

利用 Taylor 展开法研究 Lamb 波在功能梯度材料中的传播特性*

洪轲 袁玲[†] 沈中华 倪晓武

(南京理工大学理学院, 南京 210094)

(2010年6月25日收到; 2010年12月14日收到修改稿)

超声技术可用于对功能梯度材料(FGMs)的性质进行评估. 由于 FGMs 性质的非均匀性, 采用分布函数来描述 FGMs 弹性常数和密度沿厚度方向的变化趋势, 并提出利用 Taylor 展开的方法来解决分布函数为任意函数时的 FGMs 中 Lamb 波的传播问题. 利用本征函数展开法得到了铁基氧化铝 FGMs 中 Lamb 波的相速度色散曲线, 讨论了材料性质分布对铁基氧化铝 FGMs 中 Lamb 波传播特性的影响. 为 FGMs 性质(沿板厚方向变化)的反演提供了理论依据.

关键词: 功能梯度材料, Lamb 波, Legendre 多项式, 分布函数

PACS: 43. 35. Zc

1. 引言

功能梯度材料(functionally gradient materials, FGMs), 是一类通过结构和组成要素的连续变化, 从而使材料的性质和功能也呈连续变化的非均质复合材料. 近年来, 该材料所展现的优良性能受到了国内外的高度重视, 已经在航空、电子、能源、医学等领域得到了广泛应用. 如何对 FGMs 的性质进行无损评估就成为需要解决的问题. 其中超声技术^[1]作为一种无损检测技术在近十几年得到了长足发展, 并广泛应用于材料的缺陷检测^[2]、厚度测量^[3]、弹性常数的反演^[4]等领域. 通过对超声信号的色散、速度和衰减等特性的研究, 就可以实现对 FGMs 性质的评估. 因此, 有必要首先对 FGMs 中超声波的传播特性进行研究.

对非均匀材料中超声波传播问题的理论研究方法主要有: 有限元法^[5,6]、双积分变换法^[7]、传递矩阵法^[8]和本征函数展开法^[9,10]等. 有限元法能够很方便的处理复杂的结构, 并且能够得到全场的数值解. 双积分变换法是通过时间坐标的 Laplace 变换和空间坐标的 Fourier 变换或 Hankel 变换求解

热弹方程的变换解, 但是要将变换解逆变换回到时间-空间坐标系时比较困难. 传递矩阵法在处理层状材料时优势明显. 本征函数展开法是将超声场表示成正交多项式的线性组合, 通过求解特征方程从而直接得到超声波的相速度和超声场的分布. 本文采用本征函数展开法(本征函数选取 Legendre 多项式的形式)对 FGMs 中的超声波进行研究. 其他各种方法在处理 FGMs 时, 都需要将 FGMs 沿厚度方向分割成多个子层, 把每个子层中材料性质看作是均匀的, 这就不能很好的反映 FGMs 性质连续变化的特征; 并且需要利用时频分析的方法通过位移场来求相速度色散曲线. Datta 等^[11]利用 Laguerre 多项式计算了涂层-基底压电材料中的声表面波. Lefebvre 等^[12]利用 Legendre 多项式计算了功能梯度半导体板中的 Lamb 波. Elmaimouni 等^[13]利用 Legendre 多项式计算了功能梯度管中的导波.

由于所讨论的 FGMs 的弹性常数和密度均沿厚度方向变化, 所以可以用分布函数来描述. 前人的工作主要讨论了分布函数为特定类型的函数(如抛物线型)时的 FGMs 中的超声波. 本文提出利用 Taylor 展开的方法来解决分布函数为任意函数时的 FGMs 中 Lamb 波的传播问题. 同时利用本征函数

* 国家自然科学基金(批准号:60778006)、新世纪优秀人才基金、高等学校博士学科点专项科研基金(批准号:20103219120040)和中国博士后科学基金(批准号:20100481087)资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: yuanling@mail.njust.edu.cn

展开法计算了四种不同分布函数(线性型、抛物线型、指数型)下的铁基氧化铝 FGMs 中 Lamb 波的速度色散曲线,讨论了材料性质分布对铁基氧化铝 FGMs 中 Lamb 波传播特性的影响. 在上述工作的基础上,目前已有一些工作报道了通过神经网络法对理论得到的色散曲线进行训练,并结合实验测得的声波色散曲线来反演 FGMs 深度剖面的弹性参数^[14-16]. 本文主要从理论上对 FGMs 中的色散曲线进行讨论,为 FGMs 性质(沿板厚方向变化)的反演提供理论依据.

2. 理论模型

波的传播满足如下波动方程:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (1)$$

其中 σ 表示应力, u 表示位移. 下标 i, j 等于 1, 2, 3 并且满足重复下标求和. 则 u_1, u_2 和 u_3 分别代表沿 x_1, x_2 和 x_3 轴方向的质点位移分量. 为了简便,引入无量纲坐标 $q_1 = kx_1, q_2 = kx_2, q_3 = kx_3$, 其中 k 是传播方向的波矢.

波动方程(1)式在直角坐标系中展开成如下形式:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad (2a)$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \quad (2b)$$

在小变形的假设下,应变和位移满足如下关系

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \\ 2\varepsilon_{12} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}. \end{aligned} \quad (3)$$

根据广义 Hooke 定律满足如下本构关系:

$$\sigma_{11} = C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{22}$$

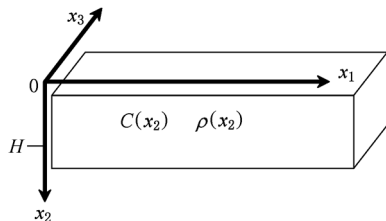


图1 功能梯度材料示意图

$$\begin{aligned} \sigma_{22} &= C_{12}\varepsilon_{11} + C_{11}\varepsilon_{22} \\ \sigma_{12} &= C_{44}\varepsilon_{12}. \end{aligned} \quad (4)$$

将(3), (4)式代入(2a), (2b)式后可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_1} \left[k \left(C_{11} \frac{\partial u_1}{\partial q_1} + C_{12} \frac{\partial u_2}{\partial q_2} \right) \right] \\ + \frac{\partial}{\partial q_2} \left[k C_{44} \left(\frac{\partial u_1}{\partial q_2} + \frac{\partial u_2}{\partial q_1} \right) \right] = \frac{\rho}{k} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (5a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_1} \left[k C_{44} \left(\frac{\partial u_1}{\partial q_2} + \frac{\partial u_2}{\partial q_1} \right) \right] \\ + \frac{\partial}{\partial q_2} \left[k \left(C_{12} \frac{\partial u_1}{\partial q_1} + C_{11} \frac{\partial u_2}{\partial q_2} \right) \right] = \frac{\rho}{k} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (5b)$$

FGMs 的性质沿厚度方向发生连续变化,可表示为 q_2 的 N 次多项式

$$C_{ij}(q_2) = \sum_{n=0}^N C_{ij}^{(n)} \left(\frac{q_2}{kH} \right)^n \pi(q_2), \quad (6a)$$

$$\rho(q_2) = \sum_{n=0}^N \rho^{(n)} \left(\frac{q_2}{kH} \right)^n \pi(q_2), \quad (6b)$$

其中 $\pi(q_2) = \begin{cases} 1, & 0 \leq q_2 \leq kH, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

边界条件满足上下表面应力的垂直分量为 0.

位移分量用 Legendre 多项式来表示

$$u_1 = \sum_{m=0}^{\infty} p_m^1 Q_m(q_2) \exp(i(\omega t - q_1)), \quad (7a)$$

$$u_2 = \sum_{m=0}^{\infty} p_m^2 Q_m(q_2) \exp(i(\omega t - q_1)), \quad (7b)$$

其中 $Q_m(q_2) = \sqrt{\frac{2m+1}{kH}} P_m\left(\frac{2q_2}{kH} - 1\right)$, P_m 为第 m 阶 Legendre 多项式.

分别将(6a), (6b)和(7a), (7b)式代入(5a), (5b)式得

$$\begin{aligned} & -\rho^{(n)} \left(\frac{1}{kH} \right)^n \left(\frac{\omega}{k} \right)^2 q_2^{n+1} p_m^1 Q_m(q_2) \pi(q_2) \\ & = \left(\frac{1}{kH} \right)^n \left[-C_{11}^{(n)} q_2^{n+1} p_m^1 Q_m(q_2) \right. \\ & \quad - i(C_{12}^{(n)} + C_{44}^{(n)}) q_2^{n+1} p_m^2 \frac{\partial Q_m(q_2)}{\partial q_2} \\ & \quad + C_{44}^{(n)} q_2^{n+1} p_m^1 \frac{\partial^2 Q_m(q_2)}{\partial q_2^2} + n C_{44}^{(n)} q_2^n p_m^1 \frac{\partial Q_m(q_2)}{\partial q_2} \\ & \quad \left. - i n C_{44}^{(n)} q_2^n p_m^2 Q_m(q_2) \right] \pi(q_2) \\ & \quad + \left(\frac{1}{kH} \right)^n \left[C_{44}^{(n)} q_2^{n+1} p_m^1 \frac{\partial Q_m(q_2)}{\partial q_2} \right. \\ & \quad \left. - i C_{44}^{(n)} q_2^{n+1} p_m^2 Q_m(q_2) \right] \frac{\partial \pi(q_2)}{\partial q_2}, \end{aligned} \quad (8a)$$

$$\begin{aligned}
 & -\rho^{(n)} \left(\frac{1}{kH}\right)^n \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 q_2^{n+1} p_m^2 Q_m(q_2) \pi(q_2) \\
 = & \left(\frac{1}{kH}\right)^n \left[-i(C_{12}^{(n)} + C_{44}^{(n)}) q_2^{n+1} p_m^1 \frac{\partial Q_m(q_2)}{\partial q_2} \right. \\
 & - C_{44}^{(n)} q_2^{n+1} p_m^2 Q_m(q_2) + C_{11}^{(n)} q_2^{n+1} p_m^2 \frac{\partial^2 Q_m(q_2)}{\partial q_2^2} \\
 & - inC_{12}^{(n)} q_2^n p_m^1 Q_m(q_2) \\
 & \left. + nC_{11}^{(n)} q_2^n p_m^2 \frac{\partial Q_m(q_2)}{\partial q_2} \right] \pi(q_2) \\
 & + \left(\frac{1}{kH}\right)^n \left[-iC_{12}^{(n)} q_2^{n+1} p_m^1 Q_m(q_2) \right. \\
 & \left. + C_{11}^{(n)} q_2^{n+1} p_m^2 \frac{\partial Q_m(q_2)}{\partial q_2} \right] \frac{\partial \pi(q_2)}{\partial q_2}. \quad (8b)
 \end{aligned}$$

将(8a),(8b)式两边同时乘以 $Q_j^*(q_2)$, 并对 q_2 从 0 到 kH 进行积分

$$\begin{aligned}
 & -\rho^{(n)} \left(\frac{1}{kH}\right)^n \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 p_m^{1n+1} I_{m,j} \\
 = & \left(\frac{1}{kH}\right)^n \left[-C_{11}^{(n)} p_m^{1n+1} I_{m,j} \right. \\
 & - i(C_{12}^{(n)} + C_{44}^{(n)}) p_m^{2n+1} I_{2m,j} \\
 & + C_{44}^{(n)} p_m^{1n+1} I_{3m,j} \\
 & + nC_{44}^{(n)} p_m^{1n} \delta I_{2m,j} - inC_{44}^{(n)} p_m^{2n} I_{m,j} \\
 & \left. + C_{44}^{(n)} p_m^{1n+1} K_{2m,j} - iC_{44}^{(n)} p_m^{2n+1} K_{1m,j} \right], \quad (9a) \\
 & -\rho^{(n)} \left(\frac{1}{kH}\right)^n \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 p_m^{2n+1} I_{m,j} \\
 = & \left(\frac{1}{kH}\right)^n \left[-i(C_{12}^{(n)} + C_{44}^{(n)}) p_m^{1n+1} I_{2m,j} \right. \\
 & - C_{44}^{(n)} p_m^{2n+1} I_{m,j} + C_{11}^{(n)} p_m^{2n+1} I_{3m,j} \\
 & - inC_{12}^{(n)} p_m^{1n} I_{m,j} + nC_{11}^{(n)} p_m^{2n} I_{2m,j} \\
 & \left. - iC_{12}^{(n)} p_m^{1n+1} K_{1m,j} + C_{11}^{(n)} p_m^{2n+1} K_{2m,j} \right], \quad (9b)
 \end{aligned}$$

其中 ${}^n I_{m,j}$, ${}^n I_{2m,j}$, ${}^n I_{3m,j}$, ${}^n K_{1m,j}$ 和 ${}^n K_{2m,j}$ 的解析展开式见附录 A.

联合(9a)和(9b)式可得特征方程

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} {}^n A_{m,j}^{11} & {}^n A_{m,j}^{12} \\ {}^n A_{m,j}^{21} & {}^n A_{m,j}^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_m^1 \\ p_m^2 \end{pmatrix} \\
 = & - \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 \begin{pmatrix} {}^n M_j^m & 0 \\ 0 & {}^n M_j^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_m^1 \\ p_m^2 \end{pmatrix}, \quad (10)
 \end{aligned}$$

其中矩阵中的元素 ${}^n A_{m,j}^{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2$) 和 ${}^n M_j^m$ 的具体形式见附录 B. (10) 式中的特征值 $\frac{\omega^2}{k^2}$ 就是导波速度的平方, p_m^a ($a = 1, 2$) 为特征向量. (7a), (7b) 式

中 m 取从 0 到某一有限值 L , 则(10) 式中矩阵的阶数为 $2(L + 1)$. 仅当特征值和特征向量随 L 的增加收敛时, 对应的特征模式的解才被接受.

3. 计算结果

由两种组元构成的铁基氧化铝 FGMs 的有效弹性常数和密度满足下式:

$$C(x_2) = C_{Al_2O_3} + (C_{Fe} - C_{Al_2O_3})y(x), \quad (11)$$

$$\rho(x_2) = \rho_{Al_2O_3} + (\rho_{Fe} - \rho_{Al_2O_3})y(x), \quad (12)$$

其中 $x = \frac{x_2}{H}$ ($0 \leq x_2 \leq H$). $y(x)$ 为分布函数, 描述了铁基氧化铝 FGMs 的弹性常数和密度沿厚度方向的变化情况. 本文计算所用的四种不同分布函数(如图 2 所示)分别为: 抛物线型 $y(x) = -x^2 + 2x$ 和 $y(x) = x^2$, 线性型 $y(x) = x$, 指数型 $y(x) = e^{x \ln 2} - 1$.

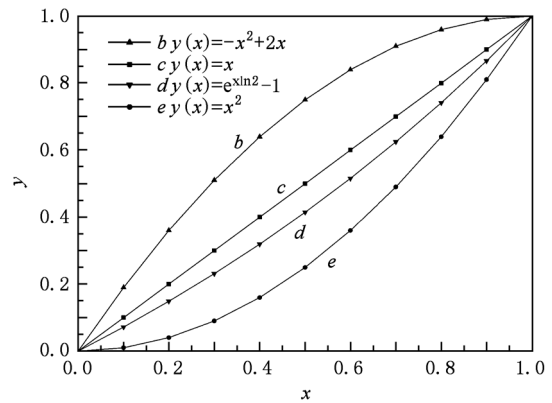


图 2 四种不同分布函数示意图

对于上述四种不同的分布函数, 可用 Taylor 展开的方法将分布函数展开成多项式的形式, 然后代入(11), (12)式, 即可得到弹性常数和密度沿厚度方向变化的函数. Taylor 展开的方法也同样适用于分布函数为任意函数时的情况.

计算采用的材料参数如表 1 所示.

表 1 计算所用的材料参数

	Fe	Al ₂ O ₃
密度 $\rho / (\text{kg/m}^3)$	7870	3900
刚度系数 $C_{ij} / 10^{10} (\text{N/m}^2)$		
C_{11}	21.85	38.88
C_{12}	6.36	8.55
C_{44}	7.75	14.00

如图3所示,实心方曲线为Fe样品中的 a_0 和 s_0 模态,实心圆曲线为 Al_2O_3 样品中的 a_0 和 s_0 模态,空心圆曲线为弹性常数和密度都按 $y = x$ 分布的铁基氧化铝FGMs中的 a_0 和 s_0 模态. C_{R1} 和 C_{R2} 分别为纯的 Al_2O_3 和Fe样品中的表面波波速. 对于各向同性、均匀、自由板(如 Al_2O_3 和Fe),当 $kH \rightarrow \infty$ (即 $\frac{H}{\lambda} \rightarrow \infty$)时, a_0 和 s_0 模态收敛于同一个定值,该定值等于样品中的表面波波速(如图 C_{R1}, C_{R2}). 而对于两相功能梯度材料(如铁基氧化铝FGMs),其 a_0 模态和 s_0 模态并不收敛于同一个定值, a_0 模态的值由下表面层材料的性质决定(趋近 C_{R2}), s_0 模态的值由上表面层材料的性质决定(趋近 C_{R1}). 这是因为在 $kH \rightarrow \infty$ (即 $\frac{H}{\lambda} \rightarrow \infty$)时,对称模态 s_0 和反对称模态 a_0 完全退化并在上表面或下表面形成表面波,由于 a_0 模态的振幅有正反两种形式,与 s_0 模态的振幅相耦合,则 a_0 模态退化为下表面波, s_0 模态退化为上表面波. 由于表面波只在样品表面约一个波长的深度传播,故在距离上下表面层约一个波长的样品内部,其材料性质的变化对 a_0 和 s_0 模态在 $kH \rightarrow \infty$ 时的相速度没有影响. 对于均匀各向同性样品, a_0 和 s_0 模态收敛于同一个定值. 而铁基氧化铝FGMs上下表面材料性质的不同,导致了 a_0 模态和 s_0 模态并不收敛于同一个定值.

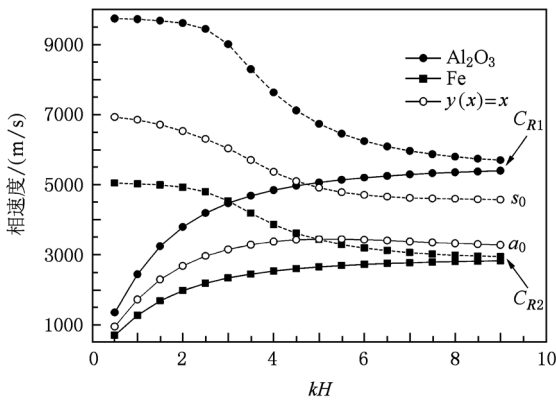


图3 a_0 模态和 s_0 模态的相速度色散曲线

图4中曲线 f 和 a 为 Al_2O_3 和Fe样品中的 s_0 模态,曲线 b, c, d, e 分别为弹性常数和密度同时按图2中的四种不同分布变化的铁基氧化铝FGMs中的 s_0 模态. 在低频区即 kH 小于2时, Al_2O_3 和Fe样品中相速度变化率为2%左右,几乎不发生色散;在四种不同分布的铁基氧化铝FGMs中相速度变化率为

6%左右,存在轻微的色散. 这是因为在低频区(即 $\frac{H}{\lambda}$ 很小), s_0 模态的面内位移占主导,可看作薄板中纵波的情况,并且薄板中纵波是不色散的. 故对于 Al_2O_3 和Fe样品,低频区的相速度几乎不变. 而对于不同分布的铁基氧化铝FGMs,由于杨氏模量和密度是变化的,导致薄板中的纵波波速发生变化,故存在轻微的色散. 当 kH 在2.5附近时,曲线 f 和 a 有明显的拐点. 因为随着 kH 的增大, s_0 模态的面内位移不再占主导,并且不能再看成薄板的情况. 而对于铁基氧化铝FGMs,其弹性常数和密度的不均匀性导致了在低频区相速度有轻微色散. 在 kH 取2到5.5之间时,在 Al_2O_3, Fe 和四种铁基氧化铝FGMs中均有非常明显的色散. 对于 b, c, d, e 四种铁基氧化铝FGMs,其弹性常数和密度越接近样品 Al_2O_3 的弹性常数和密度,随着 kH 的继续增大,则相速度也越接近样品 Al_2O_3 的相速度.

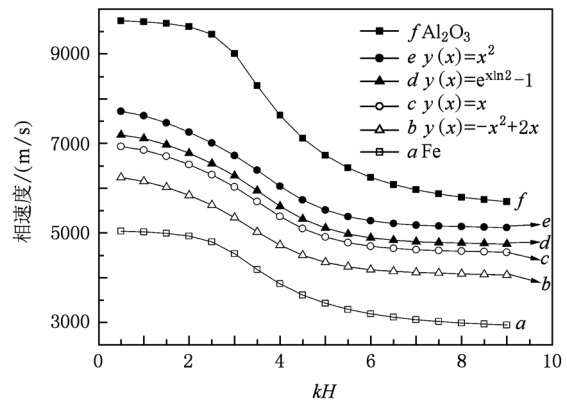


图4 弹性常数和密度不同分布的样品中 s_0 模态的相速度色散曲线

如图5,曲线 a 和 f 分别为 Al_2O_3 和Fe样品中的 a_0 模态,曲线 b, c, d, e 分别为弹性常数和密度都按 $y = -x^2 + 2x, y = x, y = e^{x^2} - 1, y = x^2$ 分布的铁基氧化铝FGMs中的 a_0 模态. 当 $kH \rightarrow 0$ (即 $\frac{H}{\lambda} \rightarrow 0$)时, a_0 模态的相速度都趋于0,并且在 kH 小于2的低频区色散非常明显. 这是因为此时 a_0 模态的离面位移占主导,可看作薄板中弯曲波的情况,此时薄板中的弯曲波与无限介质中的波不同,其波速与频率有关,其表达式为 $V = \left[\frac{E}{3\rho(1-\nu^2)} \right]^{1/2} kH$. 故在低频区色散明显,当 $kH \rightarrow 0$ 时,速度为0. 随着 kH 的增大,薄板理论不再适用,本文也计算了 kH 大于2时

的相速度. 对于 b, c, d, e 四种铁基氧化铝 FGMs, 其弹性常数和密度越接近样品 Fe 的弹性常数和密度, 随着 kH 的增大, 则相速度也越接近样品 Fe 的相速度.

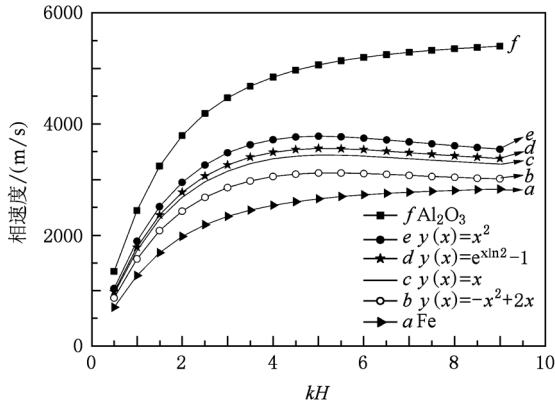


图5 弹性常数和密度不同分布的样品中 a_0 模式的相速度色散曲线

图6中曲线 a 到 b 依次为均匀 Fe, 弹性常数和密度都按 $y = -x^2 + 2x$ 分布、弹性常数和密度都按 $y = x$ 分布、弹性常数和密度都按 $y = x^2$ 分布和均匀 Al_2O_3 五种样品中 lamb 波 a_1 模式的相速度色散曲线, f_1 到 f_5 依次对应曲线 a 到 b 的截止频率. 当 $kH \rightarrow \infty$ 时, 曲线 a 和 b 分别趋于 Fe 样品中横波波速 (C_{T1}) 和样品 Al_2O_3 中横波波速 (C_{T2}), 其他三种不同分布的铁基氧化铝 FGMs 也分别趋于固定的值, 其值介于 C_{T1} 和 C_{T2} 之间. 这是因为在 $kH \rightarrow \infty$ 时, 质点位移场主要表现为剪切方向的位移, 同时在样品边界上存在纵向位移, 由于纵向位移场在样品内部呈指数衰减, 故其本质上表现为纯的横波, 其值主要由材料的性质 (弹性常数和密度) 决定. 对于不同分布的铁基氧化铝 FGMs, 由于其材料性质的不均匀性, 当 $kH \rightarrow \infty$ 时, 相速度分别收敛于不同的值. 样品的分布趋势越接近于样品 Fe, 则值也越趋于 C_{T1} .

在各向同性均匀样品中 (如 Al_2O_3 和 Fe), a_1 模式的截止频率与样品的厚度和样品的弹性常数和密度有关. 样品厚度增加, 截止频率降低. 对于铁基氧化铝 FGMs (如图所示三种不同分布情况), 由于材料弹性常数和密度的非均匀性, 其截止频率介于样品 Fe 的截止频率 f_1 和样品 Al_2O_3 的截止频率 f_5 之间, 材料性质越接近样品 Fe, 则截止频率也越接近 f_1 . s_1 模式的截止频率也有类似性质.

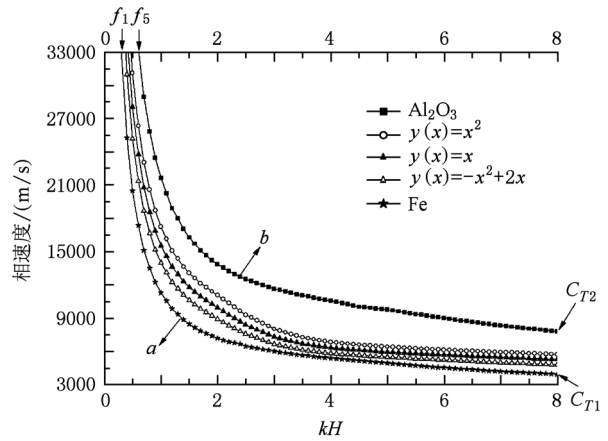


图6 弹性常数和密度不同分布的样品中 a_1 模式的相速度色散曲线

4. 结 论

本文利用本征函数展开法, 讨论了材料性质的分布对铁基氧化铝 FGMs 中 Lamb 波传播特性的影响. 提出利用 Taylor 展开的方法来解决分布函数为任意函数时的 FGMs 中 Lamb 波的传播问题. 对于四种不同分布函数 (线性型、抛物线型、指数型) 下的铁基氧化铝 FGMs, 通过计算发现 Lamb 波色散曲线的变化规律反映了 FGMs 性质 (弹性常数和密度) 沿厚度方向分布的信息. 通过对实验测得的 Lamb 波信号进行时频分析, 从而得到 Lamb 波的相速度色散曲线, 通过神经网络法或遗传算法等方法对理论得到的色散曲线进行训练, 结合实验结果, 即可得到材料的参数. 本文的研究为 FGMs 性质 (沿板厚方向变化) 的反演提供了理论依据.

附录 A

${}^n I_{m,j}, {}^n I_{2m,j}, {}^n I_{3m,j}, {}^n K1_{m,j}$ 和 ${}^n K2_{m,j}$ 的解析表达式如下:

$$\begin{aligned}
 {}^n I_{m,j} &= \int_0^{kH} Q_j^*(q_2) q_2^n Q_m(q_2) dq_2, \\
 {}^n I_{2m,j} &= \int_0^{kH} Q_j^*(q_2) q_2^n \frac{\partial Q_m(q_2)}{\partial q_2} dq_2, \\
 {}^n I_{3m,j} &= \int_0^{kH} Q_j^*(q_2) q_2^n \frac{\partial^2 Q_m(q_2)}{\partial q_2^2} dq_2, \\
 {}^n K1_{m,j} &= \int_0^{kH} Q_j^*(q_2) q_2^n \frac{\partial \pi(q_2)}{\partial q_2} Q_m(q_2) dq_2, \\
 {}^n K2_{m,j} &= \int_0^{kH} Q_j^*(q_2) q_2^n \frac{\partial \pi(q_2)}{\partial q_2} \frac{\partial Q_m(q_2)}{\partial q_2} dq_2.
 \end{aligned}$$

附录 B

$$\begin{aligned}
 {}^n M_M^j &= \rho^{(n)} \left(\frac{1}{kH} \right)^{nn} \Pi_{m,j}, \\
 {}^n A_{m,j}^{11} &= \left(\frac{1}{kH} \right)^n \{ -C_{11}^{(n)n+1} \Pi_{m,j} + C_{44}^{(n)n+1} \mathcal{B}_{m,j} \\
 &\quad + nC_{44}^{(n)n} \mathcal{I}_{2,m,j} + C_{44}^{(n)n+1} \mathcal{K}_{2,m,j} \},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}^n A_{m,j}^{12} &= \left(\frac{1}{kH} \right)^n \{ -i(C_{12}^{(n)} + C_{44}^{(n)})^{n+1} \mathcal{I}_{2,m,j} \\
 &\quad - inC_{44}^{(n)n} \Pi_{m,j} - iC_{44}^{(n)n+1} \mathcal{K}_{1,m,j} \}, \\
 {}^n A_{m,j}^{21} &= \left(\frac{1}{kH} \right)^n \{ -i(C_{12}^{(n)} + C_{44}^{(n)})^{n+1} \mathcal{I}_{2,m,j} \\
 &\quad - inC_{12}^{(n)n} \Pi_{m,j} - iC_{12}^{(n)n+1} \mathcal{K}_{1,m,j} \}, \\
 {}^n A_{m,j}^{22} &= \left(\frac{1}{kH} \right)^n \{ -C_{44}^{(n)n+1} \Pi_{m,j} + C_{11}^{(n)n+1} \mathcal{B}_{m,j} \\
 &\quad + nC_{11}^{(n)n} \mathcal{I}_{2,m,j} + C_{11}^{(n)n+1} \mathcal{K}_{2,m,j} \}.
 \end{aligned}$$

-
- [1] Han Q B, Qian M L, Zhu C P 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 313 (in Chinese) [韩庆邦、钱梦禄、朱昌平 2007 物理学报 **56** 313]
 - [2] Chona R, Suh C S, Rabroker G A 2003 *Optics and Lasers in Engineering* **40** 371
 - [3] Dewhurst R J, Edwards C, McKie A D W, Palmer S B 1987 *Appl. Phys. Lett.* **51** 1066
 - [4] Xu B Q, Shen Z H, Ni X W 2004 *Appl. Phys. Lett.* **85** 6161
 - [5] Yuan L, Shen Z H, Ni X W 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 7058 (in Chinese) [袁玲、沈中华、倪晓武 2007 物理学报 **56** 7058]
 - [6] Sun H X, Xu B Q, Wang J J, Xu G D, Xu C G, Wang F 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 6344 (in Chinese) [孙宏祥、许伯强、王纪俊、徐晨光、王峰 2009 物理学报 **58** 6344]
 - [7] Hurley D H, Spicer J B 2004 *J. Acoust. Soc. Am.* **116** 2914
 - [8] Cai C, Liu G R, Lam K Y 2001 *Journal of Sound and Vibration* **248** 71
 - [9] Kim Y, Hunt W D 1990 *IEEE Ultrasonics Symposium* **90** 179
 - [10] Lefebvre J E, Zhang V, Gazalet J 1999 *J. Appl. Phys.* **85** 3419
 - [11] Datta S, Hunsinger B J 1978 *J. Appl. Phys.* **49** 475
 - [12] Lefebvre J E, Zhang V, Gazalet J 2001 *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelect. Freq. Contr.* **48** 1332
 - [13] Elmaimouni L, Lefebvre J E, Zhang V 2005 *NDT & E International* **38** 344
 - [14] Liu G R, Han X, Xu Y G, Lam K Y 2001 *Composites Science and Technology* **61** 1401
 - [15] Yang J, Cheng J C, Berthelot Y H 2002 *J. Acoust. Soc. Am.* **111** 1245
 - [16] Yu J G, Wu B 2009 *NDT & E International* **42** 452

Analysis of Lamb waves propagation in functional gradient materials using Taylor expansion method^{*}

Hong Ke Yuan Ling[†] Shen Zhong-Hua Ni Xiao-Wu

(School of Science, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

(Received 25 June 2010; revised manuscript received 14 December 2010)

Abstract

The technology of ultrasound can be used to evaluate properties of functionally graded materials (FGMs). Because of the inhomogeneity of the FGM properties, distribution function is used to describe the FGM elastic constant and density which are assumed to vary in the direction of the thickness. Taylor expansion method is used to solve Lamb wave propagation problems in FGMs, in which the distribution function is an arbitrary function. Phase velocity dispersion curves for Lamb waves in iron-based alumina FGMs are obtained by using an extension of the Legendre polynomial approach, and the effects of the gradient variation of iron-based alumina FGMs properties on Lamb wave propagation characteristics are discussed in detail. The conclusion could be useful for inversing elastic constant and density, which are varied along the thickness direction, of FGMs.

Keywords: functionally gradient materials, Lamb waves, Legendre polynomial, distribution function

PACS: 43.35.Zc

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundational of China (Grant No. 60778006), the New Century Excellent Talents in University of China, the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (Grant No. 20103219120040), and the China Postdoctoral Science Foundation (Grant No. 20100481087).

[†] Corresponding author. E-mail: yuanling@mail.njust.edu.cn