

双层耦合 Lengel-Epstein 模型中的超点阵斑图*

白占国 董丽芳† 李永辉 范伟丽

(河北大学物理科学与技术学院, 保定 071002)

(2011年1月18日收到; 2011年2月27日收到修改稿)

用双层耦合的 Lengel-Epstein 模型, 研究了两个子系统的图灵模对斑图的影响, 发现其波数比在斑图的形成和选择过程中起着重要作用. 当波数比为 1 时, 双层系统未能发生耦合, 只能出现条纹和六边形斑图; 当波数比处于 $1 - \sqrt{17}$ 的范围时, 两子系统发生耦合, 图灵模之间发生共振相互作用, 得到种类丰富的超点阵斑图, 包括暗点、点棒和复杂超六边、I-型和 II-型白眼、类蜂窝和环状超六边等斑图; 当波数比大于 $\sqrt{17}$, 系统选择的斑图类型不再变化, 均为环状超六边斑图. 数值模拟得到的条纹、六边形、超六边点阵、II-型白眼斑图和类蜂窝斑图均已在介质阻挡放电系统实验中观察到. 另外, 还得到了超点阵斑图的波数随两个扩散系数乘积 $D_u D_v$ 的变化曲线, 发现其随的 $D_u D_v$ 增大而减小.

关键词: 耦合系统, 超点阵, 波数比, 数值模拟

PACS: 82.40.Ck, 52.80.Tn

1. 引言

具有两个或两个以上空间尺度的超点阵斑图作为一种复杂斑图类型, 广泛存在于自然界^[1,2]和多种非平衡态系统^[3-8]中. 近年来, 在介质阻挡放电系统中得到了种类丰富的超点阵斑图, 如蜂窝、白眼、超四边、超六边、点线斑图等, 成为获得超点阵斑图种类最多的系统之一, 在国内外备受关注^[9-11].

由于介质阻挡放电过程极为复杂, 至今还没有建立起气体放电系统的理论模型来描述该系统中的斑图动力学行为. 邵先军与夏广庆等人用流体模型数值模拟了气体放电过程及放电特性, 得到的结果与实验结果符合很好^[12,13]. 早在 1995 年德国的 Purwins 等人提出, 由于反应扩散机理普遍存在于生物、物理和化学系统. 在物理学领域, 对气体放电系统的各种斑图可以用反应扩散方程进行描述^[14,15]. 他们用二变量的反应扩散方程理论模拟了直流和交流气体放电系统观察到的条纹、六边形和静态局域态结构斑图, 得到与实验一致的结果. 但是由于

他们用的是单层反应扩散模型, 未能得到任何超点阵斑图.

为了进一步搞清超点阵斑图的形成机理, 本小组对斑图的动力学行为进行了深入的研究, 发现介质阻挡放电系统斑图是壁电荷斑图与放电丝斑图的相互作用的结果^[11]. 从壁电荷与放电丝相互作用的角度来看, 介质阻挡放电系统至少是一个双层耦合系统. 为此, 本工作采用双层耦合的化学反应扩散方程对该系统的斑图进行理论数值研究, 系统地研究两个图灵模的波数比对斑图形成的影响. 自 Barrio 等^[16]报道了超点阵斑图的形成可能源于两个模之间的相互作用, 人们开始用双层耦合系统对各实验系统观察到的丰富的超点阵斑图进行理论模拟. 例如杨灵发等人用耦合两个 Brusselator 模型得到了黑眼和白眼超点阵斑图^[17], 验证了 Ouyang 等人关于黑眼斑图的猜想^[18]. 此外, Berenstein 等人用双层耦合的 Lengel-Epstein 模型加四边形或六边形挡板数值模拟了在化学反应扩散系统实验观察到的多种超点阵和振荡斑图^[19,20]. Bachir 等人用双层耦合的 FitzHugh-Nagumo 模型研究了双稳系统的超点阵的形成^[21]. Page 等人用 Gierer-Meinhardt 方

* 国家自然科学基金(批准号:10975043), 河北省自然科学基金(批准号:2010000185)和河北省教育厅重点项目(批准号:ZD2010140)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: Donglf@mail.hbu.edu.cn

程加四边形挡板获得了大小点超四边形斑图^[22]. 一般说来,超点阵斑图是由两个或多个空间尺度的模按照一定的波长关系组合而成,因而两模的波数比是影响超点阵斑图形成和选择的重要因素之一. 据我们所知,关于该方面的研究,除 Yang 等^[17]做的一些工作,其他尚未见报道.

在本工作中,选用两个线性耦合的 Lengel-Epstein 模型,通过扩大两个图灵模的波数比的范围,得到了多种超点阵斑图,包括暗点、点-棒和复杂超六边、I-型和 II-型白眼、类蜂窝和环状超六边等斑图. 其中条纹、六边形、超六边点阵、II-型白眼斑图和类蜂窝斑图均已在实验中观察到. 另外还得到了超点阵斑图的波数随扩散系数的变化关系,发现其变化趋势与实验中波数随外加电压倒数的变化趋势一致,这一现象表明电压与扩散系数之间存在某些关系.

2. 模 型

Chlorite-Iodide-Malonic-Acid (CIMA) 化学反应系统是研究反应扩散图灵斑图的最理想系统,其动力学模型由 Lengyel 和 Epstein 于 1991 年^[23]提出. 该模型包含一个活化子 $[I^-]$ 和一个禁阻子 $[ClO_2^-]$ 两个变量,在无量纲情况下模型形式如下:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= a - u - 4 \frac{uv}{1+u^2} + D_u \nabla^2 u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= b(u - \frac{uv}{1+u^2}) + D_v \nabla^2 v. \end{aligned} \quad (1)$$

其中 u 和 v 分别为变量 $[I^-]$ 和 $[ClO_2^-]$ 的浓度; D_u 和 D_v 则为变量 $[I^-]$ 和 $[ClO_2^-]$ 的扩散系数;系数 a 和 b 是系统的控制参数,在本文中我们固定 $a = 15$ 和 $b = 9$. 该系统具有唯一的均匀定态解 $(u_0, v_0) = (\frac{a}{5}, 1 + \frac{a^2}{25})$, 对该均匀定态解作线性稳定性分析^[24]可以得到斑图动力学中最常见的两类初级分岔现象:当控制参数 b 满足 $b > b^H = \frac{3a^2 - 125}{5a}$ 时,系统经历霍普夫分岔;当 $b > b^T = \frac{13a^2 - 4a \sqrt{10} \sqrt{25 + a^2} + 125}{5D_u a}$ 时,系统经历图灵分岔,并产生一组特征波数均为

$$k_c = \sqrt[4]{\frac{ab}{D_u D_v (1 + a^2/25)}} \quad (2)$$

的图灵模. 这些具有相同波数的图灵模之间相互作

用,可自组织形成具有单一波长的图灵斑图,如条纹斑图和六边形斑图.

为了描述介质阻挡放电系统斑图的形成机理,我们采用双层耦合的 Lengel-Epstein 方程. 在无量纲的情况下,该模型具有以下形式^[25]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= f_1(u_1, v_1) + \alpha(u_2 - u_1) + D_{u1} \nabla^2 u_1, \\ \frac{\partial v_1}{\partial t} &= g_1(u_1, v_1) + \beta(v_2 - v_1) + D_{v1} \nabla^2 v_1, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= f_2(u_2, v_2) + \alpha(u_1 - u_2) + D_{u2} \nabla^2 u_2, \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} &= g_2(u_2, v_2) + \beta(v_1 - v_2) + D_{v2} \nabla^2 v_2. \end{aligned} \quad (3)$$

该模型包含两个子系统:系统 1 (u_1, v_1) 和系统 2 (u_2, v_2), α 和 β 分别为两个子系统的活化子和禁阻子之间的耦合强度;方程 $f(u, v)$ 和 $g(u, v)$ 为每个子系统的局部动力学方程,其形式由方程(1)所决定. 此系统存在的均匀定态解为 $u_1^0 = u_2^0 = u_0, v_1^0 = v_2^0 = v_0$. 通过线性稳定性分析可以很容易得到此两个子系统的特征波数. 选取合适的参数使两个子系统均处于图灵空间,即可得到两个图灵模,图 1 给出了该耦合模型的色散关系. 从单个子系统的分析可知,图灵模的波数大小反变于两个变量的扩散系数的大小,因此大的扩散系数对应着小的波数值. 为了简便起见,我们始终保持系统 2 中的图灵模是失稳模,且具有较小的波数值 q , 如图 1 所示. 同时保持系统 1 中的图灵模是线性稳定的,且具有较大的波数值 k_c . 本文的主要目的就是研究失稳模 q 与线性稳定模 k_c 的相互作用以及由此产生的多种超点阵斑图. 通过改变调节两个图灵模的波数比 $k_c : q$, 用数值模拟的方法研究它们在空间共振时所满足的条件.

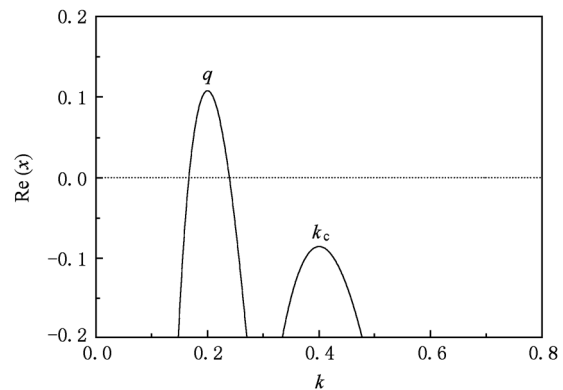


图 1 耦合系统的色散关系

在本文的数值模拟中,我们采用欧拉向前差分的方法进行积分,数值模拟在一个含有 128×128 个格点的二维平面上进行,时间和空间积分步长分别为 $\Delta t = 0.02, \Delta h = 1.0$ 个时间和空间单位,初始条件均为均匀定态上加一个很小的随机扰动,微扰幅度 $\Delta u = 0.033u_0, \Delta v = 0.01v_0$, 边界条件选用周期性边界条件. 所有结果的积分时间均超过 10000 个时间单位以确保它们的稳定性.

3. 模拟结果与讨论

本工作所选系统参数,使得基模是失稳模,临界模是线性稳定的. 实验发现:此种情形下,基模处于主导地位,此时只有系统 1 中斑图受到系统 2 中斑图的影响,并呈现出复杂的结构,而系统 2 中的斑图不受系统 1 中斑图的影响.(反之,如果基模是稳定模,临界模是不稳定的,则临界模处于主导地位,只有系统 2 中斑图受到系统 1 中斑图的影响,并呈现出复杂的结构,而系统 1 中的斑图不受系统 2 中斑图的影响.)要实现两个图灵模达到空间共振,相同的空间对称性是一个必要条件^[17]. 因此,我们始终保持系统 2 呈现简单的六边形斑图. 改变两个图灵模的波数比 $k_c:q$, 观察比值的改变对系统 1 在空间斑图选择上的影响.

图 2 给出了波数比 $k_c:q$ 为 1 时四组参数下系统出现的斑图类型. 图 2(a) 和 (b) 分别是大点和小点六边形;图 2(c) 和 (d) 为粗、细条纹斑图. 结果表明,当两个图灵模的波数比为 1 时,两个子系统之间耦合行为与耦合系数无关,无论耦合系数取 0—1 范围内的任何值,两个子系统出现的斑图均相同,即完全同步. 当选取不同系统参数时,可以出现条纹和六边形两种简单斑图. 当二者的波数比大于 1 时,无论比值为整数还是非整数,系统 1 均出现丰富的超点阵斑图.

首先讨论比值为整数的情况,图 3 给出了波数比 $k_c:q$ 为大于 1 的一系列整数时系统 1 所呈现出的斑图类型及其空间傅里叶变换. 图 3(a) 为波数比为 2:1 时产生的超六边形斑图,该超点阵斑图是由两套六边形斑图组合而成,一套为晶胞组成的六边形周期性结构,而每个晶胞都是一个六边形结构,其波数大小为 q . 另一套六边形是由空间点阵组成的,每个空间点都位于六边形晶胞的中心,其本征波数为 k_c . 通过傅里叶功率谱可知,频域空间内有

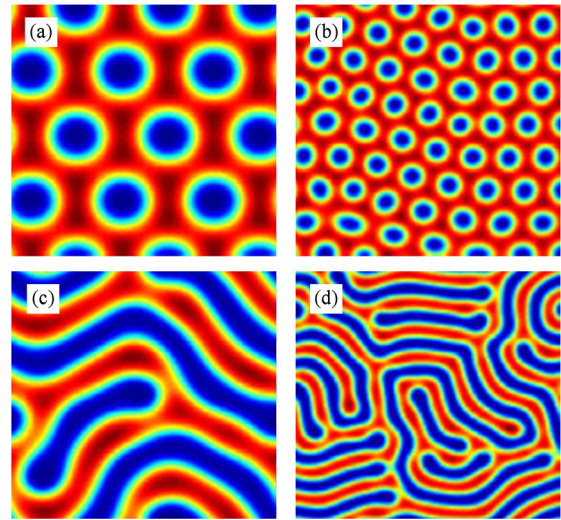


图 2 波数比为 1:1 时的简单斑图 (a) 大点六边形 $D_{u1} = 28.9, D_{v1} = 490, D_{u2} = 28.9, D_{v2} = 490, \alpha = 0.1, \beta = 0.1$; (b) 小点六边形 $D_{u1} = 6.2, D_{v1} = 85, D_{u2} = 6.2, D_{v2} = 85, \alpha = 0.1, \beta = 0.1$; (c) 粗条纹 $D_{u1} = 20, D_{v1} = 490, D_{u2} = 20, D_{v2} = 490, \alpha = 0.1, \beta = 0.1$; (d) 细条纹 $D_{u1} = 3.7, D_{v1} = 85, D_{u2} = 3.7, D_{v2} = 85, \alpha = 0.1, \beta = 0.1$

两套基模,其大小分别对应着两个图灵模的大小 q 和 k_c . 这两套图灵模分别为 q_i 和 $K_i, i = 1, 2, 3$, 且 $|q_i| = q, |K_i| = k_c$, 它们均满足空间共振关系 $q_1 + q_2 + q_3 = 0$ 和 $K_1 + K_2 + K_3 = 0$, 因此在二维空间中形成一个六边形点阵结构. 这两个图灵模的方向是相互平行的,即 $q_i // K_i$, 它们之间相互作用形成了第三个模式 K'_i , 且满足 $K'_1 + K'_2 + K'_3 = 0$ 以及 $K_1 + q_2 = K'_1$, 如图 3(a) 所示. 也就是说,该超六边形斑图是由三个模式 q_i, K_i 和 K'_i 三波共振作用的结果. 根据 3 个模式的强度比例不同,不同的模型得到的共振斑图的具体形式也不相同,例如本文用 Lengel-Epstein 模型得到的共振斑图是六边形超点阵,Brusselator 模型得到的则为白眼斑图^[17].

图 3(b) 为波数比为 3:1 时系统 1 中产生的 I 型白眼斑图. 每一个六边形晶胞的外面都包围着一个亮环,形成类似于眼睛的结构. 同图 3(a) 中的超六边形斑图一样,也是由两组平行的图灵模 q_i 和 K_i 相互作用形成的. q_i 和 K_i 空间共振共生成 9 个新模式,其中 3 个模的大小为 $2q$, 形成原因是 $K_1 - q_1 = 2q$. 另外 6 个模的波数大小都相等,满足空间共振关系: $K_1 + q_2 = K'_1$ 以及 $-(K_3 + q_2) = K'_1$. 图 3(c) 为波数比为 4:1 时产生的类蜂窝斑图,与白眼斑图唯一不同的是,它的傅里叶频谱中增加了 $K_i = 4q_i$

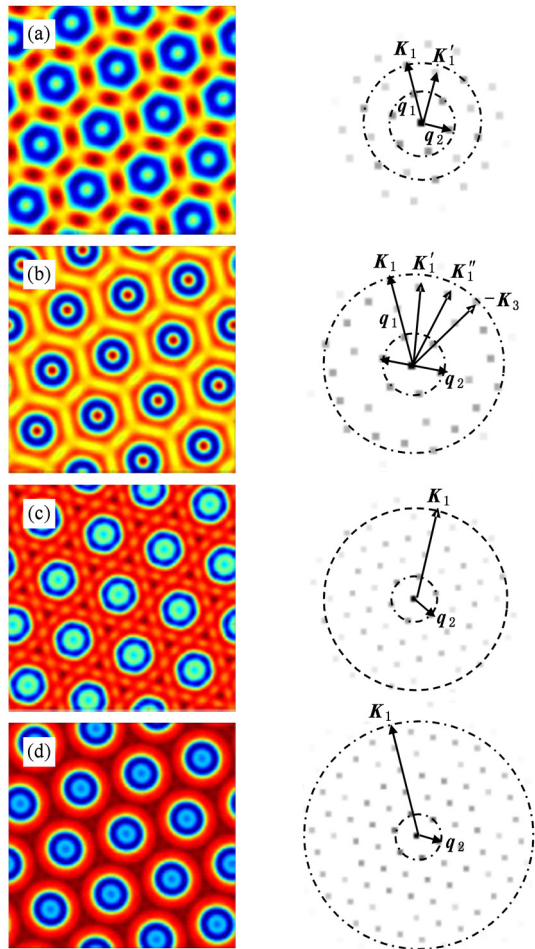


图3 波数比分别为 2:1, 3:1, 4:1 和 5:1 时的超点阵斑图 (a) 暗点超六边点阵 $D_{u1} = 6.0, D_{v1} = 88, D_{u2} = 22, D_{v2} = 390, \alpha = 0.2, \beta = 0.2$; (b) I 型白眼斑图 $D_{u1} = 2.8, D_{v1} = 37, D_{u2} = 23, D_{v2} = 380, \alpha = 0.1, \beta = 0.1$; (c) 类蜂窝斑图 $D_{u1} = 1.2, D_{v1} = 24, D_{u2} = 19, D_{v2} = 550, \alpha = 0.5, \beta = 0.5$; (d) 环状超六边 $D_{u1} = 0.85, D_{v1} = 17, D_{u2} = 19, D_{v2} = 550, \alpha = 0.5, \beta = 0.5$

这个模式. 在二维空间中表现为在白眼的周围增加了六边形点阵结构, 一个白眼周围均匀分布着 12 个亮点, 每两个亮点之间的夹角均为 $\pi/6$. 当波数比为 5:1 时, q_i 和 K_i 依然相互平行, 此时它们之间的相互作用比较复杂, 不仅基模, 还有高阶模以及它们之间线性组合产生的新模, 它们共同生成一种新的超点阵斑图——环状超六边. 每个小环外面都套着一个大的亮环, 所有的这些环状结构排列成一个六边形点阵结构. 继续增大此两个图灵模的波数比, 所生成的共振斑图均为环状超点阵斑图, 只是组成该斑图的模式不同, 强度分布也不同, 但是 q_i 模和 K_i 模始终保持平行. 图 3 中得到的 4 种超点阵斑图, 超六边和类蜂窝斑图在介质阻挡放电系统已经

观察到, 白眼斑图与化学反应扩散系统^[20]得到的白眼斑图类似, 环状超六边属新型斑图.

从图 3 中各个超点阵斑图的傅里叶频谱可以看出, 所有的模式均在以基模 q_i 为构成单元的六边形点阵结构上, 由于两个临界图灵模的波数比值不同, 物理空间中的斑图模式也不同. 实际上, 此六边形点阵上波模的大小并不是都为基模 q 的整数倍, 如果波数比 $k_c:q$ 不是整数时, 系统选择的斑图形式将是怎样? 为了弄清此问题, 在傅里叶频谱中的六边形点阵上选取一些特定的波模, 使其与基模的比值为非整数, 研究此时两图灵模之间的相互作用对斑图选择及形成的影响.

图 4 给出了波数比分别为 $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{10}$ 和 $\sqrt{17}$ 非整数时系统 1 中得到的四种超点阵斑图. 从图 4 (a) 可以看出, II-型白眼斑图包含两套六边形结构, 两个不同尺度的模之间满足三波共振关系, 与我们实验中得到的白眼斑图一致^[10]. 而 4(b) 中的复杂超六边斑图有三套波矢构成, 一套为基矢, 一套为临界波矢, 还有一套是由基矢和临界波矢相互作用激发的一个新波矢, 与图 3(c) 中的类蜂窝斑图不同, 虽然每个白眼周围也都分布着 12 个亮点, 但是它们分为空间尺度不同的两组, 是一种新型斑图. 图 4(c) 中的点-棒超六边是又一种新型斑图, 目前实验上还未观察到. 图 4(d) 与波数比为整数 5 时出现斑图类型相同也是环状超六边斑图, 当波数比大于 $\sqrt{17}$, 系统选择的斑图类型不再变化, 均为环状超六边斑图. 与双频驱动的振荡沙盘系统^[3]相似, 这些超点阵斑图的形成机理也遵循三波共振作用原理.

将图 4 中得到的斑图与图 3 中的超点阵斑图进行比较发现, 虽然斑图形成都遵守空间共振原则, 由于波数比为非整数时三波共振的具体关系式与整数比时并不相同, 因而系统选择的斑图类型也不相同. 例如, 在 3 和 $\sqrt{3}$ 两种波数比条件下得到两种白眼斑图, 其中非整数比 $\sqrt{3}$ 时得到的白眼斑图与我们在实验中得到的结果一致, 说明气体放电系统的白眼斑图是放电丝斑图模与壁电荷斑图模的波数比为非整数时才能出现. 值得一提的是, 在振荡沙盘系统^[3]中, 临界模 K 是不稳定模, 由它们相互作用使得线性稳定模 k_d 被激发出来. 而在本文中, 基模 q 是不稳定模, 临界模 K 是线性稳定模, 同样也可以通过三波共振作用而被激发.

另外, 我们还得到各种超点阵斑图的波数随扩

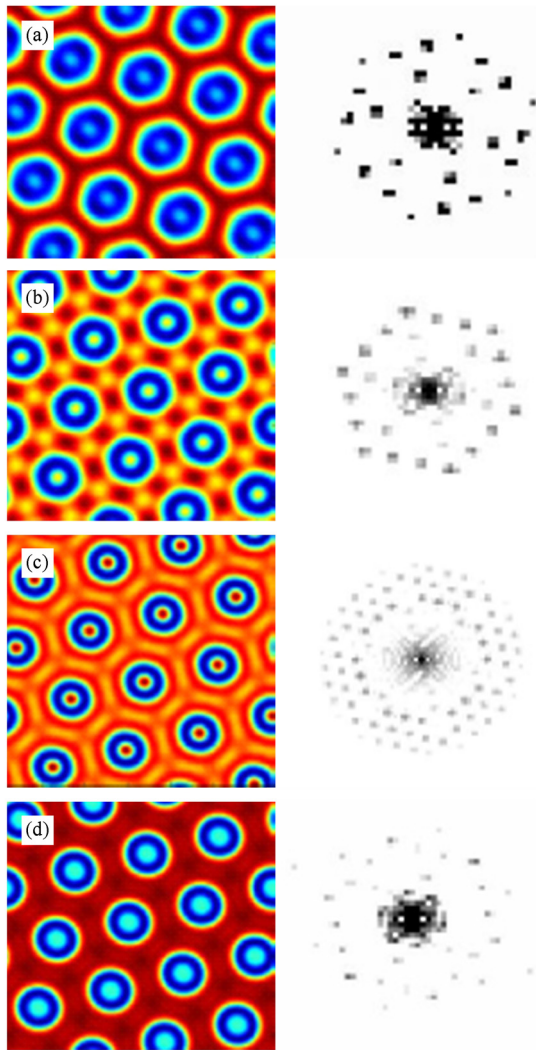


图4 波数比分别为 $\sqrt{3}:1, \sqrt{5}:1, \sqrt{10}:1$ 和 $\sqrt{17}:1$ 时的超点阵斑图 (a) II-型白眼斑图 $D_{u1} = 8.3, D_{v1} = 114, D_{u2} = 23, D_{v2} = 380, \alpha = 0.1, \beta = 0.1$; (b) 复杂超六边斑图 $D_{u1} = 5.3, D_{v1} = 68, D_{u2} = 23, D_{v2} = 380, \alpha = 0.1, \beta = 0.1$; (c) 点-棒超六边 $D_{u1} = 2.6, D_{v1} = 33.7, D_{u2} = 23, D_{v2} = 380, \alpha = 0.1, \beta = 0.1$; (d) 环状超六边 $D_{u1} = 1.5, D_{v1} = 24.1, D_{u2} = 19, D_{v2} = 550, \alpha = 0.4, \beta = 0.4$

散系数乘积 $D_u D_v$ 的变化曲线如图 5 所示. 可以看出, 其随扩散系数的增加而减小, 并且是非线性的, 当 $D_u D_v < 110$ 时, 波数随扩散系数的增大而迅速减小, 当 $D_u D_v$ 在 110—1000 范围时, 变化趋势比较平缓. 从(2)式可以看出, 波数随扩散系数的增加而减小, 且其变化是非线性的. 理论结果与上述模拟结果相一致. 在以往的实验上, 我们曾得到六边形斑图的晶格常数随电压的增大而减小^[25], 晶格常数与波数成倒数关系, 如果用外加电压的倒数为横轴坐标, 则波数随外加电压倒数的变化趋势与波长随外加电压变化曲线相同, 即六边形斑图的波数随外加

电压倒数的增大而减小. 数值模拟的结果与实验结果相一致, 表明方程的两个扩散系数乘积与外加电压倒数之间存在着正变关系. 当外加电压增大时, 电离的粒子数增加^[26], 弱电离子体中粒子的碰撞频率和扩散系数分别为 $\nu = n_n \sigma v$ 和 $D = KT/mv$ ^[27], 从两个关系式可以推出, 当放电气体中电离的粒子数增加, 其碰撞频率增大, 扩散系数反而减小. 也就是说弱电离子体的扩散系数随外加电压的增大而减小, 与外加电压的倒数存在正变关系. 从理论上验证了方程的两个扩散系数乘积与外加电压倒数之间存在着正变关系这一结果是合理的.

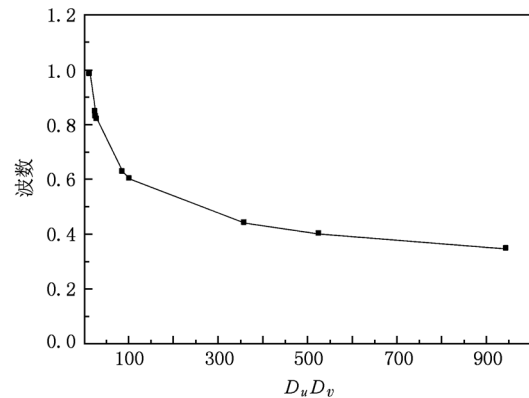


图5 超点阵斑图的波数随扩散系数的变化关系

4. 结 论

采用双层耦合模型, 研究了两个图灵模的波数比对超点阵斑图的选择机理及其形成机理的影响. 当波数比为 1 时, 双层系统只能出现条纹和六边形斑图; 当波数比处于 $1 - \sqrt{17}$ 范围时, 两子系统发生耦合, 图灵模之间发生共振相互作用, 得到种类丰富的超点阵斑图, 包括暗点、点-棒和复杂超六边、I 型和 II 型白眼、类蜂窝和环状超六边等斑图; 当波数比大于 $\sqrt{17}$, 系统选择的斑图类型不再变化, 均为环状超六边斑图. 上述模拟得到的条纹、六边形、超六边点阵、II 型白眼斑图和类蜂窝斑图均已在介质阻挡放电系统实验中观察到. 另外, 还研究了超点阵斑图的波数随两个扩散系数乘积 $D_u D_v$ 的变化关系, 发现其随 $D_u D_v$ 的增大而减小, 与以往实验中发现的斑图的波数随外加电压倒数的增大而减小的趋势类似, 说明两个扩散系数之积与外加电压倒数之间存在着正变关系, 该结果对于建立介质阻挡放电系统的理论模型具有一定的参考价值.

- [1] Barrio R A, Varea C, Aragon J L, Maini P K 1999 *Math. Biol.* **61** 483
- [2] Maini P K, Painter K J, Chau J 1999 *Chem. Soc. Faraday Trans.* **93** 3601
- [3] Epstein T, Fineberg J 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 134101
- [4] Conway J M, Riecke H 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 218301
- [5] Conway J M, Riecke H 2007 *Phys. Rev. E* **76** 057202
- [6] Hu H X, Li Q S, Ji L 2008 *Phys. Chem. Chem. Phys.* **10** 438
- [7] Dong L F, Xie W X, Zhao H T, Fan W L, He Y F, Xiao H 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4806 (in Chinese) [董丽芳、谢伟霞、赵海涛、范伟丽、贺亚峰、肖红 2009 物理学报 **58** 4806]
- [8] Dong L F, Zhao H T, Xie W X, Wang H F, Liu W L, Fan W L, Xiao H 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 5768 (in Chinese) [董丽芳、赵海涛、谢伟霞、王红芳、刘微粒、范伟丽、肖红 2008 物理学报 **57** 5768]
- [9] Dong L F, Liu W L, Wang H F, He Y F, Fan W L, Gao R L 2007 *Phys. Rev. E* **76** 046210
- [10] He Y F, Dong L F, Liu W L, Wang H F, Zhao Z C, Fan W L 2007 *Phys. Rev. E* **76** 017203
- [11] Dong L F, Fan W L, He Y F, Liu F C, Li S F, Gao R L, Wang L 2006 *Phys. Rev. E* **73** 066206
- [12] Shao X J, Ma Y, Li Y X, Zhang G J 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 8747 (in Chinese) [邵先军、马跃、李娅西、张冠军 2010 物理学报 **59** 8747]
- [13] Xia G Q, Xue W H, Chen M L, Zhu Y, Zhu G Q 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 015201 (in Chinese) [夏广庆、薛伟华、陈茂林、朱雨、朱国强 2011 物理学报 **60** 015201]
- [14] Doelman A, Van Harten A 1995 *Nonlinear Dynamics and Pattern Formation in the Natural Environment* (Longman) p223
- [15] Schenk C P, Schutz P, Bode M, Purwins H G 1998 *Phys. Rev. E* **57** 6480
- [16] Barrio R A, Varea C, Aragon J L, Maini P K 1999 *Bull. Math. Biol.* **61** 483
- [17] Yang L F, Dolnik M, Zhabotinsky A M, Epstein I R 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 208303
- [18] Zhou C X, Guo H Y, Ouyang Q 2002 *Phys. Rev. E* **65** 036118
- [19] Berenstein I, Yang L F, Dolnik M, Zhabotinsky A M, Epstein I R 2005 *J. Phys. Chem. A* **109** 5382
- [20] Yang L F, Dolnik M, Zhabotinsky A M, Epstein I R 2006 *Chaos* **16** 037114
- [21] Bachir M, Metens S, Boreckmans P, Dewel G 2001 *Europhys. Lett.* **54** 612
- [22] Page K M, Maini P K, Monk N A M 2005 *Physica D* **202** 95
- [23] Lengyel I, Epstein I R 1991 *Science* **251** 650
- [24] Ouyang Q 2000 *Pattern Formation in Reaction-Diffusion Systems* (Shanghai: Shanghai Scientific & Technological Education Publishing House) p12 (in Chinese) [欧阳颀 2000 反应扩散系统中的斑图动力学(上海:上海科技教育出版社)第12页]
- [25] Dong L F, Xiao H, Fan W L, Zhao H T, Yue H 2010 *IEEE Trans. on Plas. Sci.* **38** 2486
- [26] Dong L F, Qi Y Y, Zhao Z C, Li Y H 2008 *Plas. Sourc. Sci. Technol.* **17** 015015
- [27] Francis F C 1974 *Introduction to Plasma Physics* (California: Plenum Press)p90

Superlattice patterns in a coupled two-layer Lengel-Epstein model^{*}

Bai Zhao-Guo Dong Li-Fang[†] Li Yong-Hui Fan Wei-Li

(College of Physics Science and Technology, Hebei University, Baoding 071002, China)

(Received 18 January 2011; revised manuscript received 27 February 2011)

Abstract

The influence of Turing modes in two subsystems on pattern formation is investigated by using the two-layer coupled Lengel-Epstein model. It is found that the wave number ratio between two Turing modes play an important role in the pattern formation and pattern selection. When the wave number ratio is 1, no coupling behavior occurs between two subsystems and only stripe and hexagon patterns arise in system. If the wave number ratio lies in a range of $1-\sqrt{17}$, a variety of superlattice patterns, such as dark-dot, bar-dot and complex super hexagons, I-type or II-type white-eye, honeycomb-like, and superhexagon of circle, are obtained due to the resonance interaction between the two Turing modes in the coupled systems. When the wave number ratio is greater than $\sqrt{17}$, the superhexagon of circle is always selected and unchanged. Some superlattice patterns above, including stripes, hexagons, super hexagon, II-type white-eye, and honeycomb-like patterns, are observed experimentally in a dielectric barrier discharge (DBD) system. In addition, the curves for variation of hexagon pattern wave number with the increase of the product of two diffusion coefficients are obtained and it is found that the wave number becomes smaller with $D_u D_v$ increasing.

Keywords: coupled system, superlattice pattern, the ratio of wave number, numerical simulation

PACS: 82.40.Ck, 52.80.Tn

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10975043), the Natural Science Foundation of Hebei Province, China (Grant No. A2010000185), and the Key Project of Department of Education of Hebei Province, China (Grant No. ZD2010140).

[†] Corresponding author. E-mail: Donglf@hbu.edu.cn