liu C X, Liu Y, Xu Z 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 816 (in Chinese) [翟笃庆、刘崇新、刘尧、许喆 2010 物理学报 **59** 0816]
- [6] Bix D L, Pipenberg S J 1992 *IEEE Int. Joint Conf. Neural Networks* **22** 881
- [7] Wang G Y, Tao G L, Chen X, Lin J Y 1997 *Chinese Journal of Scientific Instrument* **18** 209 (in Chinese) [王冠宇、陶国良、陈行、林建亚 1997 仪器仪表学报 **18** 209]
- [8] Wang G Y, He S L 2003 *IEEE Trans. Circuits-I* **50** 945
- [9] Li Y, Yang B J, Yuan Y, Liu X H 2007 *Chin. Phys.* **16** 1072
- [10] Li Y, Yang B J, Yuan Y, Zhao X P, Lin H B 2006 *Chin. Sci. Bull.* **51** 3010
- [11] Li Y, Yang B J 2003 *Chin. Sci. Bull.* **48** 19
- [12] Li Y, Lu P, Yang B J, Zhao X P 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1672 (in Chinese) [李月、路鹏、杨宝俊、赵雪平 2006 物理学报 **55** 1672]
- [13] Yuan Y, Li Y, Mandic D P, Yang B J 2009 *Chin. Phys B* **18** 958
- [14] Pecora L M, Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [15] Goldobin D S, Pikovsky A 2005 *Phys. Rev. E* **71** 045201
- [16] Fu G Y, Li Z S 2010 *Chin. Phys B* **19** 060505
- [17] Wang H X, Lu Q S, Shi X 2010 *Chin. Phys B* **19** 060509
- [18] Suykens J A K, Osipov G V 2008 *Chaos* **18** 037101
- [19] Sun Y Z, Ruan J 2010 *Chin. Phys B* **19** 070513
- [20] Kong C C, Chen S H 2009 *Chin. Phys B* **18** 91
- [21] Salas J S G, Canton E C, Salazar F C O, Canton I C 2008 *Chaos* **18** 023136
- [22] Anishchenko V, Nikolaev S, Kurths J 2008 *Chaos* **18** 037123
- [23] Agrawal M, Prasad A, Ramaswamy R 2010 *Phys. Rev. E* **81** 026202
- [24] Cizak M, Montina A, Arecchi F T 2009 *Chaos* **19** 015104
- [25] Baibolatov Y, Rosenblum M, Zhanabaev Z Zh, Kyzgarina M, Pikovsky A 2009 *Phys. Rev. E* **80** 046211
- [26] Wu Y F, Zhang S P, Sun J W, Rolfe P 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 020511 (in Chinese) [吴勇峰、张世平、孙金玮、Peter Rolfe 2011 物理学报 **60** 020511]
- [27] Ott E, Platig J H, Antonsen T M, Girvan M 2008 *Chaos* **18** 037115

# Transient synchronization mutation of ring coupled Duffing oscillators driven by pulse signal\*

Wu Yong-Feng<sup>†</sup> Zhang Shi-Ping Sun Jin-Wei Peter Rolfe Li Zhi

(School of Electrical Engineering and Automation, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

(Received 28 December 2010 ; revised manuscript received 11 January 2011)

## Abstract

The dynamic behavior of ring coupled Duffing oscillators driven by non-periodic signal is investigated, a phenomenon is discovered, which shows that when ring coupled Duffing oscillators are in the period-doubling bifurcation phase state and one of the oscillators is driven by pulse signal under certain parameter conditions, this oscillator and the other oscillators suddenly change from synchronization to transient non-synchronization and then rapidly return to synchronization, which is defined as transient synchronization mutation. This phenomenon can be used to accurately detect weak pulse signal in strong noise environments, which can further extend the weak signal detection range based on the Duffing oscillator.

**Keywords:** transient synchronization mutation, weak signal detection, pulse signal, Duffing oscillator

**PACS:** 05.45.Xt

---

\* Project supported by the National High Technology Research and Development Program of China (Grant No. 2007AA06Z228) and Technology Innovation Talent Special Foundation of Harbin (Grant No. 2009RFLXS006).

<sup>†</sup> E-mail: vicwu306@163.com