

CO₂ 激光器对相位共轭波时空混沌系统控制和同步的研究*

祝金川 李成仁[†] 齐笳羽 任旭东 岳喜爽

(辽宁师范大学物理与电子技术学院, 大连 116029)

(2010年11月14日收到; 2010年12月5日收到修改稿)

以一维耦合映像格子为对象,研究了相位共轭波时空混沌系统特性. 基于 Lyapunov 稳定性定理,通过选取耦合参数,实现了 CO₂ 激光器对相位共轭波时空混沌系统的控制,以及驱动多个相位共轭波时空系统达到并行同步. 数值模拟结果显示,耦合参数对相位共轭波时空混沌系统的控制和同步速度有影响,即耦合参数越大同步时间越短.

关键词: CO₂ 激光器, 相位共轭波, 时空混沌, 控制和同步

PACS: 42. 65. Sf, 05. 45. Pq

1. 引言

混沌含有丰富的信息,受到广泛的关注^[1-4]. 研究时空系统能够解决大量的实际混沌应用问题,特别是时空混沌系统的控制和同步是该领域的一个重要研究方向. 在非线性动力学系统的研究中,激光器是很好的实验模型,是非线性科学理论理想的应用领域. 近年来,Arechi 等通过调制激光器光学谐振腔内耗损,实验上观测到 CO₂ 激光器混沌^[5];Pecora 和 Carroll 提出了混沌同步的思想和方案^[6];Yorke 等人提出了混沌控制的原理,并很快被实验室证实^[7];Roy 等利用偶然反馈方法,实现了腔内倍频 Nd:YAG 激光器的混沌控制和两台 Nd:YAG 激光器的混沌同步^[8,9].

本文利用一维耦合映像格子模型对相位共轭波时空混沌进行讨论,和通过激光器附加自由度技术使 CO₂ 激光器达到混沌状态^[10]. 以 CO₂ 激光器作为驱动系统,从中提取出光强的混沌信号,并与相位共轭波时空混沌产生的光强信号进行非线性耦合,并用耦合信号做为控制器对相位共轭波时空模型进行反馈控制. 通过计算 Lyapunov 指数^[11]与耦合系数的关系,确定耦合系数的取值范围,实现

了 CO₂ 激光器对相位共轭波时空混沌系统的控制;同时,构造多个相同的并行相位共轭波时空系统,用同一个 CO₂ 激光器的光强信号进行驱动,使多个相位共轭波时空系统同步.

2. 混沌动力学模型

CO₂ 激光器的动力学方程为^[12]

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= -2\gamma_c(t)I(1 - \xi D), \\ \frac{dD}{dt} &= -\gamma_{//}(ID + D - 1), \\ \frac{d\gamma_c(t)}{dt} &= -\gamma_0 m_e \omega \sin \omega t, \end{aligned} \quad (1)$$

式中 I 是与光强成正比的量, D 表示反转粒子数密度, $\gamma_c(t)$ 为激光器腔内光场的衰减速率, γ_0 为稳态时光场的衰减速率, $\gamma_{//}$ 表示原子能级上粒子数衰减速率, ξ 是增益参数, m_e 为调制深度, ω 表示激光器的弛豫振荡频率. 当激光器的参数取为: $\gamma_{//} = 10^3 \text{ s}^{-1}$, $\gamma_0 = 7 \times 10^7 \text{ s}^{-1}$, $\xi = 2$, $f = \omega/2\pi = 78.8 \text{ kHz}$, $m_e = 0.03$ 时, CO₂ 激光器呈现混沌行为,如图 1 所示. 图 1(a) 是光强随时间的演化图,图 1(b) 为光强的导数与光强的相图.

* 国家自然科学基金(批准号:10804015)和辽宁省科技厅项目(批准号:20062137)资助的课题.

[†] 通讯联系人; E-mail: lshdg@sina.com

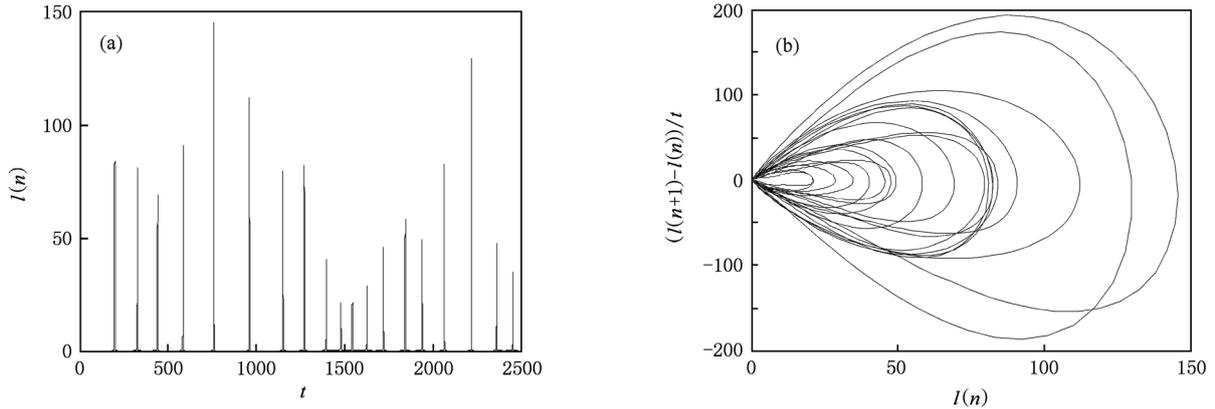


图1 (a) 光强随时间的演化; (b) 光强的导数与光强的相图

相位共轭波动力学行为^[13]

$$x_{n+1} = AJ_{0,1}^2((x_n)^{\frac{1}{2}}), \quad (2)$$

式中 x_n 为光强的映像, A 为抽运参数, J_0, J_1 分别是零阶和一阶 Bessel 函数, 相应的 x_n 表示光强的第零级反射和第一级反射. 本文以光强 x_n 的第一级散射为例来研究. 光强 x_n 的第一级散射随参数 A 的分岔图和最大 Lyapunov 指数曲线如图 2 所示.

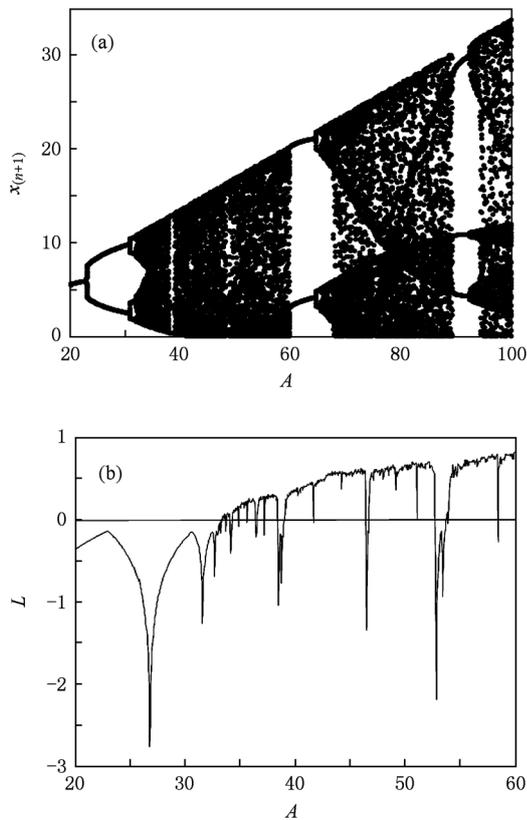


图2 (a) 一级散射随参数 A 的分岔图; (b) 最大 Lyapunov 指数与参数 A 的关系

相位共轭波的时空混沌系统采用一维耦合映像格子模型^[14]

$$x_{n+1}(i) = (1 - \varepsilon)f(x_n(i)) + \frac{\varepsilon}{2}[f(x_n(i+1)) + f(x_n(i-1))], \quad (3)$$

式中 n 表示时间步数, $i = 1, 2, 3, \dots, L$ 为空间格点坐标, ε 为格点间的耦合强度, $x_n(i)$ 为状态变量, 周期性边界条件取为 $x_n(0) = x_n(L) = 0$. 其中, 局域非线性动力学系统 $f(x_n(i))$ 是相位共轭波系统

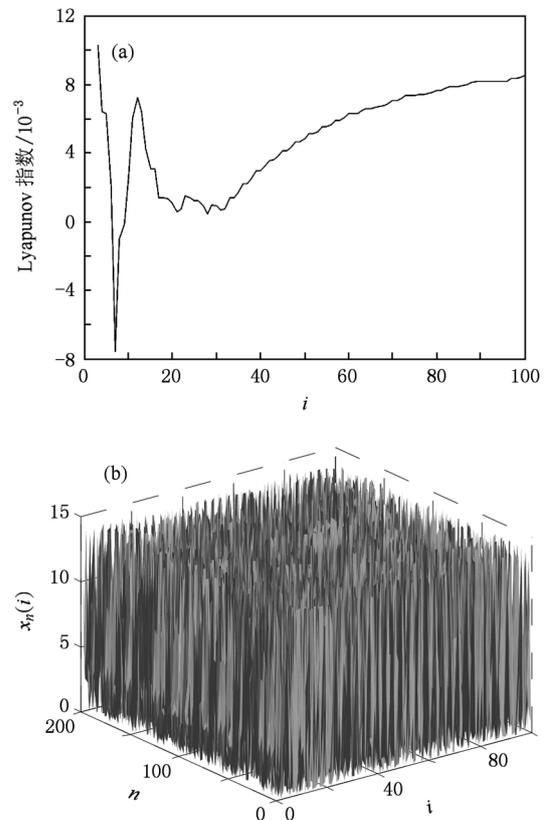


图3 (a) 耦合映像格子相位共轭波 Lyapunov 指数; (b) 相位共轭波时空演化图

$$f(x_n^{(i)}) = AJ_1^2((x_n^{(i)})^{\frac{1}{2}}), \quad (4)$$

式中的参数取为 $\varepsilon = 0.03, A = 36, L = 100$, 初始条件 $x_0(i) = 2$ 时, Lyapunov 指数均为正, 表明状态处于混沌态, 如图 3(a) 所示; 相应的时空演化图如图 3(b) 所示.

3. 控制和同步的实现

3.1. CO₂ 激光器对相位共轭波时空混沌系统的控制

CO₂ 激光器输出光强每一秒取一个脉冲 $I(t)$, 用这个光强脉冲驱动相位共轭波振荡器. 设计一个非线性控制器, 取(1)式光强的平方与(3)式状态变量之和作为控制器, 如图 4 所示.

$$U = k(x_n(i) + I^2(t)), \quad (5)$$

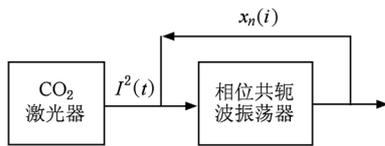


图 4 CO₂ 激光器驱动相位共轭波振荡器

式中 k 为耦合参数, (5) 式加在响应系统后, 响应系统方程(3)式变为

$$x_{n+1}(i) = (1 - \varepsilon)f(x_n(i)) + \frac{\varepsilon}{2}[f(x_n(i+1)) + f(x_n(i-1))] + U. \quad (6)$$

通过计算(6)式最大 Lyapunov 指数与耦合参数 k 之间的关系, 以确定 k 的取值范围. 选取的 k 使 Lyapunov 指数为负值时, 就能够实现对相位共轭波时空混沌的控制.

数值模拟时, 保持 CO₂ 激光器和相位共轭波振荡器的参数与(1)和(4)式等相同, 响应系统(6)式的 Lyapunov 指数随耦合参数 k 在空间 $i = 1, 2, 3, \dots, L$ 格上的三维立体图如图 5(a) 所示. 可以看到, 在系统(1)的驱动作用下, 响应系统(6)的 Lyapunov 指数面存在小于零的深谷部分. 当 k 的取值在此部分内, 则系统(6)可以稳定输出. 图 5(a) 在空间格点 k 轴的投影为图 5(b), 能清楚的看出耦合参数 k 在 (0.03, 0.12) 或 (0.34, 0.39) 等范围内取值时 Lyapunov 指数为负, 即实现了对相位共轭波时空混沌的控制. 当 $k = 0.1$ 时控制结果如图 6 所示, 显示

了 $x_n(i)$ 随时空的演化趋于稳定.

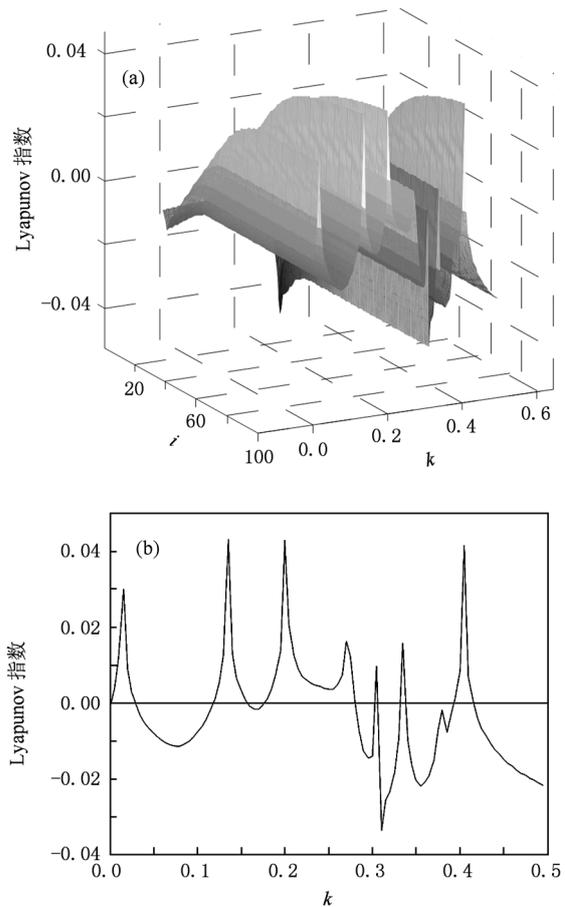


图 5 (a) Lyapunov 指数随耦合参数的变化; (b) Lyapunov 指数随耦合参数变化的投影

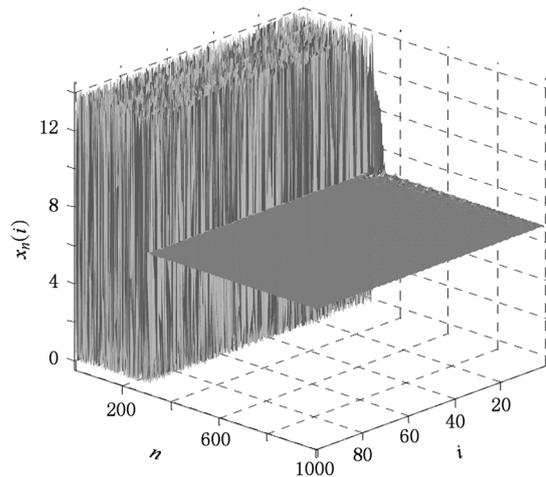


图 6 施加控制的相位共轭波时空混沌

3.2. 多个相位共轭波时空系统并行同步

如图 7 所示, 驱动系统仍为 CO₂ 激光器, 响应系

统为多个并行的相位共轭波系统,这些并行的系统与(6)式相同. 当这些并行的相位共轭波系统初始条件不同时,混沌行为不一样. 当CO₂激光器进行耦合控制使它们之间的输出光强之差为零,即实现了多个并行系统的同步. 本文仅以任意两个系统为例,如相位共轭波振荡器1和相位共轭波振荡器2.

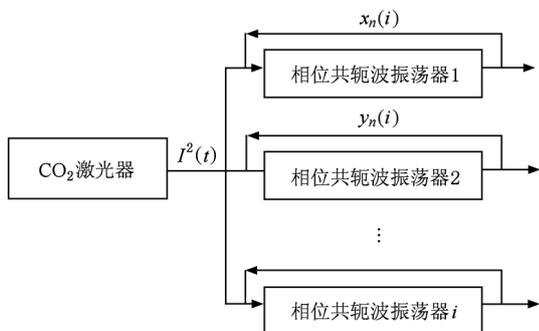


图7 CO₂激光器驱动多个并行的相位共轭波振荡器

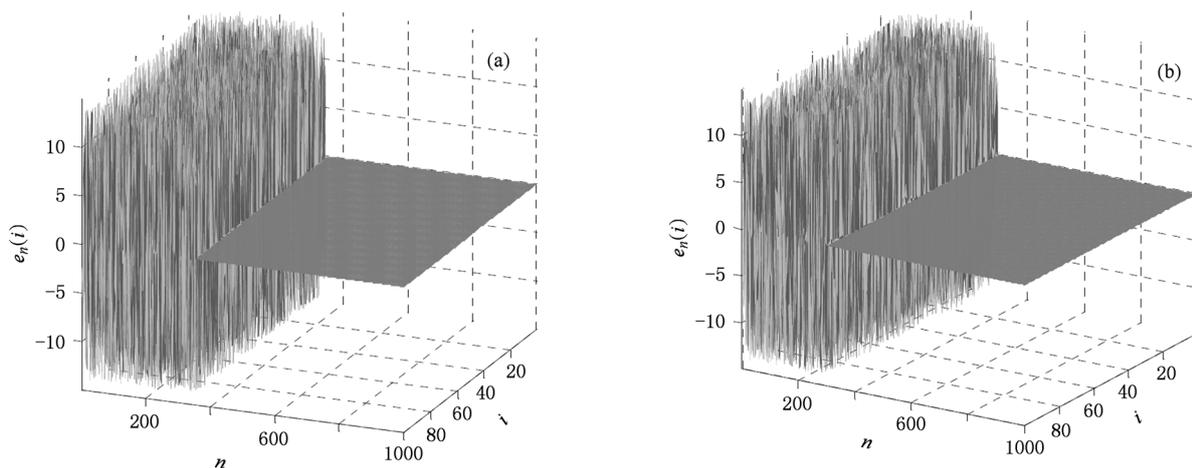


图8 (a) $k=0.22$ 时误差变量 $e_n(i)$ 时空演化图; (b) $k=0.23$ 时误差变量 $e_n(i)$ 时空演化图

可以看到,误差最后趋近于 $e_n(i) = 0$ 的平面,实现了相位共轭波振荡器1和相位共轭波振荡器2之间的同步. k 取值不同时,达到同步的时间也不同. $k = 0.05$,在300步施加控制后380步达到同步,如图8(a)所示; $k = 0.10$,在300步施加控制后320步就能达到同步,如图8(b)所示,要比图8(a)更快同步,耦合参数取的越大达到同步的时间越短.

4. 结 论

本文分析了CO₂激光器和相位共轭波的混沌

相位共轭波振荡器1形式为(6)式,CO₂激光器对它的控制器为(5)式.

相位共轭波振荡器2输出光强信号设为 $y_n(i)$,形式为

$$y_{n+1}(i) = (1 - \varepsilon)f(y_n(i)) + \frac{\varepsilon}{2}[f(y_n(i+1)) + f(y_n(i-1)))] + U' \quad (7)$$

$$U' = k(y_n(i) + I^2(t)). \quad (8)$$

CO₂激光器对它的控制器为(8)式,(5)和(8)两式中 $I(t)$ 相同. 若 k 在(0.03, 0.12)或(0.34, 0.39)区间内取值,相位共轭波振荡器1和相位共轭波振荡器2在不同的初始值条件下,它们能够实现同步. 当耦合系数 $k = 0.05$ 和 0.10 ,其他参数不变,在第300步开始对相位共轭波振荡器1和相位共轭波振荡器2加入耦合误差 $e_n(i) = x_n(i) - y_n(i)$, $e_n(i)$ 的时空演化如图8(a)(b)所示.

特性. 基于Lyapunov稳定性定理,研究了CO₂激光器和相位共轭波反馈信号共同对相位共轭波的控制,使之达到稳定态;同时讨论了一台CO₂激光器驱动多个相位共轭波时空混沌的并行系统,实现了在不同的初始条件下,多个相位共轭波时空混沌系统的同步. 误差函数的时空演化图表明,误差最后趋近于等于零的平面. 从图中可以得到耦合参数 k 取值不同时,响应系统达到同步的快慢也不同. $k = 0.05$ 时,系统经80步的时间达到同步; $k = 0.10$ 时,系统经20步达到同步,数值模拟得出结论,耦合参数取值越大达到同步所需的时间越短.

- [1] Parvathi M R, Bindu M, Krishna, Rajesh S, John M P, Nandakumaran V M 2008 *Phys. Lett.* **373** 97
- [2] Lü L, Li C R 2002 *Opt. Tech.* **28** 16 (in Chinese) [吕翎、李成仁 2002 光学技术 **28** 16]
- [3] Ju H Park 2005 *Chaos, Solitons and Fractals* **27** 1369
- [4] Zou Yan Li, Zhu Jie 2006 *Chin. Phys.* **15** 1765
- [5] Arecchi F T, Meucci R, Duccioni G P, E 1982 *Phys. Rev. Lett.* **49** 1217
- [6] Heagy J F, Carroll T L, Pecora L M 1994 *Phys. Rev. E* **50** 1874
- [7] Ott E, Grebogi C, Yorke J A 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 1196
- [8] Fabiny L, Colet P, Roy R 1993 *Phys. Rev. A* **47** 4287
- [9] Roy R, Thornburg K S Jr 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 2009
- [10] Shen K 2000 *The Chaos in Optical* (Northeast Normal University Publishing House) (in Chinese) [沈柯 2000 光学中的混沌 (东北师范大学出版社)]
- [11] Yang W M 1994 *Spatiotemporal Chaos and Coupled Map Lattice* (Shanghai Technology Publishing House) (in Chinese) [杨维明 1994 时空混沌和耦合映像格子 (上海科技教育出版社)]
- [12] Lü L, Cao H J 2003 *Opt. Tech.* **29** 89 (in Chinese) [吕翎、曹海静 2003 光学技术 **29** 89]
- [13] Zhang X, Shen K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 37 (in Chinese) [冯玉玲、张喜和、沈柯 2002 物理学报 **51** 37]
- [14] Lü L, L G, Cai Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7517 (in Chinese) [吕翎、李刚、柴元 2008 物理学报 **57** 7517]

Control and synchronization of phase-conjugate wave spatiotemporal chaos system driven by CO₂ laser^{*}

Zhu Jin-Chuan Li Chen-Ren[†] Qi Jia-Yu Ren Xu-Dong Yue Xi-Shuang

(College of Physics and Electronic Technology, Liaoning Normal University, Dalian 116029, China)

(Received 14 November 2010; revised manuscript received 5 December 2010)

Abstract

Taking an one-dimensional coupled map lattice as an object, the characteristics of phase-conjugate wave spatiotemporal chaos system are investigated. Based on the Lyapunov stable theorem, the control of phase-conjugate wave spatiotemporal chaos system is achieved, and the multiple phase-conjugate wave spatiotemporal chaos system is driven into the parallel synchronization by the CO₂ laser through choosing the coupling parameter. Numerical simulation results show that the coupling parameter has influence on the control and the synchronization speed of the phase-conjugation wave spatiotemporal chaos system. The greater the coupling parameter, the shorter the synchronization timeis.

Keywords: CO₂ laser, phase-conjugation wave, spatiotemporal chaos, control and synchronization

PACS: 42. 65. Sf, 05. 45. Pq

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10804015) and the Scientific Research Fund of Education Department of Liaoning Province, China (Grant No. 20062137).

[†] Corresponding author. E-mail: lshdy@sina.com