

利用时滞反馈控制自参数振动系统饱和和控制减振频带^{*}

赵艳影[†] 杨如铭

(南昌航空大学飞行器工程学院, 南昌 330063)

(2010年9月10日收到; 2010年12月30日收到修改稿)

研究了采用时滞反馈来控制自参数振动系统中饱和控制的减振频带的分布问题. 在原始的无时滞自参数振动系统中, 饱和控制的减振频带在某些内共振解谐参数范围内出现不稳定区域, 饱和控制的减振频带分布不合理. 通过引进时滞反馈可以控制减振频带的分布. 主要分析了反馈增益系数和时滞量两控制参数对饱和控制减振频带分布的影响. 研究表明, 通过调节反馈增益系数和时滞量两参数, 可以消除饱和控制减振频带中的不稳定区域, 同时能够保证减振频带的宽度不变窄, 从而控制和改善了饱和控制减振频带的分布.

关键词: 时滞, 饱和控制, 反馈, 内共振解谐

PACS: 43. 40. Vn, 43. 40. Ga

1. 引言

非线性因素对任何振动系统都是存在的, 它们来自系统物理的、几何的、结构的、耗散的, 以及运动的等等因素. 自参数振动是一种特殊的非线性振动, 饱和现象是非线性自参数振动系统一种重要的现象. 利用非线性自参数振动系统的饱和现象能够实现主振动系统的宽频带控制. Nayfeh 等^[1] 在研究船体的俯仰和横摇耦合运动时首先发现了饱和现象. 后来饱和现象在 Haddow 等^[2] 学者的实验中得到了证实, 并提出可以利用非线性系统的饱和现象制造减振器. Banerjee 和 Bajaj 等^[3,4] 研究了带有参数激励摆的振动系统, 研究发现由于模型当中高阶非线性项的出现而阻止了饱和现象的出现. Song 等^[5] 采用谐波平衡法研究了带有参数激励摆的质量弹簧系统的响应特性和系统的稳定性. 本文对文献^[5] 研究的模型进行分析, 发现该振动系统在某些内共振解谐参数范围内出现了饱和现象, 可以采用饱和现象控制主系统的振动. 然而研究又发现, 在一些内共振解谐参数范围内饱和控制的减振频带出现不稳定区域, 减振频带分布不合理, 因此本文主要考虑采用时滞反馈控制和改善饱和控制减

振频带的分布.

近年来, 得益于时滞动力学的发展, 时滞动力学已经介入到轨道交通、混沌控制、结构振动控制等领域, 使得时滞动力学带有边缘科学的色彩. 王洪坡等^[6] 研究了磁浮系统中时滞反馈控制的问题, 研究表明适当的选择时滞不但可以控制亚谐共振, 而且还能够控制系统的混沌运动. 钱长照等^[7] 研究了时滞反馈对系统分岔响应的控制问题, 研究证明选择适当的时滞参数可以改变分岔响应曲线的拓扑形态. 刘爽等^[8] 的研究还发现时滞可以控制相对转动系统的 Hopf 分岔以及系统振动的稳定性. 时滞减振是一种新兴的减振技术, Olgac 等^[9] 提出在耦合的线性强迫振动系统中耦合进时滞, 可以通过时滞的在线调节完全消除主系统的振动. 该课题组成员经过大量的理论和实验研究^[10-12] 取得了时滞减振技术的理论依据和实验结果. 但是该减振方法存在本质缺陷, 时滞量是一个确定的数值, 如果在实验中时滞漂移, 系统的振动将更加剧烈. 作者近几年的研究^[13] 发现采用时滞和非线性联合耦合的方法可以加宽减振频带. 并且作者近期的研究^[14] 还发现, 时滞对饱和控制系统的减振频带分布、减振频带宽度、减振频带漂移等有很好的控制作用. 本文出于利用时滞对主动控制积极作用的研究动机, 在

^{*} 国家自然科学基金青年科学基金(批准号:10802035)资助的课题.

[†] E-mail: yanyingzhao@163.com

文献[5]的振动系统中耦合进一个带有时滞的状态反馈,在前一篇文章中研究了时滞反馈控制对饱和和控制系统中主系统振动的减振作用,本篇文章主要研究时滞反馈控制对饱和和控制减振频带分布的控制和改善作用.

2. 力学模型

本文在文献[5]研究模型的基础上给系统耦合进一个带有时滞的状态反馈,用来控制和改善自参数振动系统饱和和控制减振频带的分布,图1是该减振系统的结构示意图.

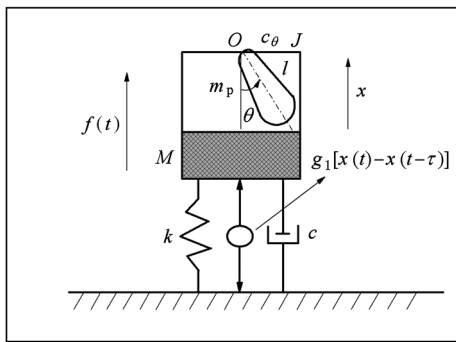


图1 自参数振动系统的时滞反馈控制模型

以垂直方向的位移和单摆的角度位移为广义坐标,建立系统的运动方程为

$$(M + m_p)\ddot{x} + c\dot{x} + kx + m_p l(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) + g_1(x - x_\tau) = f(t), \tag{1}$$

$$J\ddot{\theta} + c_\theta\dot{\theta} + m_p l\sin\theta(g + \ddot{x}) = 0, \tag{2}$$

其中, M 是主系统物块的质量, k 是线性弹簧的刚度系数, c 是阻尼器的阻尼系数. 物块 M 受到谐波外激励 $f(t) = P_0\cos(\omega t)$ 的作用. 辅助系统也就是减振器系统,由附加到主系统的单摆构成, m_p 是摆的质量, l 是摆杆的长度, c_θ 和 J 分别表示单摆的阻尼系数及惯性矩. $g_1(x - x_\tau)$ 是耦合进的反馈控制项, g_1 是反馈增益系数, τ 是时滞,且 $x_\tau = x(t - \tau)$. 当 $\tau = 0$ 时,时滞反馈控制项消失,该系统就退化为文献[5]中所研究的自参数动力吸振器减振系统,因此很容易观察到 $\tau \neq 0$ 时时滞反馈控制对振动系统减振频带分布的控制及改善效果.

3. 摄动分析

为了便于分析,引入下列无量纲量:

$$t^* = \frac{\omega}{\Omega}t, \tau^* = \frac{\omega}{\Omega}\tau, \eta = \frac{x}{l}, F = \frac{P_0}{kl}, R = \frac{m_p}{M}, \alpha = \frac{\omega_1}{\omega_3}, \beta = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \gamma = \frac{\omega_4}{\omega_3}, \mu = \frac{m_p l^2}{J}, \Omega = \frac{\omega}{\omega_3}, \xi_1 = \frac{c}{2M\omega_3(1+R)}, \xi_2 = \frac{c_\theta}{2J\omega_3}, \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{M+m_p}}, \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \omega_3 = \sqrt{\frac{k}{M}}, \omega_4 = \sqrt{\frac{g_1}{M+m_p}},$$

其中为了书写方便,将方程中“*”号去掉,则系统无量纲化的运动方程为

$$\eta'' + 2\xi_1\eta' + \alpha^2\eta + \frac{R}{1+R}(\theta''\sin\theta + \theta'^2\cos\theta) + \gamma^2(\eta - \eta_\tau) = \alpha^2 F \cos(\Omega t), \tag{3}$$

$$\theta'' + 2\xi_2\theta' + \mu(\alpha^2\beta^2 + \eta'')\sin\theta = 0, \tag{4}$$

其中 Ω 是无量纲频率, $\eta_\tau = \eta(t - \tau)$, $(\cdot)' = \frac{d(\cdot)}{dt^*}$.

由于 x 和 θ 均为小量,计算中可以近似取 $\sin\theta \approx \theta - \theta^3/6$, $\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$. 对变量进行重新标度, $\eta = \varepsilon\hat{\eta}, \theta = \varepsilon\hat{\theta}, F = \varepsilon^2\hat{F}, \xi_1 = \varepsilon\hat{\xi}_1, \xi_2 = \varepsilon\hat{\xi}_2, \gamma^2 = \varepsilon\hat{\gamma}^2, \eta_\tau = \varepsilon\hat{\eta}_\tau$, 同时为了书写方便,将“^”去掉,得到新的无量纲化的系统的运动方程

$$\eta'' + \Omega_1^2\eta = \varepsilon[-G_1\eta' - G_2(\theta''\theta + \theta'^2) + G_3\cos(\Omega t) + H_3(\eta_\tau - \eta)] + O(\varepsilon^2), \tag{5}$$

$$\theta'' + \Omega_2^2\theta = \varepsilon[-H_1\theta' - H_2\theta\eta''] + O(\varepsilon^2), \tag{6}$$

其中, $\Omega_1^2 = \alpha^2, \Omega_2^2 = \mu\alpha^2\beta^2, G_1 = 2\xi_1, H_1 = 2\xi_2, G_2 = \frac{R}{1+R}, H_2 = \mu, G_3 = F\alpha^2, H_3 = \gamma^2$.

下面采用多尺度方法来寻找方程的二阶近似解,其解可以表示为

$$\eta(t, \varepsilon) = \eta_0(T_0, T_1) + \varepsilon\eta_1(T_0, T_1) + \dots, \tag{7}$$

$$\eta_\tau(t, \varepsilon) = \eta_{0\tau}(T_0, T_1) + \varepsilon\eta_{1\tau}(T_0, T_1) + \dots, \tag{8}$$

$$\theta(t, \varepsilon) = \theta_0(T_0, T_1) + \varepsilon\theta_1(T_0, T_1) + \dots \tag{9}$$

的形式. 其中 $T_n = \varepsilon^n t, n = 0, 1, 2, \dots$ 是引进的一些新的自变量,因此关于 t 的导数变成关于 T_n 的偏导数,可以表示为

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots, \tag{10}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots, \tag{11}$$

其中, $D_k = \frac{\partial}{\partial T_k}, k = 0, 1$.

将方程(7)–(11)代入方程(5)和(6)式,并使

ε 同次幂的系数相等,得到 ε^1

$$D_0^2 \eta_0 + \Omega_1^2 \eta_0 = 0, \quad (12)$$

$$D_0^2 \theta_0 + \Omega_2^2 \theta_0 = 0, \quad (13)$$

ε^2 :

$$D_0^2 \eta_1 + \Omega_1^2 \eta_1 = -2D_0 D_1 \eta_0 - G_1 D_0 \eta_0 - G_2 [\theta_0 D_0^2 \theta_0 + (D_0 \theta_0)^2] + G_3 \cos(\Omega t) + H_3 (\eta_{0\tau} - \eta_0), \quad (14)$$

$$D_0^2 \theta_1 + \Omega_2^2 \theta_1 = -2D_0 D_1 \theta_0 - H_1 D_0 \theta_0 - H_2 \theta_0 D_0^2 \eta_0. \quad (15)$$

方程(12)和(13)的通解可以表示为

$$\eta_0 = A_1(T_1) e^{i\Omega_1 T_0} + cc, \quad (16)$$

$$\theta_0 = A_2(T_1) e^{i\Omega_2 T_0} + cc, \quad (17)$$

其中, $A_1(T_1), A_2(T_1)$ 是未确定的函数, $i = \sqrt{-1}$, cc 代表前面各项的共轭复数.

外激励项和时滞项可以表示为如下的复数形式:

$$G_3 \cos(\Omega T_0) = \frac{1}{2} G_3 e^{i\Omega T_0} + cc, \quad (18)$$

$$\eta_{0\tau} = A_{1\tau}(T_1) e^{i\Omega_1(T_0-\tau)} + cc. \quad (19)$$

在假设 τ 和 ε 都很小的条件下, $A_{1\tau}$ 可以按照泰勒级数展开^[15] 成以下的形式:

$$A_{1\tau} = A_1(T_1 - \varepsilon\tau) = A_1(T_1) - \varepsilon\tau A_1'(T_1) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \tau^2 A_1''(T_1) + \dots \quad (20)$$

将方程(16)——(20)代入方程(14)和(15)式中得到

$$D_0^2 \eta_1 + \Omega_1^2 \eta_1 = -i\Omega_1(2A_1' + G_1 A_1) e^{i\Omega_1 T_0} + \frac{1}{2} G_3 e^{i\Omega T_0} + 2G_2 \Omega_2^2 A_2^2 e^{i2\Omega_2 T_0} + H_3 A_1 e^{i\Omega_1(T_0-\tau)} + 2G_2 \Omega_2^2 A_2^2 e^{i2\Omega_2 T_0} + H_3 A_1 e^{i\Omega_1(T_0-\tau)}, \quad (21)$$

$$D_0^2 \theta_1 + \Omega_2^2 \theta_1 = -i\Omega_2(2A_2' + H_1 A_2) e^{i\Omega_2 T_0} + H_2 \Omega_1^2 A_1 A_2 e^{i(\Omega_1+\Omega_2)T_0} + H_2 \Omega_1^2 A_1 \bar{A}_2 e^{i(\Omega_1-\Omega_2)T_0} + cc, \quad (22)$$

其中, $(\cdot)' \equiv \partial(\cdot)/\partial T_1 = \partial(\cdot)/\partial(\varepsilon t)$.

考虑主共振和 1:2 内共振同时发生时减振系统的动力学行为, 引进解谐参数 σ_1 和 σ_2 表示偏差值. 其中 σ_1 表示主共振偏差, 与系统的减振频带有关; σ_2 表示内共振偏差值, 与制造和控制等技术有关,

$$\Omega = \Omega_1 + \varepsilon\sigma_1, \quad (23)$$

$$\Omega_1 = 2\Omega_2 - \varepsilon\sigma_2. \quad (24)$$

考虑方程(23)和(24), 得到方程(21)和(22)的可解性条件

$$-i\Omega_1(2A_1' + G_1 A_1) + \frac{1}{2} G_3 e^{i\sigma_1 T_1} + 2G_2 \Omega_2^2 A_2^2 e^{i\sigma_2 T_1} + H_3 A_1 e^{-i\Omega_1 \tau} - H_3 A_1 = 0, \quad (25)$$

$$-i\Omega_2(2A_2' + H_1 A_2) + H_2 \Omega_1^2 A_1 \bar{A}_2 e^{-i\sigma_2 T_1} = 0. \quad (26)$$

方程组(25)和(26)的解可以写成如下的形式:

$$A_1(T_1) = \frac{1}{2} a_1(T_1) e^{i\theta_1(T_1)}, \quad (27)$$

$$A_2(T_1) = \frac{1}{2} a_2(T_1) e^{i\theta_2(T_1)}. \quad (28)$$

将(27)和(28)式代入方程(25)和(26), 并将得到的结果实部和虚部分开, 得到

$$a_1' = \frac{1}{2\Omega_1} G_3 \sin\phi_1 - \frac{1}{2} G_1 a_1 - \frac{1}{2\Omega_1} G_2 \Omega_2^2 a_2^2 \sin\phi_2 - \frac{1}{2\Omega_1} H_3 a_1 \sin(\Omega_1 \tau), \quad (29)$$

$$a_1 \phi_1' = a_1 \sigma_1 + \frac{1}{2\Omega_1} G_3 \cos\phi_1 + \frac{1}{2\Omega_1} G_2 \Omega_2^2 a_2^2 \cos\phi_2 + \frac{1}{2\Omega_1} H_3 a_1 \cos(\Omega_1 \tau) - \frac{1}{2\Omega_1} H_3 a_1, \quad (30)$$

$$a_2' = -\frac{1}{2} H_1 a_2 + \frac{1}{4\Omega_2} H_2 \Omega_1^2 a_1 a_2 \sin\phi_2, \quad (31)$$

$$a_2 \frac{\phi_1' + \phi_2'}{2} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) a_2 + \frac{1}{4\Omega_2} H_2 \Omega_1^2 a_1 a_2 \cos\phi_2, \quad (32)$$

其中, $\phi_1 = \sigma_1 T_1 - \theta_1$, $\phi_2 = \theta_1 - 2\theta_2 - \sigma_2 T_1$.

4. 平衡解及稳定分析

系统的稳态运动对应方程组(29)——(32)中 $a_1' = a_2' = \phi_1' = \phi_2' = 0$ 时的平衡解, 存在下列两类平衡解.

1) 耦合模态解

$$a_1 = \frac{2\Omega_2 \sqrt{H_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_1)^2}}{H_2 \Omega_1^2},$$

$$a_2 = \sqrt{-b \pm \sqrt{b^2 - c}}. \quad (33)$$

2) 单模态解

$$a_1 = \frac{G_3}{2\Omega_1} \left\{ \left[\frac{1}{2}G_1 + \frac{1}{2\Omega_1}H_3\sin(\Omega_1\tau) \right]^2 + \left[\frac{1}{2\Omega_1}H_3 - \frac{1}{2\Omega_1}H_3\cos(\Omega_1\tau) - \sigma_1 \right]^2 \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$a_2 = 0, \tag{34}$$

其中

$$b = \frac{4}{G_2H_2\Omega_1\Omega_2} \left\{ H_1 \left[\frac{1}{2}G_1 + \frac{1}{2\Omega_1}H_3\sin(\Omega_1\tau) \right] + (\sigma_1 - \sigma_2) \left[\frac{1}{2\Omega_1}H_3 - \frac{1}{2\Omega_1}H_3\cos(\Omega_1\tau) - \sigma_1 \right] \right\}, \tag{35}$$

$$c = \frac{16[H_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_1)^2]}{H_2^2G_2^2\Omega_1^2\Omega_2^2} \times \left\{ \left[\frac{1}{2}G_1 + \frac{1}{2\Omega_1}H_3\sin(\Omega_1\tau) \right]^2 + \left[\frac{1}{2\Omega_1}H_3 - \frac{1}{2\Omega_1}H_3\cos(\Omega_1\tau) - \sigma_1 \right]^2 \right\} - \frac{G_3^2}{G_2^2\Omega_2^2}. \tag{36}$$

为了确定系统平衡解的稳定性, 将方程组(29)——(32)转化到直角坐标系下

$$p_1' = \frac{1}{\Omega_1} \left[-\frac{1}{2}G_1p_1\Omega_1 - \sigma_1\Omega_1q_1 - G_2\Omega_2^2p_2q_2 + \frac{1}{2}H_3q_1 - \frac{1}{2}H_3\sin(\Omega_1\tau)p_1 - \frac{1}{2}H_3\cos(\Omega_1\tau)q_1 \right], \tag{37}$$

$$q_1' = \frac{1}{\Omega_1} \left[\frac{1}{2}G_3 - \frac{1}{2}\Omega_1G_1q_1 + \sigma_1\Omega_1p_1 - \frac{1}{2}H_3p_1 + \frac{1}{2}G_2\Omega_2^2(p_2^2 - q_2^2) - \frac{1}{2}H_3\sin(\Omega_1\tau)q_1 + \frac{1}{2}H_3\cos(\Omega_1\tau)p_1 \right], \tag{38}$$

$$p_2' = \frac{1}{\Omega_2} \left[-\frac{1}{2}H_1\Omega_2p_2 - \frac{1}{2}\Omega_2(\sigma_1 - \sigma_2)q_2 + \frac{1}{4}H_2\Omega_1^2(p_1q_2 - q_1p_2) \right], \tag{39}$$

$$q_2' = \frac{1}{\Omega_2} \left[-\frac{1}{2}H_1\Omega_2q_2 + \frac{1}{2}\Omega_2(\sigma_1 - \sigma_2)p_2 + \frac{1}{4}H_2\Omega_1^2(p_1p_2 + q_1q_2) \right], \tag{40}$$

其中, $p_1 = a_1\cos\phi_1, q_1 = a_1\sin\phi_1, p_2 = a_2\cos\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right), q_2 = a_2\sin\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)$.

为了分析平衡解的稳定性, 对方程组(37)——(40)进行摄动分析, 摄动方程为

$$\{\Delta p_1', \Delta q_1', \Delta p_2', \Delta q_2'\}^T = [J] \{\Delta p_1, \Delta q_1, \Delta p_2, \Delta q_2\}^T, \tag{41}$$

其中, T 代表转置矩阵, [J] 是 Jacobian 矩阵. 对应平衡解的特征方程可以表示为

$$\lambda^4 + \delta_1\lambda^3 + \delta_2\lambda^2 + \delta_3\lambda + \delta_4 = 0, \tag{42}$$

式中 λ 代表矩阵 [J] 的特征值, $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ 和 δ_4 代表特征方程的系数.

用罗斯-霍尔维兹准则去判断方程的稳定性, 得到系统稳定的充分和必要条件

$$\delta_1 > 0, \delta_1\delta_2 - \delta_3 > 0, \delta_3(\delta_1\delta_2 - \delta_3) - \delta_1^2\delta_4 > 0, \delta_4 > 0. \tag{43}$$

方程(3)和(4)的平衡解稳定的充分和必要条件是特征方程(42)的所有特征根的实部都是负数; 如果有一个特征根的实部是正数则方程(3)和(4)的平衡解就是不稳定的. 如果有特征根的实部改变符号, 则系统可能发生鞍结分岔, 导致跳跃现象出现. 如果有一对复数特征根的实部改变符号, 系统可能出现 Hopf 分岔, 导致系统出现概周期等复杂运动.

5. 饱和控制及其范围分析

通过上节对平衡解的分析可以断定, 系统可能存在单模态和耦合模态两种运动状态. 图 2 给出了内共振解谐参数 $\sigma_2 = -0.30$ 时原始的无时滞系统的幅频响应曲线, 图中 SN_i 代表鞍结分岔点, PF_i 代表叉形分岔点, HB_i 代表 Hopf 分岔点. 空心点线代表稳定解, 实线代表不稳定的焦点, 星号线代表其他类型不稳定的解. 图 2 中无量纲参数选择为 $\Omega_1 = 0.90, H_1 = 0.10, H_2 = 1.00, H_3 = 0, G_1 = 0.10, G_2 = 0.09$ (即, 次系统质量与主系统质量之比 $R = 0.1$), $G_3 = 0.10$.

在图 2 中可以将系统的运动状态分为 4 个区域. 首先, 当外共振解谐参数 σ_1 在鞍结分岔点 SN_1 之前或在 SN_2 之后的区域变化时, 系统处于稳定的单模态运动状态. 其次, 当 σ_1 在 $[SN_1, PF_1]$ 或 $[PF_2, SN_2]$ 区域变化时, 视初始条件不同系统可能是稳定的单模态运动或者是不稳定运动. 当初始条件比较小时, 系统是稳定的单模态运动; 当初始条件较大

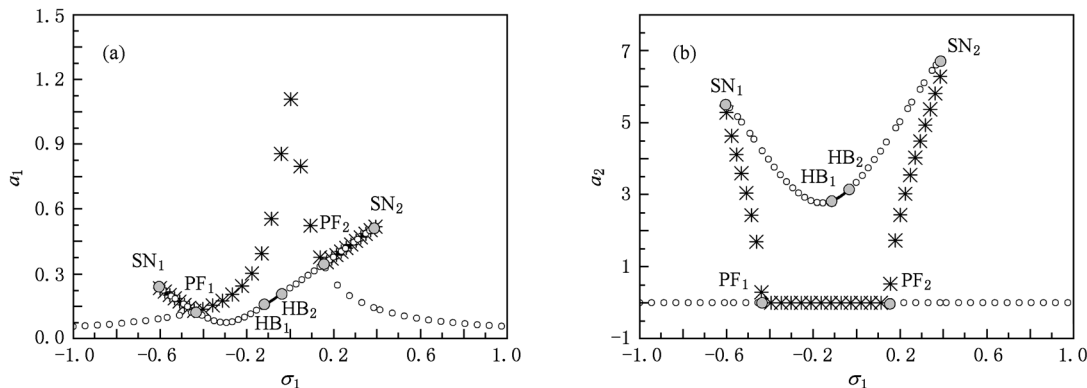


图2 $\sigma_2 = -0.30$ 时的幅频响应曲线 (a)主系统;(b)次系统

时,系统是不稳定运动.再次,当 σ_1 在 $[PF_1, HB_1]$ 或 $[HB_2, PF_2]$ 区域变化时,视初始条件不同系统可能是稳定的饱和运动或者是不稳定运动.当初始条件比较小时,系统是稳定的饱和运动;当初始条件较大时,系统是不稳定运动.最后,当 σ_1 在 $[HB_1, HB_2]$ 区域变化时,系统处于不稳定运动状态.

为了研究解谐参数 σ_1 和 σ_2 对系统动力学行为的影响,图3给出了 σ_1 - σ_2 平面上的分岔曲线.

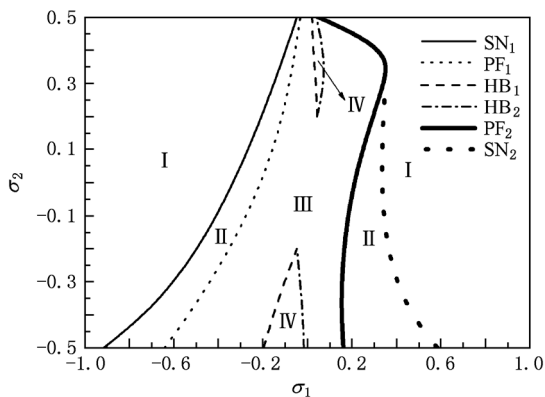


图3 σ_1 - σ_2 平面的分岔曲线

从图3可以看出,分岔曲线将 σ_1 - σ_2 平面分成了4个部分,分别标识为I, II, III和IV.当参数选择在I区域内时,系统是稳定的单模态运动.当参数选择在II区域内时,系统可能是稳定的单模态运动或者是不稳定运动,这要视系统的初始条件来判断系统的运动状态.当参数选择在III区域内时,系统可能是稳定的饱和运动或者是不稳定运动,这要视系统的初始条件来判断系统的运动状态.当参数选择在IV区域时,系统是不稳定运动.

考虑到工程中由于制造和控制等技术原因不

可避免的会产生内共振解谐参数,但是内共振解谐参数一般也不会太大,文章主要考虑内共振解谐参数 $\sigma_2 \in [-0.30, 0.30]$ 范围变化时对系统饱和控制的影响,超出该范围的讨论没有实际的物理意义.根据研究需要文章采用文献[16]定义的控制器的有效减振频带为系统能够实现饱和控制时,与外共振有关的解谐参数 σ_1 的范围,本文中即是 $\sigma_1 \in [PF_1, PF_2]$ 的范围.

由图3可以看出,内共振解谐参数 $\sigma_2 \in [-0.20, 0.20]$ 范围变化时,饱和控制的减振频带分布在主共振点 $\sigma_1 = 0$ 附近,而且具有一定的宽度,说明该范围内饱和控制的减振频带分布比较合理.但是从图2的幅频响应曲线中可以看出,饱和控制时主系统的振幅还是比较大.因此,在该范围内我们主要应该考虑要采用时滞反馈控制进一步减小主系统的振幅.该项工作已经在另一篇论文中进行了讨论.

从图3还可以看出,内共振解谐参数 $\sigma_2 \in [-0.30, -0.20]$ 和 $\sigma_2 \in [0.20, 0.30]$ 范围变化时,饱和控制的减振频带具有一定的宽度,但是出现了不稳定范围,分布不合理.所以,在该范围内我们主要应该考虑采用时滞反馈控制来消除减振频带中的不稳定部分,这项工作本文研究的重点.下面,讨论采用时滞反馈来控制饱和控制的减振频带分布问题.

6. 时滞反馈控制减振频带分布分析

在图3中以 $\sigma_2 = -0.30$ 为例,考虑反馈增益系数和时滞两参数对饱和控制减振频带分布的影响.图4给出了反馈增益系数 $H_3 \in [0, 1.00]$,时滞 $\tau \in$

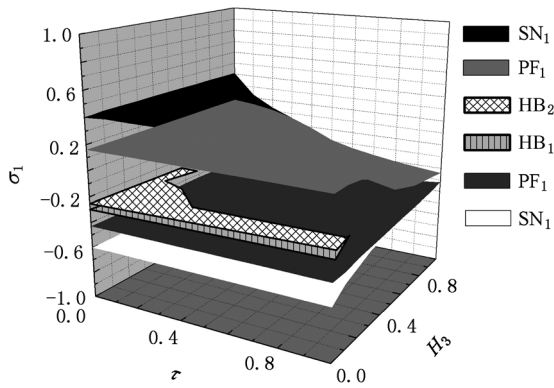


图4 时滞和反馈增益系数对饱和控制减振频带的影响

[0, 1.00] 调节时的分岔曲面图。

图4中当时滞 $\tau = 0$ 时,该图就退化为图3分岔分布曲线中 $\sigma_2 = -0.30$ 时对应的点. 图4中叉形分岔 PF_1 和 PF_2 两三维曲面之间的部分代表饱和控制的减振频带, Hopf分岔 HB_1 和 HB_2 两三维曲面之间的部分代表不稳定控制范围. 因此,通过调节反馈增益系数和时滞两参数可以消除饱和控制减振频带中的不稳定部分. 为了更加清楚的观察反馈增益系数和时滞两参数对饱和和控制减振频带的影响规律,文章以反馈增益系数 $H_3 = 0.10, H_3 = 0.30, H_3 = 0.60$ 和 $H_3 = 1.00$ 为例,将图4投影到 $\sigma_1-\tau$ 平面上,其二维平面图显示为图5.

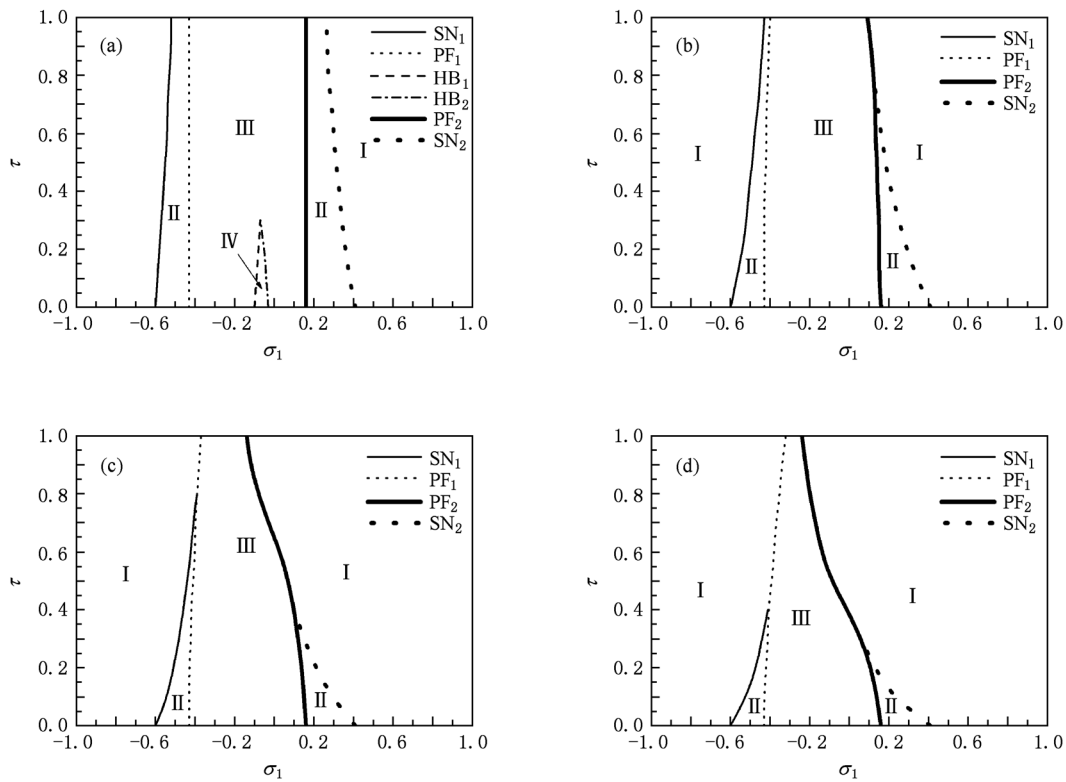


图5 $\sigma_1-\tau$ 平面的分岔曲线 (a) $H_3 = 0.10$; (b) $H_3 = 0.30$; (c) $H_3 = 0.60$; (d) $H_3 = 1.00$

图5(a)是 $H_3 = 0.10$ 时的分岔曲线. 从图中可以看到,随着时滞的不断增大两个鞍结分岔点 SN_1 和 SN_2 逐渐向共振点靠近,从而使得区域 II 的范围不断缩小. 随着时滞的不断增大两个 Hopf 分岔点 HB_1 和 HB_2 也逐渐向共振点靠近,这使得区域 IV 的范围也不断缩小. 并且当时滞增大到 0.30 时两个 Hopf 分岔点 HB_1 和 HB_2 相碰后即消失,从而消除了不稳定的范围. 但时滞对两个叉形分岔点 PF_1 和 PF_2 没有任何影响. 从图中可以看到,当时滞超过 0.30

时,由于两个 Hopf 分岔点消失而两个叉形分岔点 PF_1 和 PF_2 没有变化,所以饱和控制的范围增大了. 当反馈增益系数 $H_3 = 0.10$ 时,可以在 $\tau \in (0.30, 1.00]$ 的范围内选择时滞参数,以消除饱和控制的不稳定区域,从而达到增大饱和和控制范围的目的.

图5(b)是 $H_3 = 0.30$ 时的分岔曲线. 从图中可以看到,随着时滞的不断增大两个鞍结分岔点 SN_1 和 SN_2 逐渐向共振点靠近,从而使得区域 II 的范围不断缩小. 当时滞达到 $\tau = 0.80$ 时由于鞍结分岔点

SN₂ 与叉形分岔点 PF₂ 相碰,使得鞍结分岔点 SN₂ 消失.我们还发现,当时滞 $\tau \neq 0$ 时两个 Hopf 分岔点 HB₁ 和 HB₂ 就消失了,从而消除了饱和控制的不稳定区域.时滞对两个叉形分岔点 PF₁ 和 PF₂ 的影响很小,随着时滞的不断增大两个叉形分岔点 PF₁ 和 PF₂ 稍微向共振点靠近了一点.所以,当反馈增益系数 $H_3 = 0.30$ 时,可以在 $\tau \in (0, 0.30]$ 的范围内选择时滞参数,一方面消除饱和控制的不稳定区域,另一方面考虑到饱和控制的减振频带宽度.

图 5(c) 是 $H_3 = 0.60$ 时的分岔曲线.从图中可以看到,随着时滞的不断增大两个鞍结分岔点 SN₁ 和 SN₂ 向共振点方向靠近的程度越来越大,区域 II 的范围也变得更小.当时滞达到 $\tau = 0.40$ 时,由于鞍结分岔点 SN₂ 与叉形分岔点 PF₂ 相碰,使得鞍结分岔点 SN₂ 消失.当时滞达到 $\tau = 0.80$ 时,由于鞍结分岔点 SN₁ 与叉形分岔点 PF₁ 相碰,使得鞍结分岔点 SN₁ 消失.同样地,当时滞 $\tau \neq 0$ 时两个 Hopf 分岔点 HB₁ 和 HB₂ 就消失了,消除了饱和控制的不稳定区域.时滞对两个叉形分岔点 PF₁ 和 PF₂ 的影响也不断增大,随着时滞的不断增大两个叉形分岔点 PF₁ 和 PF₂ 向共振点靠近的程度也越明显.所以,当反馈增益系数 $H_3 = 0.60$ 时,可以在 $\tau \in (0, 0.20]$ 的范围内选择时滞参数,一方面消除饱和控制的不稳定区域,另一方面考虑到饱和控制的减振频带宽度.

图 5(d) 是 $H_3 = 1.00$ 时的分岔曲线.从图中可以看到,随着时滞的不断增大两个鞍结分岔点 SN₁, SN₂ 以及两个叉形分岔点 PF₁, PF₂ 向共振点方向靠近的程度越来越大,区域 II 和区域 III 的范围也都变得更小.当时滞达到 $\tau = 0.30$ 时,由于鞍结分岔点 SN₂ 与叉形分岔点 PF₂ 相碰,使得鞍结分岔点 SN₂ 消失.当时滞达到 $\tau = 0.40$ 时,由于鞍结分岔点 SN₁ 与叉形分岔点 PF₁ 相碰,使得鞍结分岔点 SN₁ 也消失了.同样也观察到,当时滞 $\tau \neq 0$ 时两个 Hopf 分岔点 HB₁ 和 HB₂ 就消失了,消除了饱和控制的不稳定区域.所以,当反馈增益系数 $H_3 = 1.00$ 时,可以在 $\tau \in (0, 0.10]$ 的范围内选择时滞参数,一方面消除饱和控制的不稳定区域,另一方面考虑到饱和控制的减振频带宽度.

综合分析图 5(a) 至图 5(d) 会发现,可以根据不同反馈增益系数下获得的分岔曲线图适当的调节时滞量,以消除饱和控制的不稳定区域,同时兼顾减振频带的宽度.研究还发现,当反馈增益系数和时滞量两参数都逐渐增大时,饱和控制的减振频

带宽度也逐渐变窄.因此,我们的控制目标是:一方面,通过调节反馈增益系数和时滞量两参数以消除饱和控制的不稳定区域.另一方面,尽量保证饱和控制的减振频带宽度不变窄.

图 6 给出了不同反馈增益系数下通过适当调节时滞量获得的一组减振频带宽度的分布图.图中阴影部分代表减振频带的宽度.

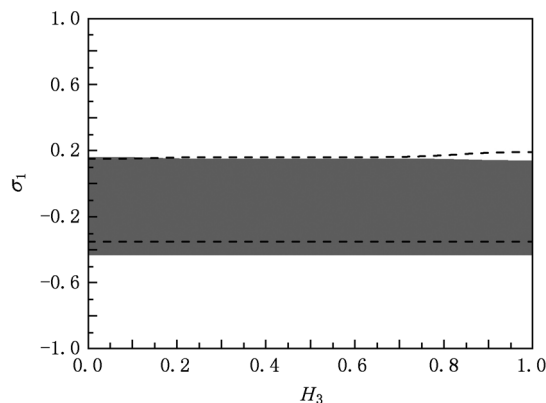


图 6 减振频带分布图

图 6 中反馈增益系数 H_3 依次为: 0.00, 0.10, 0.20, 0.30, 0.40, 0.50, 0.60, 0.70, 0.80, 0.90, 1.00; 对应的时滞量 τ 依次为: 0.00, 0.40, 0.30, 0.20, 0.10, 0.08, 0.06, 0.05, 0.04, 0.03, 0.02.

为了定量的验证图 4 和图 5 中解析结果的可靠性,在方程(5)和(6)的基础上进行了数值模拟,对应的数值结果以虚线的形式显示在图 6 中.其中初始条件选择为 $\eta(0) = \theta(0) = 10^{-4}$, $\dot{\eta}(0) = \dot{\theta}(0) = 10^{-4}$, 当 $t \in [-\tau, 0]$ 时 $\eta(t) = \theta(t) = 10^{-4}$, $\dot{\eta}(t) = \dot{\theta}(t) = 10^{-4}$.从图 6 中可以看出,解析结果和数值模拟的结果符合的比较好,这也说明在此基础上得到的结论是可靠的.

对比图 3 和图 6 能够发现,通过适当的调节反馈增益系数和时滞量两参数能够消除饱和控制减振频带中的不稳定区域.而且,只要合理选择这两个可控参数可尽量使饱和和控制减振频带的宽度不变窄.这与我们预期的控制目标是一致的.

7. 结 论

本文主要研究采用时滞反馈控制自参数振动系统中由于内共振解谐参数引起的饱和控制的减振频带分布不合理的问题.文章分别考虑反馈增益

系数和时滞量两参数对饱和控制减振频带分布规律的影响,得到以下一些结论: 1) 在原始的无时滞减振系统中,由于内共振解谐参数的存在,使得在某些内共振解谐参数范围内饱和控制的减振频带出现不稳定区域. 2) 通过采用时滞反馈可以消除饱和控制减振频带中的不稳定区域. 3) 针对不同的反

馈增益系数适当的调节时滞量可以消除饱和控制减振频带中的不稳定区域,同时也尽量保证饱和控制减振频带的宽度不变窄.

感谢同济大学航空航天与力学学院徐鉴教授的建议讨论.

-
- [1] Nayfeh A, Mook D, Marshall L 1973 *Journal of Hydraulics* **7** 145
- [2] Haddow A, Barr A, Mook D 1984 *Journal of Sound and Vibration* **97** 451
- [3] Banerjee B, Bajaj A K, Davies P 1993 *International Journal of Non-linear Mechanics* **31** 21
- [4] Bajaj A K, Chang S I, Johnson M J 1994 *Nonlinear Dynamics* **5** 433
- [5] Song Y, Sato H, Iwata Y, Komatsuzaki T 2003 *Journal of Sound and Vibration* **259** 747
- [6] Wang H P, Li J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 2504 (in Chinese) [王洪坡、李杰 2007 物理学报 **56** 2504]
- [7] Qian C Z, Tang J S 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 617 (in Chinese) [钱长照、唐驾时 2006 物理学报 **55** 617]
- [8] Liu S, Liu B, Zhang Y K, Wen Y 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 38 (in Chinese) [刘爽、刘彬、张业宽、闻岩 2010 物理学报 **59** 38]
- [9] Olgac N, Holm-Hansen B T 1996 *Journal of Sound and Vibration* **176** 93
- [10] Olgac N, Jalili N 1998 *Journal of Sound and Vibration* **218** 307
- [11] Jalili N, Olgac N 1999 *Journal of Sound and Vibration* **223** 567
- [12] Filipovic D, Olgac N 2002 *Mechatronics* **12** 393
- [13] Zhao Y Y, Xu J 2007 *Journal of Sound and Vibration* **308** 212
- [14] Zhao Y Y, Xu J, Yan Z G 2010 *Acta Mechanica Sinica* **42** 747 (in Chinese) [赵艳影、徐鉴、严志刚 2010 力学学报 **42** 747]
- [15] Wirkus S, Rand R 2002 *Nonlinear Dynamics* **30** 205
- [16] Pai P, Schulz M 2000 *International Journal of Mechanical Sciences* **42** 537

Using delayed feedback to control the band of saturation control in an auto-parametric dynamical system*

Zhao Yan-Ying[†] Yang Ru-Ming

(School of Aircraft Engineering, Nanchang Hangkong University, Nanchang 330063, China)

(Received 10 September 2010; revised manuscript received 30 December 2010)

Abstract

We investigate the band of the saturation control in an auto-parametric dynamical system by using the delayed feedback. In an original system without delay feedback, some unstable regions may occur in the band of the saturation control for some internal resonance detuning parameters. The band of the saturation control is distributed unreasonably. The delay feedback control is used to control the distribution of the band for saturation control. The effects of the gain and delay on the band of the saturation control are studied. The results show that the unstable regions of the saturation control can be eliminated by choosing the values of the gain and delay appropriately. Moreover, the bandwidth of the saturation control does not narrow. Consequently, the distribution band of the saturation control can be improved by using the delay feedback control.

Keywords: delay, saturation control, feedback, internal resonance detuning

PACS: 43.40.Vn, 43.40.Ga

* Project supported by the Young Scientists Fund of National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10802035).

[†] E-mail: yanyingzhao@163.com