

立方五次方非线性 Schrödinger 方程的动力学性质研究*

花 巍 刘学深†

(吉林大学原子与分子物理研究所, 长春 130012)

(2010 年 12 月 31 日收到; 2011 年 2 月 18 日收到修改稿)

采用辛算法数值求解了一维立方五次方非线性 Schrödinger 方程, 研究了不同非线性参数下非线性 Schrödinger 方程的动力学性质. 数值结果表明, 随着立方非线性参数的增加, 系统经历了拟周期状态、混沌状态和周期状态, 且在五次方项的调制下, 呼吸子解可以退化为单孤子解.

关键词: 非线性 Schrödinger 方程, 动力学性质, 孤子, 辛算法

PACS: 02. 60. Cb, 05. 45. Yv, 42. 65. - k

1. 引言

众所周知, 非线性 Schrödinger 方程在许多物理过程中都有应用, 如非线性光学和光纤, 等离子体物理, 玻色-爱因斯坦凝聚和流体力学等^[1-7]. 许多非线性现象, 如 Langmuir 波的坍塌、激光聚变、光束成丝等都和系统的非线性动力学性质有关. Liu 等^[8]研究了五次方项对 Langmuir 波和电子的非线性相互作用的影响, 并给出了孤子解. Sun 等^[9]验证了两孤子的碰撞随着初始速度的变化会发生通过、反射及融合现象. Qiao 等^[10]给出了等离子体物理中描述不同非线性物理问题的非线性 Schrödinger 方程的动力学性质. 我们曾应用辛算法数值求解了非线性 Schrödinger 方程的周期边界初值问题, 比较分析了方程在不同非线性参数下演化的动力学特性^[11], 讨论了解的模式的漂移现象, 指出随着非线性参数的增加, 解模式的漂移速度越来越快^[12], 并且数值研究了非线性 Schrödinger 方程中的呼吸子现象^[13], 讨论了玻色-爱因斯坦凝聚体中的孤波演化^[14].

由于能够精确求解的非线性 Schrödinger 方程十分有限, 数值讨论方程的物理行为显得更加重要. 数值求解非线性 Schrödinger 方程有多种方

法^[15-20], 如 Crank-Nicolson 格式、分步傅里叶变换和守恒型差分格式等. 由于非线性 Schrödinger 方程可以转化成哈密顿形式^[20], 因而具有辛结构, 随着时间的演化是辛变换的演化, 因此辛算法是求解非线性 Schrödinger 方程的有效方法. 本文我们利用辛算法数值求解了一维立方五次方非线性 Schrödinger 方程, 阐明了方程的基本动力学性质及随着立方非线性参数的增加, 方程的解从周期状态经由拟周期状态、混沌状态后回到周期状态, 并说明了在五次方项的调制下, 方程的呼吸子解可以退化为单孤子解.

2. 非线性 Schrödinger 方程的辛形式

无量纲形式的一维立方非线性 Schrödinger 方程为

$$iu_t + u_{xx} + q|u|^2u = 0, \quad (1)$$

这里 $i = \sqrt{-1}$, 波函数 $u(x, t)$ 是复函数, t 和 x 分别是时空变量. 这个方程应用广泛, 在非线性光学和光纤中 $u(x, t)$ 代表电磁场的复杂包络^[12], 在等离子体物理中代表 Langmuir 波^[10], 在玻色-爱因斯坦凝聚理论中代表序参量^[8]. q 是立方非线性参数, 表示非线性相互作用的强弱. 这个方程是孤子理论中完全可积的重要模型之一. 假设 $u(x, t)$ 在 $x \rightarrow$

* 国家自然科学基金(批准号: 10974068, 11174108)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: liuxs@jlu.edu.cn

$\pm \infty$ 时快速趋于零, 方程 (1) 有无限多守恒量^[3,8], 如

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |u|^2 dx, \quad (2)$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{q}{2} |u|^4 - |u_x|^2 \right) dx, \quad (3)$$

这里 I_1 表示模方, I_2 表示能量. 设 $u(x, t) = a(x, t) + ib(x, t)$, 用中心差商代替二阶偏导数, 方程 (1) 可以离散为有限维非线性哈密顿正则方程^[11]

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \mathbf{J}^{-1} \frac{\partial H}{\partial z} = \mathbf{J}^{-1} \left(\frac{\partial H}{\partial a}, \frac{\partial H}{\partial b} \right)^T \\ &= \mathbf{J}^{-1} \nabla H = f(z). \end{aligned} \quad (4)$$

离散的哈密顿函数为

$$\begin{aligned} H(a, b) &= \frac{1}{2} (a^T \quad b^T) \mathbf{G} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &+ \frac{q}{4} \sum_{j=1}^n (a_j^2 + b_j^2)^2. \end{aligned} \quad (5)$$

这里 $z = (a, b)^T$, a, b 是由离散的空间点组成的列向量. \mathbf{J} 是辛矩阵, \mathbf{G} 是个反对称矩阵. 正则方程的解的时间演化是辛变换的演化, 因而应采用辛格式求解. 本文采用欧拉中点格式^[20]

$$z^{k+1} = z^k + \tau \mathbf{J}^{-1} \nabla H \left(\frac{z^{k+1} + z^k}{2} \right). \quad (6)$$

对正则方程 (4) 进行计算. 这是个二阶辛格式. 用它计算具有以下优点, 该格式具有二次不变性, 并且保波函数的离散模方守恒, 在长时多步的计算中优于一般的非辛算法.

当研究的物理问题要加入阻尼和耗散效应时, 需要考虑立方五次方非线性 Schrödinger 方程

$$iu_t + u_{xx} + q|u|^2u - g|u|^4u = 0. \quad (7)$$

其中 q 和 g 分别是立方和五次方非线性参数. 当 $g = 0$ 时即为立方非线性 Schrödinger 方程. 该方程亦可描述等离子物理中 Langmuir 波和电子的非线性相互作用^[10]. 方程 (7) 也可以离散成有限维非线性哈密顿正则方程 (4), 离散的哈密顿函数为

$$\begin{aligned} H(a, b) &= \frac{1}{2} (a^T \quad b^T) \mathbf{G} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \frac{q}{4} \sum_{j=1}^n (a_j^2 + b_j^2)^2 \\ &- \frac{g}{6} \sum_{j=1}^n (a_j^2 + b_j^2)^3. \end{aligned} \quad (8)$$

3. 立方非线性 Schrödinger 方程随着非线性参数变化的动力学

我们首先讨论立方非线性 Schrödinger 方程. 我

们考虑零边界初值问题, 初值取为

$$u(x, 0) = \operatorname{sech}(x), \quad (9)$$

当 $q = 2N^2$ ($N = 2, 3, \dots$) 时, (9) 式对应于 N 孤子的束缚态^[5,18]. $q = 2$ 对应基态孤子. N 孤子解也称作呼吸子, 它可以看作是具有相同中心的 N 个不同孤子的非线性叠加, 与单孤子的区别是 N 孤子具有空间震荡. 随着 q 的增大, 方程的解会出现大的时间梯度与空间梯度, 因此需要时间步长 τ 与空间步长 h 足够小方可计算, 并且时空步长需近似满足关系式 $\tau = \nu h^2$ ($\nu = 0.1$). 根据 q 的取值, 我们取 $h = 0.02$, $\tau = 0.0001$. 边界取为 $x \in [-20, 20]$, 时间算到 $t = 100$, 总的计算步数达到 10^5 . 为讨论守恒量, 我们定义误差 $\operatorname{Err}(I_1)(t) = I_1(t) - I_1(0)$, $\operatorname{Err}(I_2)(t) = I_2(t) - I_2(0)$. 图 1 给出了 $q = 2$ 时的计算结果. 由时空演化图 1(a) 可以看到此时解是孤波解, 随着时间演化保持形态和空间位置不变, 是单孤子. 图 1(b) 是 $\operatorname{Err}(I_1)$ 的演化图, 波函数的模方保持在 10^{-14} , 图 1(c) 是 $\operatorname{Err}(I_2)$ 的演化图, 能量保持在 10^{-8} . 由此可见采用辛算法算得的守恒量保持得很好.

合适的相空间可以清晰地描述物理实质. 对非线性系统而言, 频谱分析是有效方法. 我们选择相空间 $(R, dR/dt)$ ^[8,11]

$$R = |u(0, t)|, \quad dR/dt = d|u(0, t)|/dt. \quad (10)$$

通过 $|u(x = 0, t)|$ 的时间序列、相空间 $(R, dR/dt)$ 和频谱 $|W(f)|$ 来讨论随着非线性参数 q 的增加, 非线性 Schrödinger 方程 (1) 的动力学性质, 图 2 给出了计算结果. 从图 2 可以看到随着 q 的增加相轨线的变化规律. 容易想象由于 $q = 2$ 是基态孤子, 其时间序列是水平直线, 相图是一个点. 当非线性参数增加到 $q = 5$ 时, 由图 2 可见其时间序列呈无规则震荡, 相轨线由一点向里收进且明显存在混乱不清区域, 频谱是连续谱, 说明系统处于混沌状态. 当 $q = 8$ 时, 对应 2 孤子束缚态, 也称做呼吸子. 此时时间序列呈规则震荡, 相图为周期轨道, 对应的频谱是分立谱, 在相等间隔内出现尖峰, 基频是 $\omega_1 = 1.27$, 此时系统处于周期状态. 当 $q = 12$ 时, 相图中的轨道变厚, 频谱中的峰值清晰可数, 含有多个频率 $\omega_1 = 1.28$, $\omega_2 = 0.57$ 及其组合 $\omega = \omega_1 + \omega_2 = 1.85$ 等, 系统处于拟周期状态. 当 $q = 16$ 时, 相图中的轨道进一步变厚, 频谱比较不规则, 但那些较高的峰值仍然可数, 含有多个频率及其组合, 系统处于拟周期状态. 当 $q = 17$ 时, 相图中的轨线出现两

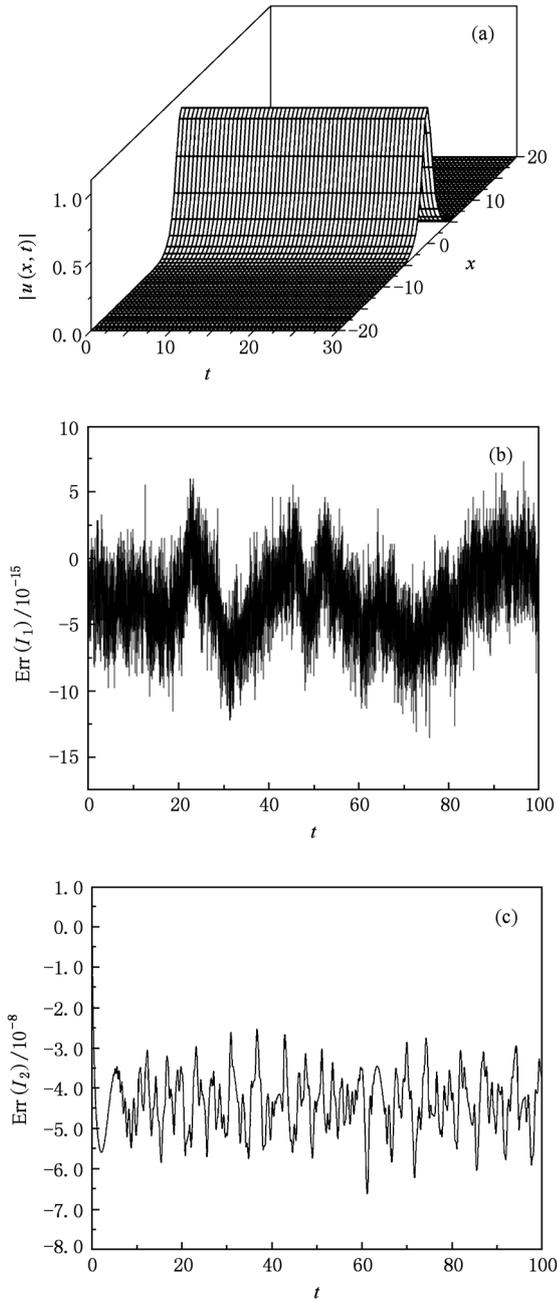


图1 $q = 2$ 时立方非线性 Schrödinger 方程的计算结果 (a) 时空演化图; (b) $\text{Err}(I_1)$ 的演化; (c) $\text{Err}(I_2)$ 的演化

圈闭合轨道的轮廓, 明显存在混乱区域, 频谱是连续谱, 谱中出现了噪声背景和宽峰, 系统处于混沌状态. 当非线性参数增加到 $q = 18$ 时, 对应 3 孤子束缚态, 时间序列呈规则震荡, 相图为闭合的周期轨道, 对应的频谱是分立谱, 在相等间隔内出现尖峰, 基频为 $\omega_1 = 1.27$, 此时系统又回到另一周期状态. 该频谱与 $q = 8$ 的频谱很相似. 预期若采用更高精度的格式计算, $q = 17, 18$ 的结果可以计算得更精确

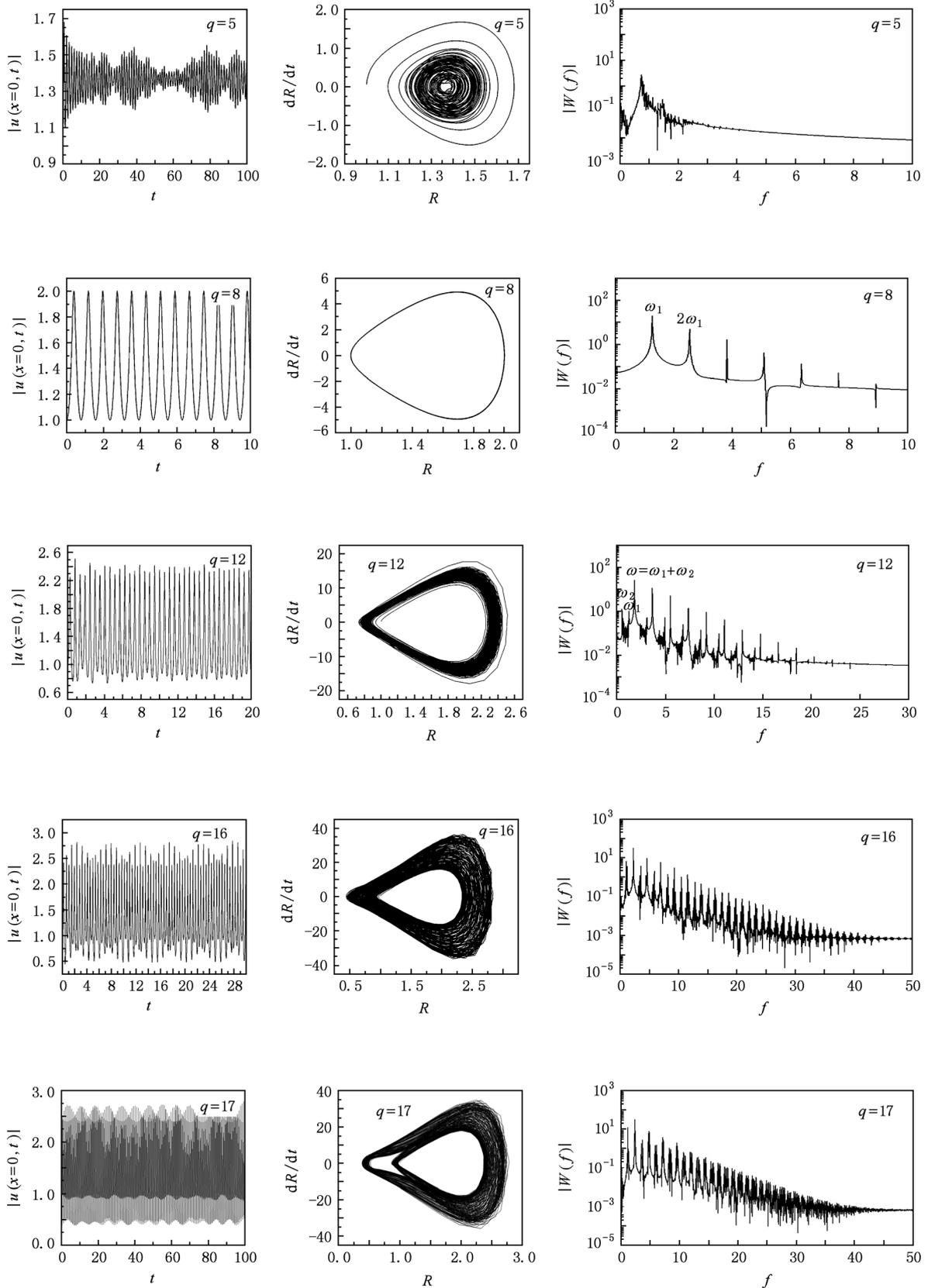
一些. 由以上分析我们可知具有零边界条件的立方非线性 Schrödinger 方程在初始条件(9)下, 立方非线性参数 $q = 2$ 时, 系统有基态孤子解; 随着 q 的增加, 系统进入混沌状态; 当增加到 $q = 8$ 时, 系统是周期状态; 随着 q 的增加, 系统经历了拟周期状态, 混沌状态; 当增加到 $q = 18$ 时, 系统回到另一周期状态.

4. 立方五次方非线性 Schrödinger 方程随着非线性参数变化的动力学

立方五次方非线性 Schrödinger 方程应用广泛. 比如在玻色-爱因斯坦凝聚理论中当考虑三体相互作用时, 方程中需加入五次方项^[21,22]. 在等离子体物理中 g 代表 Langmuir 波场与电子的耦合常数^[10]. 我们取 $q = 8$, 讨论五次方非线性系数 g 对方程解的影响, 图 3 给出波函数的时空演化图. 当 $q = 8, g = 0$ 时, 方程为立方非线性 Schrödinger 方程, 方程的解是 2 孤子解, 其时空演化如图 3 所示, 随着时间震荡并具有周期性, 也称为呼吸子解. 图 2 中 $q = 8$ 的时间序列、相图和频谱都可印证此解在时间上具有周期性. 呼吸子是重要的物理现象, 在非线性光学、生物物理和凝聚态物理比如玻色-爱因斯坦凝聚中都有存在. 当非线性系数 $g = 0.4$ 时, 可以看到方程的解的演化在时间上近似具有周期性且周期变长, 在空间上逐渐出现振幅较小的震荡. 当非线性系数增加到 $g = 0.8$ 时, 方程的解的演化在空间上继续出现小震荡, 在时间上的震荡幅度渐小, 周期性渐失. 这种现象在 $g = 1.2$ 时更为明显. 我们进一步给出了 $g = 0.8$ 和 $g = 1.2$ 的长时间的演化结果, 由图中可以看到方程的解从初始的呼吸子状态逐渐地趋于单孤子状态. 这是由于有五次方项的存在, 它代表的耗散作用使得呼吸子解退化成了单孤子状态.

5. 结 论

本文采用辛算法数值求解了一维立方五次方非线性 Schrödinger 方程, 研究了随着非线性参数的变化立方五次方非线性 Schrödinger 方程的动力学性质. 数值结果表明立方非线性 Schrödinger 方程的解随着非线性参数的增加存在从拟周期状态经由混沌状态到周期状态交替变化, 立方五次方非线性 Schrödinger 方程的呼吸子解随着五次方非线性参数的增加退化成单孤子解.



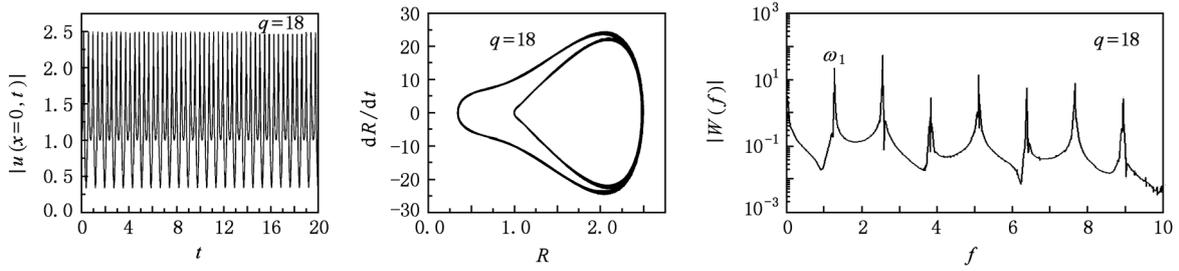


图2 立方非线性 Schrödinger 方程随着非线性参数 q 的增加的计算结果, $|u(x = 0, t)|$ 的时间序列、相空间 $(R, dR/dt)$ 和频谱 $|W(f)|$

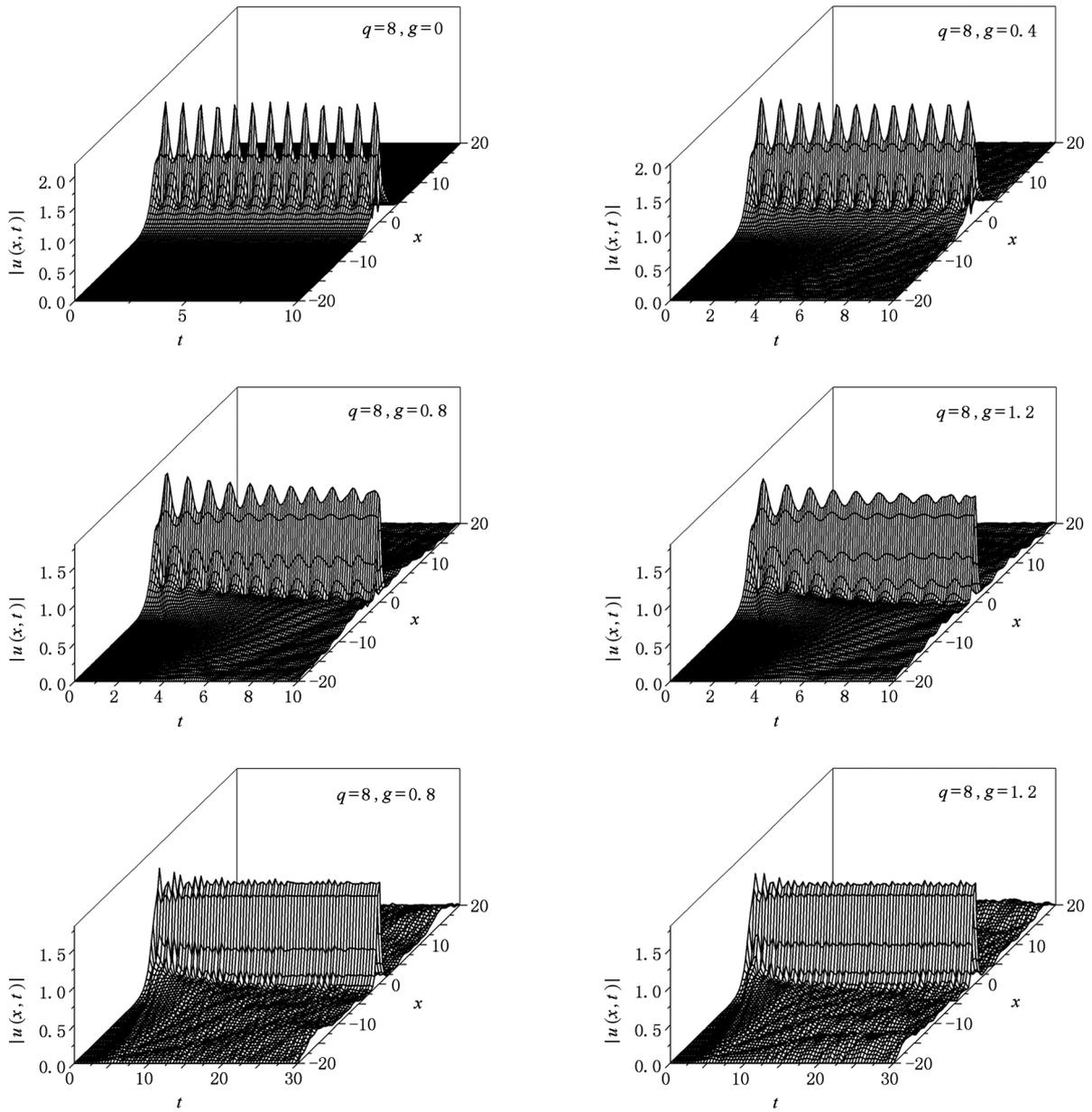


图3 立方五次方非线性 Schrödinger 方程随着非线性参数 g 的增加解的时空演化

- [1] Kim J I, Park H K, Moon H T 1997 *Phys. Rev. E* **55** 3948
- [2] Tajiri M, Watanabe Y 1998 *Phys. Rev. E* **57** 3510
- [3] Muslu G M, Erbay H A 2005 *Math. Comput. Simulat.* **67** 581
- [4] Dehghan M, Taleei A 2010 *Comput. Phys. Commun.* **181** 43
- [5] Cai D, Bishop A R, Grønbech J, Malomed B A 1994 *Phys. Rev. E* **49** R1000
- [6] Zong F D, Yang Y, Zhang J F 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3670 (in Chinese) [宗丰德、杨阳、张解放 2009 物理学报 **58** 3670]
- [7] Zheng X P, Lin J, Han P 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 6752 (in Chinese) [程雪苹、林机、韩平 2010 物理学报 **59** 6752]
- [8] Liu H, He X T, Lou S Y 2002 *Chin. Phys. Lett.* **19** 87
- [9] Sun J Q, Gu X Y, Ma Z Q 2004 *Chin. J. Comput. Phys.* **21** 321 (in Chinese) [孙建强、顾晓艳、马中骥 2004 计算物理 **21** 321]
- [10] Qiao B, Zhou C T, He X T, Lai C H 2008 *Commun. Comput. Phys.* **4** 1129
- [11] Liu X S, Ding P Z 2004 *J. Phys. A* **37** 1589
- [12] Luo X Y, Liu X S, Ding P Z 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 604 (in Chinese) [罗香怡、刘学深、丁培柱 2007 物理学报 **56** 604]
- [13] Liu X S, Qi Y Y, Ding P Z 2004 *Chin. Phys. Lett.* **21** 2081
- [14] Luo X Y, Liu X S, Ding P Z 2007 *J. At. Mol. Phys.* **24** 418 (in Chinese) [罗香怡、刘学深、丁培柱 2007 原子与分子物理学报 **24** 418]
- [15] Chang Q S, Jia E, Sun W 1999 *J. Comput. Phys.* **148** 397
- [16] Muruganandam P, Adhikari S K 2009 *Comput. Phys. Commun.* **180** 1888
- [17] Feng K 1986 *J. Comput. Math.* **4** 279
- [18] Tang Y F, Vázquez L, Zhang F, Pérez-García V M 1996 *Comput. Math. Applic.* **32** 73
- [19] Sun J Q, Ma Z Q, Hua W, Qin M Z 2006 *Appl. Math. Comput.* **177** 446
- [20] Liu X S, Qi Y Y, He J F, Ding P Z 2007 *Commun. Comput. Phys.* **2** 1
- [21] Köhler T 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 210404
- [22] Liu H, Wei J Y, Lou S Y, He X T 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1343 (in Chinese) [刘红、魏佳羽、楼森岳、贺贤士 2008 物理学报 **57** 1343]

Dynamics of cubic and quintic nonlinear Schrödinger equations^{*}

Hua Wei Liu Xue-Shen[†]

(*Institute of Atomic and Molecular Physics, Jilin University, Changchun 130012, China*)

(Received 31 December 2010; revised manuscript received 18 February 2011)

Abstract

We solve one-dimensional(1D) cubic and quintic nonlinear Schrödinger equations by the symplectic method. The dynamical property of the nonlinear Schrödinger equation is studied with using different nonlinear coefficients. The results show that the system presents quasiperiodic solution, chaotic solution, and periodic solution with the cubic nonlinear coefficient increasing, and the breather solution reduced into a fundamental soliton solution under the modulation of the quintic nonlinear coefficient.

Keywords: nonlinear Schrödinger equation, dynamical property, soliton, symplectic method

PACS: 02.60.Cb, 05.45.Yv, 42.65.-k

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10974068, 11174108).

[†] Corresponding author. E-mail: liuxs@jlu.edu.cn