物 理 学 报 Acta Phys. Sin. Vol. 60, No. 11 (2011) 110203

一类带自相容源的 sine-Gordon 方程新的显式精确解*

苏 军[1)†] 徐 伟[1)] 段东海[2)] 徐根玖[1)]

1)(西北工业大学理学院,西安 710072)

2)(渭南师范学院数学与信息科学学院 渭南 714000)

(2011 年 1 月 13 日收到;2011 年 6 月 3 日收到修改稿)

文章研究了一类带自相容源的 sine-Gordon 方程(SGESCSs),利用广义双 Darboux 变换法,得到了该方程的 complexiton 解,进一步丰富了这类方程的解.

关键词: sine-Gordon 方程, 自相容源, 广义双 Darboux 变换, complexiton 解

PACS: 02. 30. Ik, 05. 45. Yv

1. 引 言

近年来,带自相容源的孤子方程越来越受到了大家的关注. 众所周知,带自相容源的孤子方程在固体物理、等离子物理、流体力学等领域有着广泛应用,这类方程可以描述变速运动的孤立波,也可以描述不同孤立波之间的相互作用. 文献[1,2]研究了带自相容源的 KdV 方程,其描述了等离子体中高频波包和一个低频波的相互作用. 而带自相容源的 KP 方程[3,4]描述了一个长波和一个短波包在 x-y 平面沿着某一角度传播时的相互作用. 文献[5]讨论了一类带自相容源的非线性 Schrödinger 方程,它既可以描述孤立波在有可共振和不可共振介质的媒介中的传播过程,也可以描述等离子体中高频静电波与离子声波之间的相互作用[6,7]. 目前,关于带自相容源的孤子方程,已经出现了一些丰富的研究成果,其求解方法主要有 $\bar{\partial}$-方法[2]、逆散射方法[5,8]、双 Darboux 变换法[9—14]、源生成方法[15—18]、Hirota 双线性方法和 Wronskian 技巧[19—24]等. 利用这些方法可以得到很多带自相容源的孤子方程的不同种类的解,例如孤子解、有理解、呼吸子解,还有 positon 解、negaton 解和 complexiton 解.

对于 Sine-Gordon 方程,文献[25—33]做了大量的研究. 而对于带自相容源的 sine-Gordon 方程(SGESCSs 方程)研究还鲜为少见,本文试图讨论一类 SGESCSs 方程

$$u_{xt}-\sin u-2\sum_{j=1}^{n}(\varphi_{1j}^2+\varphi_{2j}^2)_x=0, \tag{1}$$

$$\varphi_{1j,x}=-\lambda_j\varphi_{1j}+\frac{u_x}{2}\varphi_{2j},$$

$$\varphi_{2j,x}=-\frac{u_x}{2}\varphi_{1j}+\lambda_j\varphi_{2j},\quad j=1,2,\cdots,n. \tag{2}$$

其中 $\varphi_j=(\varphi_{1j},\varphi_{2j})^{\mathrm{T}}, j=1,2,\cdots,n$, λ_j 是常数. Zhang 等[17]利用 Hirota 方法和 Wronskian 技巧得到了该方程的 N-孤子解. 该方程是否存在其他显式精确解? 本文得到了肯定的答案,当其 Schrödinger 谱问题所对应的谱参数为复数时,利用广义双 Darboux 变换法,得到了该方程的 complexiton 解.

2. SGESCSs 方程的广义双 Darboux 变换

为了找到 SGESCSs 方程的 complexiton 解,下面给定带 $2n$ 个自相容源的 sine-Gordon 方程

$$u_{xt}-\sin u-2\sum_{j=1}^{n}[(\varphi_{1j}^2+\varphi_{2j}^2)_x+(\bar{\varphi}_{1j}^2+\bar{\varphi}_{2j}^2)_x]=0, \tag{3}$$

* 国家自然科学基金(批准号:10932009, 10872165, 11002110)和陕西省自然科学基础研究计划(批准号:2010JQ1015)资助的课题.

† E-mail: junsu@ mail. nwpu. edu. cn

$$\varphi_{1j,x}=-\lambda_j\varphi_{1j}+\frac{u_x}{2}\varphi_{2j},$$
$$\varphi_{2j,x}=-\frac{u_x}{2}\varphi_{1j}+\lambda_j\varphi_{2j},$$
$$j=1,2,\cdots,n,\tag{4}$$
$$\bar\varphi_{1j,x}=-\bar\lambda_j\bar\varphi_{1j}+\frac{u_x}{2}\bar\varphi_{2j},$$
$$\bar\varphi_{2j,x}=-\frac{u_x}{2}\bar\varphi_{1j}+\bar\lambda_j\bar\varphi_{2j},$$
$$j=1,2,\cdots,n.\tag{5}$$

其中 $\bar\lambda_j,\bar\varphi_{1j}$ 和 $\bar\varphi_{2j}$ 分别是 λ_j,φ_{1j} 和 φ_{2j} 的共轭,并设

$$\lambda_j=\alpha_j+\mathrm{i}\beta_j,\varphi_{1j}=\varphi_{1j}^{(1)}+\mathrm{i}\varphi_{1j}^{(2)},$$
$$\varphi_{2j}=\varphi_{2j}^{(1)}+\mathrm{i}\varphi_{2j}^{(2)},$$
$$j=1,2,\cdots,n.\tag{6}$$

其中 $\alpha_j,\beta_j\neq0,\varphi_{1j}^{(1)},\varphi_{1j}^{(2)},\varphi_{2j}^{(1)}$ 和 $\varphi_{2j}^{(2)}$ 都是实数. 因此,(3)—(5)式等价于下面的实系统

$$u_{tx}-\sin u-4\sum_{j=1}^{n}([(\varphi_{1j}^{(1)})^2+(\varphi_{2j}^{(1)})^2]$$
$$-[(\varphi_{1j}^{(2)})^2+(\varphi_{2j}^{(2)})^2])_x=0,\tag{7}$$
$$\varphi_{1j,x}^{(1)}+\alpha_j\varphi_{1j}^{(1)}-\beta_j\varphi_{1j}^{(2)}-\frac{u_x}{2}\varphi_{2j}^{(1)}=0,$$
$$\varphi_{1j,x}^{(2)}+\alpha_j\varphi_{1j}^{(2)}+\beta_j\varphi_{1j}^{(1)}-\frac{u_x}{2}\varphi_{2j}^{(1)}=0,$$
$$j=1,2,\cdots,n,\tag{8}$$
$$\varphi_{2j,x}^{(1)}+\frac{u_x}{2}\varphi_{1j}^{(1)}-\alpha_j\varphi_{2j}^{(1)}+\beta_j\varphi_{2j}^{(2)}=0,$$
$$\varphi_{2j,x}^{(2)}+\frac{u_x}{2}\varphi_{1j}^{(2)}-\alpha_j\varphi_{2j}^{(2)}-\beta_j\varphi_{2j}^{(1)}=0,$$
$$j=1,2,\cdots,n.\tag{9}$$

首先,我们定义一个线性映射

$$S:\begin{pmatrix}\varphi_{1j}\\\varphi_{2j}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\varphi_{2j}\\\varphi_{1j}\end{pmatrix}.\tag{10}$$

方程(7)—(9)相应的 Lax 对如下所示:

$$\Phi_x=\begin{pmatrix}-\lambda & \frac{u_x}{2}\\ -\frac{u_x}{2} & \lambda\end{pmatrix}\Phi,\tag{11}$$

$$\Phi_t=V(\lambda,u)\Phi+\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{H(\varphi_j)}{\lambda-\lambda_j}+\frac{G(\varphi_j)}{\lambda+\lambda_j}\right]\Phi$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{H(\bar\varphi_j)}{\lambda-\bar\lambda_j}+\frac{G(\bar\varphi_j)}{\lambda+\bar\lambda_j}\right],$$
$$j=1,2,\cdots,n.\tag{12}$$

其中

$$V(\lambda,u)=\begin{pmatrix}\frac14\lambda^{-1}(\partial^{-1}u_x^2+1) & \frac14\lambda^{-1}u_x\\ \frac14\lambda^{-1}u_x & -\frac14\lambda^{-1}(\partial^{-1}u_x^2+1)\end{pmatrix},\tag{13}$$

$$H(\varphi_j)=\begin{pmatrix}\frac12u\lambda_j(\varphi_{2j}^2-\varphi_{1j}^2) & -\lambda_j\varphi_{1j}^2\\ -\lambda_j\varphi_{1j}^2 & \frac12u\lambda_j(\varphi_{2j}^2-\varphi_{1j}^2)\end{pmatrix},$$
$$j=1,2,\cdots,n,\tag{14}$$

$$G(\varphi_j)=\begin{pmatrix}\frac12u\lambda_j(\varphi_{2j}^2-\varphi_{1j}^2) & \lambda_j\varphi_{2j}^2\\ -\lambda_j\varphi_{1j}^2 & -\frac12u\lambda_j(\varphi_{2j}^2-\varphi_{1j}^2)\end{pmatrix},$$
$$j=1,2,\cdots,n.\tag{15}$$

且 $\phi=\begin{pmatrix}\phi_1\\\phi_2\end{pmatrix}$ 是(11)—(15)式对应于谱参数 λ 的解.

为了获得 SGESCSs 包含任意 t-函数的广义双 Darboux 变换,定义如下对称形式. 假设 $f_j=\begin{pmatrix}f_{1j}\\f_{2j}\end{pmatrix}(j=1,\cdots,N)$ 是系统(11)—(15)式分别对应于谱参数 $\lambda=\lambda_j(j=1,\cdots,N)$ 的不同解. ϕ 是一个标量, $e_1(t),\cdots,e_N(t)$ 是一组 N 个任意 t-函数, 那么定义 W_0,W_1,W_2 如下:

$$W_0(\{e_1,f_1\},\cdots,\{e_N,f_N\})=\det F,$$
$$W_1^{(i)}(\{e_1,f_1\},\cdots,\{e_N,f_N\};h)$$
$$=\det\begin{pmatrix}F & b\\ \alpha_i & h_i\end{pmatrix},i=1,2,$$
$$W_1(\{e_1,f_1\},\cdots,\{e_N,f_N\};h)$$
$$=\begin{pmatrix}W_1^{(1)}(\{e_1,f_1\},\cdots,\{e_N,f_N\};h_1)\\ W_1^{(2)}(\{e_1,f_1\},\cdots,\{e_N,f_N\};h_2)\end{pmatrix},$$
$$W_2(\{e_1,f_1\},\cdots,\{e_N,f_N\};\phi)=\det\begin{pmatrix}F & \alpha_1^{\mathrm T}\\ \alpha_1 & \phi\end{pmatrix}.$$

其中

$$F=(\delta_{ij}e_i+\sigma(f_i,f_j))_{N\times N},$$
$$b=(\sigma(f_1,h),\cdots,\sigma(f_N,h))^{\mathrm T},$$
$$\alpha_i=(f_{i1},\cdots,f_{iN}),$$
$$\sigma(f_i,f_j)=-\frac{W(f_i,f_j)}{2(\lambda_i-\lambda_j)},$$
$$\sigma(f_i,f_i)=\frac12W(f_i,\partial_{\lambda_i}f_i),$$
$$W(f_i,f_j)=f_{1i}f_{2j}-f_{2i}f_{1j}.$$

设 $\left(u,\varphi_1^{(k)}=\begin{pmatrix}\varphi_{11}^{(k)}\\ \varphi_{21}^{(k)}\end{pmatrix},\cdots,\varphi_n^{(k)}=\begin{pmatrix}\varphi_{1n}^{(k)}\\ \varphi_{2n}^{(k)}\end{pmatrix}\right)$, $k=1,2$ 是 SGESCSs(3)—(5)式的一个解, $\lambda=\alpha+\mathrm{i}\beta$ 为复数, $e(t)$ 是任意 t-函数, f 是系统(11)—(15)式当 $\lambda=\lambda_{n+1}$ 时的一个解,则 SGESCSs(3)—(5)式关于一个任意 t-函数的广义双 Darboux 变换公式为

$$\tilde{\varphi}=\frac{W_1(\{e,f\},\{e,Sf\},\{\bar e,\bar f\},\{\bar e,S\bar f\};\phi)}{W_0(\{e,f\},\{e,Sf\},\{\bar e,\bar f\},\{\bar e,S\bar f\})},\tag{16}$$

$$\tilde{u}=u+\frac{W_2(\{e,f\},\{e,Sf\},\{\bar e,\bar f\},\{\bar e,S\bar f\};0)}{W_0(\{e,f\},\{e,Sf\},\{\bar e,\bar f\},\{\bar e,S\bar f\})},\tag{17}$$

$$\tilde{\varphi}_j^{(k)}=\frac{W_1(\{e,f\},\{e,Sf\},\{\bar e,\bar f\},\{\bar e,S\bar f\};\varphi_j^{(k)})}{W_0(\{e,f\},\{e,Sf\},\{\bar e,\bar f\},\{\bar e,S\bar f\})},\quad j=1,2,\cdots,n,\quad k=1,2,\tag{18}$$

$$\tilde{\varphi}_{n+1}^{(1)}=\frac{\sqrt{e'}W_1(\{e,f\},\{e,Sf\},\{\bar e,\bar f\},\{\bar e,S\bar f\};f)}{eW_0(\{e,f\},\{e,Sf\},\{\bar e,\bar f\},\{\bar e,S\bar f\})}+\frac{\sqrt{\bar e'}W_1(\{e,f\},\{e,Sf\},\{\bar e,\bar f\},\{\bar e,S\bar f\};f)}{\bar eW_0(\{e,f\},\{e,Sf\},\{\bar e,\bar f\},\{\bar e,S\bar f\})},\tag{19}$$

$$\tilde{\varphi}_{n+1}^{(2)}=\frac{\sqrt{e'}W_1(\{e,f\},\{e,Sf\},\{\bar e,\bar f\},\{\bar e,S\bar f\};f)}{\mathrm{i}eW_0(\{e,f\},\{e,Sf\},\{\bar e,\bar f\},\{\bar e,S\bar f\})}-\frac{\sqrt{\bar e'}W_1(\{e,f\},\{e,Sf\},\{\bar e,\bar f\},\{\bar e,S\bar f\};f)}{\mathrm{i}\bar eW_0(\{e,f\},\{e,Sf\},\{\bar e,\bar f\},\{\bar e,S\bar f\})}.\tag{20}$$

其中 $\bar h$ 是 h 的共轭,且 $\tilde\phi,\tilde u,\tilde\varphi_1^{(k)},\cdots,\tilde\varphi_{n+1}^{(k)}$, $k=1,2$ 满足用 $n+1$ 替换掉 n 的系统(11)—(15)式,所以 $\tilde u$, $\tilde\varphi_1^{(k)},\cdots,\tilde\varphi_{n+1}^{(k)}$, $k=1,2$ 是用 $n+1$ 替换掉 n 的 SGESCSs(3)—(5)式的一个解.

对于 SGESCSs(3)—(5)式,下面给出包含 N 个任意 t-函数的重复 N 次广义双 Darboux 变换公式.

设 $\left(u,\varphi_1^{(k)}=\begin{pmatrix}\varphi_{11}^{(k)}\\ \varphi_{21}^{(k)}\end{pmatrix},\cdots,\varphi_n^{(k)}=\begin{pmatrix}\varphi_{1n}^{(k)}\\ \varphi_{2n}^{(k)}\end{pmatrix}\right)$, $k=1,2$ 是 SGESCSs(3)—(5)式的一个解, $\lambda_j=\alpha_j+\mathrm{i}\beta_j$, $1\leqslant j\leqslant n+N$ 为复数, $e_j(t)$, $j=1,\cdots,N$ 是任意的 t-函数, f_j, $j=1,\cdots,N$ 是系统(11)—(15)式当 $\lambda=\lambda_{n+j}$, $j=1,\cdots,N$ 时的一个解,则 SGESCSs(3)—(5)式有 N 个任意的 t 函数重复 N 次的广义双 Darboux 变换如下:

$$\tilde\phi=\frac{M_1}{M_0},\tag{21}$$

$$\tilde u=u+\frac{M_2}{M_0},\tag{22}$$

$$\tilde\varphi_j^{(k)}=\frac{M_3}{M_0},\qquad j=1,\cdots,n;\quad k=1,2,\tag{23}$$

$$\tilde\varphi_{n+j}^{(1)}=\frac{\sqrt{e_j'(t)}M_4}{e_j(t)M_0}+\frac{\sqrt{\bar e_j'(t)}\,\bar M_4}{\bar e_j(t)M_0},\quad j=1,\cdots,N,\tag{24}$$

$$\tilde\varphi_{n+j}^{(1)}=\frac{\sqrt{e_j'(t)}M_4}{\mathrm{i}e_j(t)M_0}+\frac{\sqrt{\bar e_j'(t)}\,\bar M_4}{\mathrm{i}\bar e_j(t)M_0},\quad j=1,\cdots,N.\tag{25}$$

其中

$$\begin{aligned}
M_0={}&W_0(\{e_1,f_1\},\{e_1,Sf_1\},\cdots,\\
&\{e_N,f_N\},\{e_N,Sf_N\},\{\bar e_1,\bar f_1\},\{\bar e_1,S\bar f_1\},\cdots,\\
&\{\bar e_N,\bar f_N\},\{\bar e_N,S\bar f_N\}),\\
M_1={}&W_1(\{e_1,f_1\},\{e_1,Sf_1\},\cdots,\\
&\{e_N,f_N\},\{e_N,Sf_N\},\{\bar e_1,\bar f_1\},\{\bar e_1,S\bar f_1\},\cdots,\\
&\{\bar e_N,\bar f_N\},\{\bar e_N,S\bar f_N\};\phi),\\
M_2={}&W_1(\{e_1,f_1\},\{e_1,Sf_1\},\cdots,\\
&\{e_N,f_N\},\{e_N,Sf_N\},\{\bar e_1,\bar f_1\},\{\bar e_1,S\bar f_1\},\cdots,\\
&\{\bar e_N,\bar f_N\},\{\bar e_N,S\bar f_N\};0),\\
M_3={}&W_1(\{e_1,f_1\},\{e_1,Sf_1\},\cdots,\\
&\{e_N,f_N\},\{e_N,Sf_N\},\{\bar e_1,\bar f_1\},\{\bar e_1,S\bar f_1\},\cdots,\\
&\{\bar e_N,\bar f_N\},\{\bar e_N,S\bar f_N\};\phi_j^{(k)}),\\
M_4={}&W_1(\{e_1,f_1\},\{e_1,Sf_1\},\cdots,\\
&\{e_N,f_N\},\{e_N,Sf_N\},\{\bar e_1,\bar f_1\},\{\bar e_1,S\bar f_1\},\cdots,\\
&\{\bar e_N,\bar f_N\},\{\bar e_N,S\bar f_N\};f_j),\\
\bar M_4={}&W_1(\{e_1,f_1\},\{e_1,Sf_1\},\cdots,\\
&\{e_N,f_N\},\{e_N,Sf_N\},\{\bar e_1,\bar f_1\},\{\bar e_1,S\bar f_1\},\cdots,\\
&\{\bar e_N,\bar f_N\},\{\bar e_N,S\bar f_N\};\bar f_j).
\end{aligned}$$

其中 $\bar h$ 是 h 的共轭,且 $\tilde\phi,\tilde u,\tilde\varphi_1^{(k)},\cdots,\tilde\varphi_{n+N}^{(k)}$, $k=1,2$ 满足用 $n+N$ 替换掉 n 的方程(11)—(15),那么 $\tilde u$, $\tilde\varphi_1^{(k)},\cdots,\tilde\varphi_{n+N}^{(k)}$, $k=1,2$ 是用 $n+N$ 替换掉 n 的 SGESCSs 方程(3)—(5)的一个解.

显然,由方程(21)—(25)定义的重复 N 次广义双 Darboux 变换是包含 N 个任意 t-函数和两个带源程度为 n 和 $n+N$ 的 SGESCSs 之间的一个非自动 Bäcklund 变换. $e_j(t)$ 和 f_j, $j=1,\cdots,N$ 的选择具有灵活性,使我们能构造出 SGESCSs 方程(1)的 complexiton 解.

3. SGESCSs 方程的 Complexiton 解

为了得到 SGESCSs 方程(1)的 complexiton 解,

我们选择其谱参数 λ 为复数,并以 $u=0$ 作为方程(1)在 $n=0$ 时的初始解. 设 $\alpha_j,\beta_j\neq 0, j=1,\cdots,N$ 为实常数,谱参数 λ_j,且 $\lambda_j=\alpha_j+i\beta_j, j=1,\cdots,N$ 为复数,$f_j, j=1,\cdots,N$ 是系统(11)—(15)式分别相应于谱参数 $\lambda=\lambda_j, j=1,\cdots,N$ 不同的解. 利用广义双 Darboux 变换(21)—(25)式,可得 SGESCSs 方程(1)有如下包含 N 个任意 t 函数 $e_1(t),\cdots,e_N(t)$ 的形式解

$$u=\frac{M_2}{M_0}, \tag{26}$$

$$\varphi_j^{(1)}=\frac{\sqrt{e_j'(t)}M_4}{e_j(t)M_0}+\frac{\sqrt{\bar{e}_j'(t)}\,\bar{M}_4}{\bar{e}_j(t)M_0},\quad j=1,\cdots,N, \tag{27}$$

$$\varphi_j^{(2)}=\frac{\sqrt{e_j'(t)}M_4}{ie_j(t)M_0}-\frac{\sqrt{\bar{e}_j'(t)}\,\bar{M}_4}{i\bar{e}_j(t)M_0},\quad j=1,\cdots,N. \tag{28}$$

我们称上述这些解为 complexiton 解,更具体地说,式(26)—(28)定义的解被称为 N-complexiton 解. 以下我们主要讨论 $N=1$ 的情形,通过广义双 Darboux 变换(16)—(20)式构造 SGESCSs 方程的 1-complexiton 解. 以 $u=0$ 为 $n=0$ 时的初始解,由 Lax 对(11)—(15)式可以得到

$$f=\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1\mathrm{e}^{-\lambda x+\frac{t}{4\lambda}}\\ c_2\mathrm{e}^{\lambda x-\frac{t}{4\lambda}}\end{pmatrix}, \tag{29}$$

其中 c_1 和 c_2 是两个任意常数. 当谱参数为 $-\lambda$ 时,

$$Sf=\begin{pmatrix}f_2\\ f_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_2\mathrm{e}^{\lambda x-\frac{t}{4\lambda}}\\ c_1\mathrm{e}^{-\lambda x+\frac{t}{4\lambda}}\end{pmatrix}, \tag{30}$$

我们选择 $e(t)$ 为

$$e(t)=at+b, \tag{31}$$

其中 $a\neq 0$ 和 b 为实数.

当(29)式和(30)式中的谱参数 λ 为复数时,用广义双 Darboux 变换就可以得到 SGESCSs 的 complexiton 解. 我们选取参数

$$c_1=1, c_2=1, a=1, b=0, \lambda=2\mathrm{i}. \tag{32}$$

然后根据广义双 Darboux 变换(16)—(20)式,$u=0, n=0$,则得到 SGESCSs 的 1-complexiton 解

$$u=\frac{-320t+256t\cos(2\theta)+80\sin(4\theta)-\mathrm{i}96\cos^2(2\theta)}{34\cos^2(2\theta)+15\sin(4\theta)-80t\sin(2\theta)-25+\mathrm{i}48t\cos(2\theta)}, \tag{33}$$

$$\begin{aligned}\varphi_1^{(1)}=&\frac{(192\mathrm{i}t-15)\cos(3\theta)+(192\mathrm{i}t-17)\mathrm{i}\sin(3\theta)+15\cos(5\theta)+17\mathrm{i}\sin(5\theta)}{34t\cos^2(2\theta)+15t\sin(4\theta)-80t^2\sin(2\theta)-25t+\mathrm{i}48t^2\cos(2\theta)}\\&-\frac{48\mathrm{i}t\cos\theta+48t\sin\theta+16\mathrm{i}\sin\theta}{34t\cos^2(2\theta)+15t\sin(4\theta)-80t^2\sin(2\theta)-25t+\mathrm{i}48t^2\cos(2\theta)},\end{aligned} \tag{34}$$

$$\varphi_1^{(2)}=\frac{192\cos\theta+224\mathrm{i}\sin\theta-18\cos(3\theta)+82\mathrm{i}\sin(3\theta)+34\cos(5\theta)+30\mathrm{i}\sin(5\theta)}{34t\cos^2(2\theta)+15t\sin(4\theta)-80t^2\sin(2\theta)-25t+\mathrm{i}48t^2\cos(2\theta)}, \tag{35}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2^{(1)}=&\frac{15\mathrm{i}\cos(3\theta)+48\mathrm{i}t\sin(3\theta)+80t\cos(3\theta)+17\sin(5\theta)}{34t\cos^2(2\theta)+15t\sin(4\theta)-80t^2\sin(2\theta)-25t+\mathrm{i}48t^2\cos(2\theta)}\\&-\frac{48\mathrm{i}t\sin\theta+15\mathrm{i}\cos(5\theta)+80t\cos\theta+16\sin\theta+17\sin(3\theta)}{34t\cos^2(2\theta)+15t\sin(4\theta)-80t^2\sin(2\theta)-25t+\mathrm{i}48t^2\cos(2\theta)},\end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2^{(2)}=&\frac{160t\cos\theta+32\sin\theta+96t\sin\theta-160t\cos(3\theta)-30\mathrm{i}\cos(3\theta)-96\mathrm{i}t\sin(3\theta)}{34t\cos^2(2\theta)+15t\sin(4\theta)-80t^2\sin(2\theta)-25t+\mathrm{i}48t^2\cos(2\theta)}\\&+\frac{34\sin(3\theta)+30\mathrm{i}\cos(5\theta)-34\sin(5\theta)}{34t\cos^2(2\theta)+15t\sin(4\theta)-80t^2\sin(2\theta)-25t+\mathrm{i}48t^2\cos(2\theta)}.\end{aligned} \tag{37}$$

其中 $\theta=\frac{t}{8}+2x$.

分离 SGESCSs 的 1-complexiton 解 u 的实部与虚部,我们可以得到该方程的 complexiton 解的详细结构图.

图 1 给出了 SGESCSs 的 1-complexiton 解 u 的实部在 $t=0$ 时的波形图以及虚部在 $t=0$ 时的波形图,图 2 描绘了实部和虚部的演化图. 从以上图形可以看出 SGESCSs 方程的 complexiton 解具有移动奇异性,它可以被看做为局域的周期性振荡解,其包络与振荡成分是以不同的速率传播的,是其另一种形式的解析解.

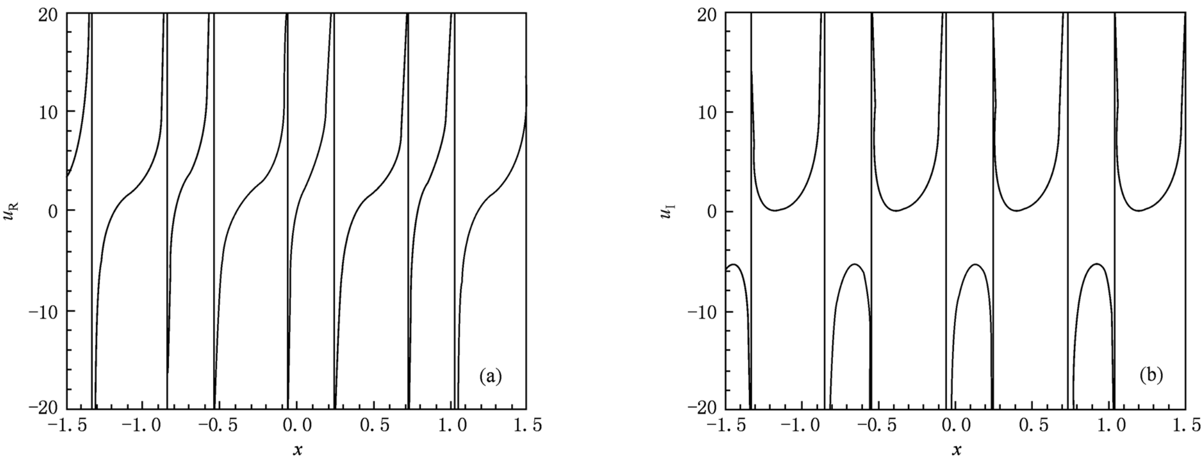

图 1　SGESCSs 的 1-Complexiton 解 u　(a) 实部在 $t = 0$ 时的波形图; (b) 虚部在 $t = 0$ 时的波形图

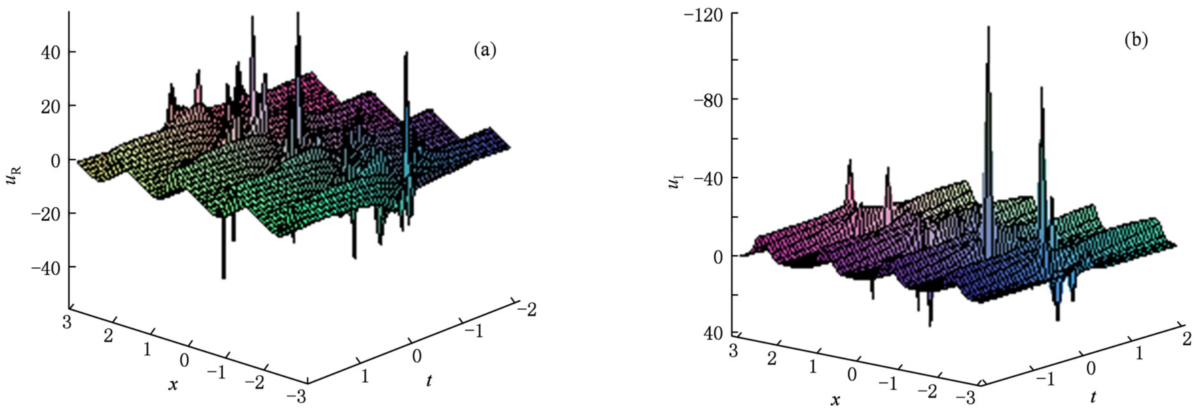

图 2　SGESCSs 的 1-Complexiton 解 u.　(a) 实部演化图; (b) 虚部演化图

4. 结　　论

本文利用广义双 Darboux 变换,构造了包含 n 个自相容源和 $n+N$ 个自相容源的两个 Sine-Gordon 方程之间的一种非自动 Bäcklund 变换. 假定谱参数 λ 为复数时,得到了 SGESCSs 的一个包含 N 个任意 t-函数的形式解,即 N-complexiton 解. 这也说明了 SGESCSs 除了孤子解、positon 解和 negaton 解外,还存在 complexiton 解. 这种奇异的 complexiton 解将有助于我们更进一步认识非线性波的运动的多样性,丰富了该类方程的解.

[1] Mel'nikov V K 1990 *Inverse Probl.* **6** 233

[2] Leon J, Latifi A 1990 *J. Phys.* A **23** 1385

[3] Mel'nikov V K 1983 *Lett. Math. Phys.* **7** 129

[4] Zakharov V E, Kuznetsov E A 1986 *Physica.* D **18** 455

[5] Mel'nikov V K 1992 *Inverse Probl.* **8** 133

[6] Doktorov E V, Vlasov R A 1983 *Opt. Acta* **30** 223

[7] Claude C, Latifi A, Leon J 1991 *J. Math. Phys.* **32** 3321

[8] Lin R L, Zeng Y B, Ma W X 2001 *Physica* A **291** 287

[9] Zeng Y B, Ma W X, Shao Y J 2001 *J. Math. Phys.* **42** 2113

[10] Zeng Y B, Shao Y J, Xue W M 2003 *J. Phys.* A: *Math. Phys.* **36** 5035

[11] Xiao T, Zeng Y B 2004 *J. Phys.* A: *Math. Phys.* **37** 7143

[12] Ma W X 2005 *Chaos, Sol. & Fract.* **26** 1453

[13] Liu X J, Zeng Y B 2005 *J. Phys.* A: *Math. Phys.* **38** 8951

[14] Shao Y J, Zeng Y B 2005 *J. Phys.* A: *Math. Phys.* **38** 2441

[15] Hu X B, Wang H Y 2006 *Inverse Probl.* **22** 1903

[16] Wang H Y, Hu X B, Tam H W 2007 *J. Nonlinear Math. Phys.* **14** 258

[17] Wang H Y, Hu X B, Tam H W 2007 *J. Phys. Soc. Jpn.* **76** 024007

[18] Wang H Y, Hu X B 2007 *Soliton Equations with Self-consistent Sources* (Beijing: Tsinghua University Press) (in Chinese) [王红艳、胡星标 2007 带自相容源的孤立子方程(北京: 清华大学出版社)]

[19] Hu X B 1991 *J. Phys.* A **24** 5489

[20] Hu X B 1996 *Chaos, Sol. & Fract.* **7** 211

[21] Zhang D J 2002 *J. Phys. Soc. Jpn.* **71** 2649

[22] Zhang D J, Chen D Y 2003 *Physica* A **321** 467

[23] Deng S F, Chen D Y, Zhang D J 2003 *J. Phys. Soc. Jpn.* **72** 2184

[24] Wang H, Li B 2011 *Chin. Phys.* B **20** 040203

[25] Beutler R 1993 *J. Math. Phys.* **34** 3098

[26] Andreev V A, Brezhnev Y V 1995 *Phys. Lett.* A **207** 58

[27] He H S, Chen J, Yang K Q 2005 *Chin. Phys.* **14** 1926

[28] Hu H C, Lou S Y 2005 *Phys. Lett.* A **341** 422

[29] Zhang Q, Yue P, Gong L X 2006 *Chin. Phys.* **15** 35

[30] Wu H X, Fan T Y 2007 *Physica* A **379** 471

[31] Zhang J W, Wang D X, Wu R H 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2021 (in Chinese) [张建文、王旦霞、吴润衡 2008 物理学报 **57** 2021]

[32] Mo J Q 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2930 (in Chinese) [莫嘉琪 2009 物理学报 **58** 2930]

[33] Piette B, Zakrzewski W J 2009 *Phys. Rev.* E **79** 046603

New explicit exact solution of one type of the sine-Gordon equation with self-consistent source*

Su Jun[1)†] Xu Wei[1)] Duan Dong-Hai[2)] Xu Gen-Jiu[1)]

1) (*School of Science, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China*)

2) (*School of Mathematics and Information Science, Weinan Teacher's University, Weinan 714000, China*)

(Received 13 January 2011; revised manuscript received 3 June 2011)

Abstract

This paper deals with one type of sine-Gordon with self-consistent source (SGESCS). The explicit exact solution of the equation is investigated using a generalized binary Darboux transformation. The complexiton solution for the equation is finally obtained.

Keywords: sine-Gordon equation, self-consistent source, generalized binary Darboux transformation, complexiton solution

PACS: 02.30.Ik, 05.45.Yv

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10932009, 10872165, 11002110) and the Natural Science Basic Research Programs of Shaanxi Province of China (Grant No. 2010JQ1015).

† E-mail: junsu@mail.nwpu.edu.cn