

垂直天线阵观测信息反演大气折射率廓线*

赵小峰[†] 黄思训

(解放军理工大学气象学院, 南京 211101)

(2010年12月21日收到; 2011年1月20日收到修改稿)

利用垂直天线阵观测得到的电磁场信息建立目标泛函, 从电磁波抛物方程传播模式出发, 利用偏微分方程最优控制中的伴随方法研究大气折射率廓线反演问题. 针对反演的不稳定性, 采用正则化思想对目标泛函进行改造, 并根据变分同化思想构建反演迭代格式. 数值模拟试验验证了理论算法的可行性. 由于采用分步 Fourier 算法求解电磁波抛物方程传播模式和伴随模式过程中产生的固有误差随着传播距离的增加累积增大, 反演廓线在传播距离较远时不能收敛于观测廓线. 在这种情况下, 引入较好的初猜廓线和背景场可以有效地改进反演结果.

关键词: 大气折射率, 电磁波抛物方程, 变分伴随, 正则化

PACS: 92.60.Ta, 78.20.Ci, 02.30.Zz

1. 引言

电磁波在大气中传播会受到大气折射效应的影响. 了解大气折射率的时空分布有助于精确评估雷达等电磁通信系统的工作性能. 传统探测大气折射率的方法主要是通过无线电探空仪, 微波折射计, 低空火箭探空仪等设备测量大气的温度、压强和湿度随高度的分布, 然后结合 Smith-Weintraub 方程计算出大气折射率^[1]. 传统方法操作方便、测量精度较高, 但花费昂贵且设备部署困难^[2]. 因此, 有必要发展新方法探测大气折射率.

1969年, Richter^[3]对大气波导传播条件下雷达实现超视距探测现象进行了研究, 发现雷达电磁场信息的时空变化与大气折射率的时空变化有关, 这为利用雷达观测资料遥感反演大气折射率廓线奠定了理论基础. 雷达观测资料一般可分为两种: 1) 水平观测资料, 来源于雷达回波; 2) 垂直观测资料, 来源于垂直天线阵观测场. 本文主要研究利用垂直天线阵观测场遥感反演大气折射率廓线, 资料的获取采用收发分置设备(见图1). 基于电磁场信息反演大气折射率廓线是一个非线性最优化问题, 它是反问题研究领域中的新课题. 目前国际上求解该问题主要采用统计反演算法. 1997

年, Gingras 等^[4]介绍了电磁匹配场处理 (electromagnetic matched-field processing, EM-MFP) 的概念, 首次提出采用垂直天线阵观测得到的电磁场信息确定发射源位置(逆源问题)并同时估计大气折射率廓线, 他们通过数值模拟手段对理想表面波导廓线进行了估计; 1999年, Tabrikian 等^[5]通过引入历史观测信息, 结合正交经验函数构建大气折射率廓线参数化模型, 采用最大后验估计 (maximum a posteriori, MAP) 对实际表面波导廓线进行了反演; 2000年, Gerstoft 等^[6]采用遗传算法 (genetic algorithm, GA) 对垂直观测资料反演大气折射率廓线进行了定量分析, 讨论了天线孔径、发射频率和目标函数的选取对反演结果的影响; 2005年, Valtr 等^[7]利用天线阵观测资料计算得到的角度谱 (angle-of-arrival spectra) 信息作为反演源, 采用自适应蚁群算法 (self-organizing migration algorithm, SOMA) 对大气波导参数进行了反演; 2010年, Zhao 等^[8]采用模拟退火算法 (simulated annealing, SA) 对该问题进行了研究. 以上统计反演算法都需要构建合适的大气折射率参数化模型, 将垂直高度上各个点的折射率值的反演转化为几个模型参数的反演. 这虽然降低了参数反演的维数, 但当问题规模不可避免地增大时, 难以承受的运算时间将使统计算法丧失实时反演的可行性. 针对这种情况, 本文采用变分伴随正则化方法从一个全新的角度研究

* 国家自然科学基金(批准号:41175025)资助的课题.

[†] E-mail: zxf_best@126.com

大气折射率廓线反演问题.



图1 收发分置设备示意图

变分伴随方法已经广泛应用于大气和海洋环境参数反演研究领域^[9-12]. 盛峥等^[13,14]在假设可以得到整个平面空间电磁场观测信息的情况下,采用变分伴随方法对大气折射率廓线反演进行了仿真模拟. 垂直天线阵观测资料反演完全不同于整个平面空间观测资料反演,其只有末端观测信息,即仅已知在传播距离 L (发射机到接收天线阵水平距离) 处的测量值,试确定大气环境参数.

2. 电磁波抛物方程传播模式(正模式)

采用电磁场信息遥感反演大气折射率廓线,必须构建观测资料和反演参数之间的“精确”数学模型. 理论研究与现场试验均表明电磁波抛物方程传播模式能够较好地描述对流层大气中电磁波传播特性^[15-21]. 假设下边界为平滑理想阻抗边界,大气环境水平均匀,则在水平极化条件下,电磁波抛物方程传播模式可用公式描述为^[15]

$$\partial_z^2 u(x, z) + 2ik_0 \partial_x u(x, z) + k_0^2 [m^2(z) - 1] u(x, z) = 0, \quad (1a)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad (1b)$$

$$u(0, z) = \phi(z), \quad (1c)$$

其中 u 表示电磁场强; x 表示水平距离, z 表示垂直高度, k_0 表示自由空间波数, m 表示大气修正折射指数, 定义为 $m = n + z/a_e$, n 表示大气折射指数, a_e 表示地球半径, $\phi(z)$ 表示初始场, 由雷达系统参数确定.

设距离 x_k 和高度 z 处的场强为 $u(x_k, z)$, 且距离 x_k 和 x_{k+1} 之间 m 为常数, 对(1)式作 Fourier 变换和 Fourier 逆变换, 可以求解出距离 x_{k+1} 和高度 z 处的场强

$$u(x_{k+1}, z) = \exp\left\{i \frac{k_0}{2} [m^2(z) - 1] \delta x\right\} F^{-1} \times \left\{ \exp\left(-i \frac{p^2 \delta x}{2k_0}\right) U(x_k, p) \right\}, \quad (2)$$

其中, $\delta x = x_{k+1} - x_k$ 为距离步长; $U(x_k, p) = F[u(x_k, z)]$, $F[\cdot]$ 表示作 Fourier 变换, $F^{-1}[\cdot]$ 表示作 Fourier 逆变换. Fourier 变换和 Fourier 逆变换定义为

$$U(x, p) = F[u(x, z)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, z) \exp(-ipz) dz, \quad (3)$$

$$u(x, z) = F^{-1}[U(x, p)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(x, p) \exp(ipz) dp. \quad (4)$$

3. 反问题求解思路

3.1. 推导切线性模式

对反演参数 m 作扰动如下:

$$\tilde{m}(z) = m(z) + \alpha \hat{m}(z), \quad (5)$$

其中 α 为微量. $u(x, z)$ 为(1)式对应于参数 m 的解, $\tilde{u}(x, z)$ 为(1)式对应于参数 $\tilde{m}(z)$ 的解. 记 $\hat{u}(x, z)$ 为 $u(x, z)$ 的 Gateaux 导数:

$$\hat{u} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\tilde{u} - u}{\alpha}. \quad (6)$$

将(5)式和(6)式代入模式(1), 可推导出电磁波抛物方程切线性模式(tangent linear model, TLM)

$$\partial_z^2 \hat{u} + 2ik_0 \partial_x \hat{u} + k_0^2 (m^2 - 1) \hat{u} + 2k_0^2 u m \hat{m} = 0, \quad (7a)$$

$$\hat{u}(0, z) = 0, \quad (7b)$$

$$\hat{u}(x, 0) = 0. \quad (7c)$$

3.2. 定义目标泛函

假设垂直接收天线阵距离发射源为 L , 最大计算高度为 Z . 利用观测资料 $u^{\text{obs}}(L, z)$ 对未知参量 $m(z)$ 进行反演, 根据最小二乘原理, 可定义目标泛函为

$$J[m] = \frac{1}{2} \int_0^Z |u(L, z) - u^{\text{obs}}(L, z)|^2 dz. \quad (8)$$

预报值 $u(L, z)$ 和观测值 $u^{\text{obs}}(L, z)$ 越接近, 目标泛函越小, 反演结果也越精确. 对于观测资料不含噪声情况, 采用最小二乘原理定义的目标泛函形式是可行的. 但由于环境误差、模式误差、系统误差和观

测误差等的影响,实际观测资料中不可避免会含有观测噪声,这给反演带来了严重不适应性. 为此,根据正则化思想引入稳定泛函作为惩罚项对最小二乘法进行改造^[9]:

$$J[m] = \frac{1}{2} \int_0^Z |u(L, z) - u^{\text{obs}}(L, z)|^2 dz + \frac{\gamma_1^2}{2} \int_0^Z \int_0^L |\partial_z u(x, z)|^2 dx dz, \quad (9)$$

其中, $\frac{1}{2} \int_0^Z \int_0^L |\partial_z u|^2 dx dz$ 称为稳定泛函, γ_1 为正则化参数.

3.3. 求解目标泛函梯度

定义内积如下:

$$\langle f, h \rangle = \int_0^Z \int_0^L f \cdot \bar{h} dx dz, \quad (10)$$

$$(f, h) = \int_0^Z f \cdot \bar{h} dz, \quad (11)$$

其中, \bar{h} 为 h 的共轭函数.

计算目标泛函 $J[m]$ 在 m 处关于 \hat{m} 的 Gâteaux 导数

$$J'[m; \hat{m}] = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{J[\tilde{m}] - J[m]}{\alpha} = \text{Re}[(u(L, z) - u^{\text{obs}}(L, z), \hat{u}(L, z)) + \langle -\gamma_1^2 \partial_z^2 u, \hat{u}(x, z) \rangle], \quad (12)$$

其中, $\text{Re}[\cdot]$ 表示取实部, (12) 式详细计算过程请参照附录. 另一方面, 根据目标泛函梯度定义

$$J'[m, \hat{m}] = \int_0^Z \nabla_m J \cdot \hat{m} dz = (\nabla_m J, \hat{m}). \quad (13)$$

结合(12)式和(13)式可得

$$\text{Re}[(u(L, z) - u^{\text{obs}}(L, z), \hat{u}(L, z)) + \langle -\gamma_1^2 \partial_z^2 u, \hat{u}(x, z) \rangle] = (\nabla_m J, \hat{m}). \quad (14)$$

3.4. 导出伴随模式

对切线性模式(7a)式取共轭,并在方程两边同乘以 $w(x, z)$,然后在区域 $[0, L] \times [0, Z]$ 上积分,可以得到

$$\langle w, \partial_z^2 \hat{u} \rangle + \langle w, 2ik_0 \partial_x \hat{u} \rangle + \langle w, k_0^2 (m^2 - 1) \hat{u} \rangle + \langle w, 2k_0^2 u m \hat{m} \rangle = 0. \quad (15)$$

对上式4项分别进行计算:

$$\begin{aligned} \text{第1项} &= \langle w(x, z), \partial_z^2 \hat{u}(x, z) \rangle \\ &= \int_0^Z \int_0^L w \cdot \partial_z^2 \bar{\hat{u}} dx dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^L (w \cdot \partial_z \bar{\hat{u}}|_{z=0}^z - \int_0^Z \partial_z \bar{\hat{u}} \cdot \partial_z w dz) dx \\ &= \int_0^L (w \cdot \partial_z \bar{\hat{u}}|_{z=0}^z) dx - \int_0^L \int_0^Z \partial_z \bar{\hat{u}} \cdot \partial_z w dz dx \\ &= \int_0^L (w \cdot \partial_z \bar{\hat{u}}|_{z=0}^z) dx - \int_0^L (\partial_z w \cdot \bar{\hat{u}}|_{z=0}^z) dx \\ &\quad + \int_0^L \int_0^Z \partial_z^2 w \cdot \bar{\hat{u}} dx dz \\ &= \int_0^L (w \cdot \partial_z \bar{\hat{u}} - \partial_z w \cdot \bar{\hat{u}}|_{z=0}^z) dx + \langle \partial_z^2 w, \hat{u} \rangle, \end{aligned} \quad (16)$$

第2项 = $\langle w(x, z), 2ik_0 \partial_x \hat{u}(x, z) \rangle$

$$\begin{aligned} &= \int_0^Z \int_0^L (-2ik_0 w \cdot \partial_x \bar{\hat{u}}) dx dz \\ &= -2ik_0 \int_0^Z (w \cdot \bar{\hat{u}}|_{x=0}^{x=L} - \int_0^L \bar{\hat{u}} \cdot \partial_x w dx) dz \\ &= \int_0^Z \int_0^L (2ik_0 \partial_x w \cdot \bar{\hat{u}}) dx dz \\ &\quad - \int_0^Z (2ik_0 w \cdot \bar{\hat{u}}|_{x=0}^{x=L}) dz \\ &= \langle 2ik_0 \partial_x w, \hat{u} \rangle - \int_0^Z (2ik_0 w \cdot \bar{\hat{u}}|_{x=0}^{x=L}) dz, \end{aligned} \quad (17)$$

第3项 = $\langle w(x, z), k_0^2 [m^2(z) - 1] \hat{u}(x, z) \rangle$

$$\begin{aligned} &= \int_0^Z \int_0^L k_0^2 (m^2 - 1) \cdot w \cdot \bar{\hat{u}} dx dz \\ &= \langle k_0^2 (m^2 - 1) w, \hat{u} \rangle, \end{aligned} \quad (18)$$

第4项 = $\langle w(x, z), 2k_0^2 u(x, z) m(z) \hat{m}(z) \rangle$

$$\begin{aligned} &= \int_0^Z \int_0^L 2k_0^2 m \cdot \bar{u} \cdot w \cdot \bar{\hat{m}} dx dz \\ &= \langle 2k_0^2 m \bar{u} w, \hat{m} \rangle. \end{aligned} \quad (19)$$

将上述4项合并可得

$$\begin{aligned} &\langle \partial_z^2 w + 2ik_0 \partial_x w + k_0^2 (m^2 - 1) w, \hat{u} \rangle \\ &+ \langle 2k_0^2 m \bar{u} w, \hat{m} \rangle + \int_0^L (w \cdot \partial_z \bar{\hat{u}} - \partial_z w \cdot \bar{\hat{u}}|_{z=0}^z) dx \\ &- \int_0^Z (2ik_0 w \cdot \bar{\hat{u}}|_{x=0}^{x=L}) dz = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

利用切线性模式初始条件 $\hat{u}(0, z) = 0$ 和边界条件 $\hat{u}(x, 0) = 0$, 再根据正模式初边值条件,可相应地设置伴随模式共轭边界条件为 $w(x, 0) = 0$, $w(x, Z) = 0$ 和 $\partial_z w(x, z)|_{z=Z} = 0$, 则

$$w \cdot \partial_z \bar{\hat{u}} - \partial_z w \cdot \bar{\hat{u}}|_{z=0}^z = 0, \quad (21)$$

$$w \cdot \bar{\hat{u}}|_{x=0}^{x=L} = w(L, z) \bar{\hat{u}}(L, z). \quad (22)$$

利用(21)式和(22)式,可将(20)式化简为
 $\langle \partial_z^2 w + 2ik_0 \partial_x w + k_0^2(m^2 - 1)w, \hat{u} \rangle$
 $+ \langle 2k_0^2 m \bar{u} w, \hat{m} \rangle - (2ik_0 w(L, z), \hat{u}(L, z)) = 0.$ (23)

对(23)式两端取实部,结合(14)式可得电磁波抛物方程传播模式的伴随模式如下:

$$\partial_z^2 w(x, z) + 2ik_0 \partial_x w(x, z) + k_0^2 [m(z)^2 - 1] w(x, z) = -\gamma_1^2 \partial_z^2 u(x, z), \quad (24a)$$

$$w(x, 0) = 0, \quad (24b)$$

$$w(L, z) = \frac{i}{2k_0} (u(L, z) - u^{\text{obs}}(L, z)). \quad (24c)$$

同时可得目标泛函在 m 处的梯度为

$$\nabla_m J = -2k_0^2 m \int_0^L \text{Re}[\bar{u}(x, z) \cdot w(x, z)] dx. \quad (25)$$

借鉴正模式求解方法,采用分步 Fourier 算法,对伴随模式进行反向 ($x_{k+1} \rightarrow x_k$) 积分,在已知 $w(x_{k+1}, z)$ 时,可以求得伴随模式在距离 x_k 和高度 z 处的解为

$$w(x_k, z) = F^{-1}[W(x_k, p)], \quad (26)$$

$$W(x_k, p) = \exp\left\{\frac{k_0^2(m^2 - 1) - p^2}{2ik_0} \delta x\right\} \cdot W(x_{k+1}, p) + \frac{\gamma_1 p^2}{2ik_0} \int_{x_{k+1}}^{x_k} U(x, p) \times \exp\left\{\frac{k_0^2(m^2 - 1) - p^2}{2ik_0} (x - x_k)\right\} dx, \quad (27)$$

其中, $\delta x = x_{k+1} - x_k$ 为距离步长,其取值必须与(2)式中的距离步长相同.

3.5. 建立反演迭代格式

设 m_k 为初始猜测大气修正折射指数,根据变分同化思想可构造如下反演迭代格式^[10]:

$$m_{k+1} = m_k + D_k \rho_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (28)$$

其中, ρ_k 为搜索步长, D_k 为搜索方向. 搜索方向首次取目标泛函下降最快的负梯度方向,随后搜索方向由共轭梯度法确定^[22]:

$$D_0 = -g_0 = -\nabla_m J|_{m_0}, \quad (29)$$

$$D_k = -g_k + \beta_{k-1} D_{k-1}, \quad (30)$$

$$g_k = \nabla_m J|_{m_k}, \quad (31)$$

$$\beta_k = \frac{g_k \cdot (g_k - g_{k-1})^T}{g_{k-1} \cdot g_{k-1}^T}. \quad (32)$$

具体反演迭代步骤如下:

步骤 1 设置初始大气修正折射指数廓线 $m_k(z)$.

步骤 2 将 $m_k(z)$ 代入电磁波抛物方程传播模式(1),根据分步 Fourier 变换算法求得模式解 $u(x, z)$ 和预报值 $u(L, z)$, 并计算目标泛函 $J[m_k]$.

步骤 3 将观测值 $u^{\text{obs}}(L, z)$, 模式解 $u(x, z)$ 和预报值 $u(L, z)$ 代入伴随模式, 求出伴随模式解 $w(x, z)$, 进而计算出目标泛函梯度 $\nabla_m J$.

步骤 4 给定搜索步长 ρ_k , 利用反演迭代格式(28)式,更新大气折射指数廓线得到新的廓线 $m_{k+1}(z)$, 并根据步骤 2 求解新的目标泛函值 $J[m_{k+1}]$.

步骤 5 判断 $J[m_{k+1}] < J[m_k]$ 是否成立? 若不成立,则采用适当算法重新选取搜索步长 ρ_k , 并返回步骤 4. 若成立,则进一步判断 $J[m_{k+1}] < \varepsilon$ 是否成立 (ε 为一个很小的正数,用来控制反演精度)? 若不成立,令 $m_k = m_{k+1}$, 并返回步骤 2. 若成立,则输出 m_{k+1} 作为反演结果.

4. 数值模拟试验

由于大气修正折射指数 m 的值与 1 非常接近,通常采用大气修正折射率 M 作为输入,定义为

$$M = 10^6 \times (m - 1). \quad (33)$$

本文采用 1998 年 4 月 2 日 Wallops 岛波导探测试验^[23]中观测得到的大气修正折射率水平方向平均值计算得到的廓线模拟真实廓线 $M^{\text{obs}}(z)$, $M^{\text{obs}}(z)$ 基于电磁波抛物方程传播模式计算得到的电磁场强模拟实际垂直天线阵观测场强 $u^{\text{obs}}(L, z)$. 初始场 $\phi(z)$ 由雷达系统参数确定:发射频率取为 2.84 GHz,天线类型为各向同性天线,天线架设高度为 30.78 m.

大气修正折射率廓线,正模式求解得到的电磁场强覆盖图,以及伴随场强覆盖图由图 2 给出. 由于计算得到的正模式场强和伴随场强为复数,我们取其模表示场强强度. 计算伴随模式场强时,取正则化参数 $\gamma_1 = 0$, 观测场强 $u^{\text{obs}}(L, z) = 0, u(L, z)$ 的值由正模式场强给出.

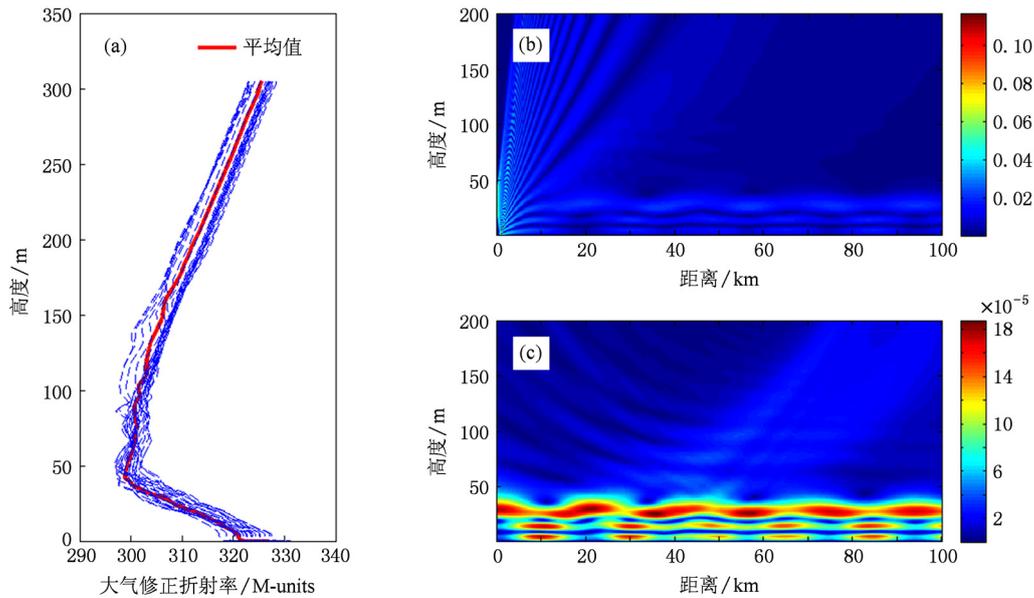


图2 (a)大气修正折射率廓线;(b)正模式求解得到的电磁场强覆盖图;(c)伴随模式求解得到的伴随场强覆盖图

这里需要指出的是:采用分步 Fourier 变换求解正模式和伴随模式的过程中对 m 的处理. 在进行 Fourier 变换过程中,假设 m 为常数,但在利用(2)式和(27)式进行分步计算时,则将 m 看作 z 的函数. 若 m 是常数,则(2)式和(27)式分别为正模式和伴随模式的精确解. 文中假设大气水平均匀,但 m 在垂直方向上并不均匀. 因此,计算过程中必然存在误差,且误差随着传播距离的增加而累积增大. 针对这种计算误差,本文分别采用两种传播距离处的

观测资料作为信息源反演大气修正折射率廓线. 第一种情况传播距离较短,取 $L = 1$ km;第二种情况传播距离较长,取 $L = 100$ km.

首先计算传播距离为 1 km,不引入观测噪声的情况. 为了考虑反演的实时性,水平距离步长取为 $\delta x = 1$ m. 大气修正折射率廓线初始猜测值由标准大气环境给出,垂直梯度为 0.118 M-units/m,地表值为 330 M-units. 在不含有观测噪声时,采用最小二乘目标泛函,即正则化参数 $\gamma_1 = 0$. 图 3(a)给出

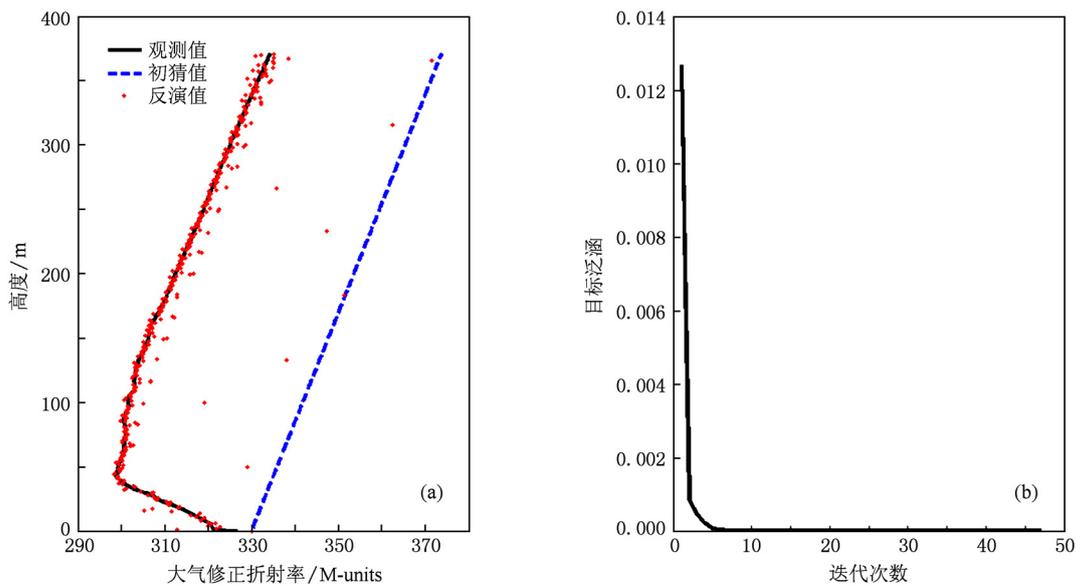


图3 (a)传播距离为 1 km 信息观测场不含噪声时大气修正折射率廓线反演结果;(b)目标泛函下降趋势

传播距离为 1 km 时的反演结果;图 3(b) 给出反演迭代过程中目标泛函的下降趋势.

从图 3 可以看出:假设观测信息场不含有噪声时,无需引入正则化项就可以得到较好的反演结果. 在反演迭代初期,目标泛函迅速下降,当迭代到第 6 次时,就已经收敛到比较好的结果. 本次实验

总共迭代 47 次,耗时 25.8 s(计算资源为 ThinkPad R400, P8600 处理器, 2 GB 内存, Fortran 6.5 运行环境). 然而,实际观测资料不可能是无噪声的,我们采用对观测场进行高斯随机扰动的方法模拟观测噪声. 观测场中加入 10% 高斯白噪声的反演结果由图 4(a) 给出.

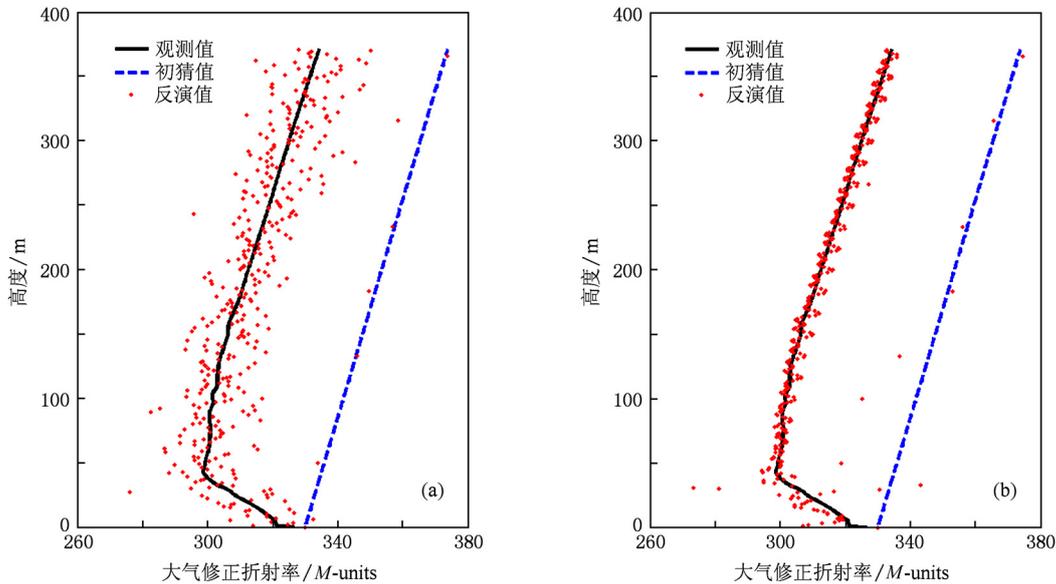


图 4 传播距离为 1 km 信息观测场中含有 10% 观测噪声时大气修正折射率廓线反演结果 (a) 正则化参数 $\gamma_1 = 0$; (b) 正则化参数 $\gamma_1 = 0.15$

从图 4(a) 可以看出,当含有 10% 观测噪声时,反演结果开始出现明显的振荡现象,这即是反问题中所谓的不适定性. 前人的研究表明,引入正则化思想对目标泛函进行约束,可以有效地解决反演的不适定性^[10, 24]. 图 4(b) 给出正则化参数 $\gamma_1 = 0.15$ 时的反演结果,计算时间为 28.6 s. 对比图 4(a) 和(b),引入正则化项可以很好的抑制反演廓线的振荡. 文中正则化参数是通过多次试验,依照经验给出的,具体如何给定,是一个非常复杂的问题,有关正则化参数的选取原则可以参考文献[25—26].

当传播距离较短时,正模式和伴随模式求解过程中产生的固有累积误差较小,反演结果较好,这表明理论算法是可行的. 下面给出传播距离为 100 km,引入 10% 高斯观测噪声的反演结果. 为了保证反演的实时性,水平距离步长取为 $\delta x = 100$ m. 大气修正折射率廓线初始猜测值由标准大气环境给出. 图 5(a) 和(b) 分别给出正则化参数取为 $\gamma_1 = 0$ 和 $\gamma_1 = 0.2$ 时的反演结果.

从图 5 可以看出,随着传播距离的增加,采用分步 Fourier 变换计算正模式和伴随模式时产生的固有误差累积增大,这严重影响了反演精度,使得反演廓线不能收敛于观测廓线. 对比图 5(a) 和(b),引入正则化项时的反演结果要好于不引入正则化项时的反演结果. 针对这个问题,我们改进大气修正折射率廓线的初猜值,并借鉴资料同化技术引入背景场思想对目标泛函作进一步约束^[27]. 目标泛函改写为

$$J[m] = \frac{1}{2} \int_0^Z |u(L, z) - u^{obs}(L, z)|^2 dz + \frac{\gamma_1^2}{2} \times \int_0^L \int_0^L |\partial_z u|^2 dx dz + (m - m^b)^T \times \mathbf{B}^{-1} (m - m^b), \quad (34)$$

目标泛函梯度相应地改写为

$$\nabla_m J = -2k_0^2 m \int_0^L \text{Re}[\bar{u}(x, z) \cdot w(x, z)] dx + 2\mathbf{B}^{-1} (m - m^b), \quad (35)$$

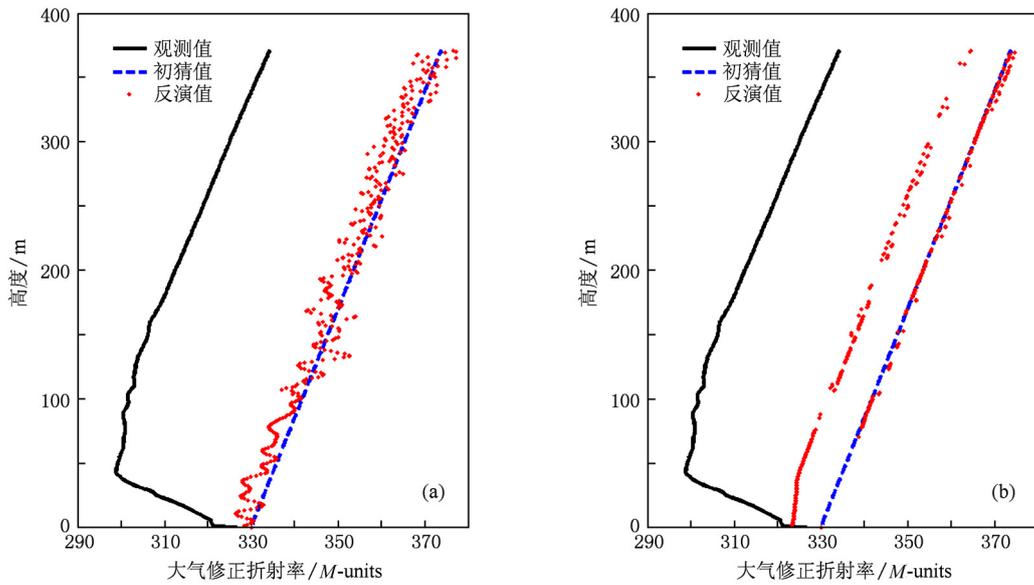


图5 传播距离为 100 km 信息观测场中含有 10% 观测噪声时大气修正折射率廓线反演结果 (a) 正则化参数 $\gamma_1 = 0$; (b) 正则化参数 $\gamma_1 = 0.2$

其中, m^b 为背景场, B 为背景场误差协方差矩阵.

采用 1998 年 4 月 2 日 Wallops 岛波导探测试验中与平均大气修正折射率廓线 M^{obs} 均方差最大的那条廓线作为背景场 M^b . 大气修正折射率廓线初始

猜测值由背景场给出, 引入 10% 高斯观测噪声, 正则化参数 $\gamma_1 = 0.2$. 图 6(a) 和 (b) 分别给出引入背景场和不引入背景场时的反演结果. 从图 6 可以看出, 引入较好的初始场和背景场, 可以在一定程度上改进反演廓线的精度.

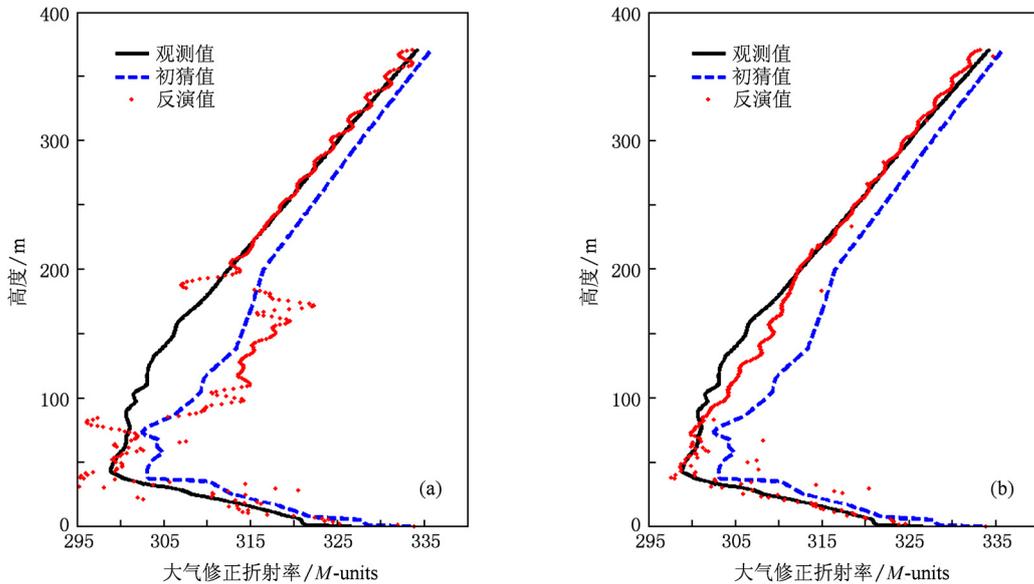


图6 传播距离为 100 km 信息观测场中含有 10% 观测噪声时大气修正折射率廓线反演结果 (a) 正则化参数 $\gamma_1 = 0.2$, 不引入背景场; (b) 正则化参数 $\gamma_1 = 0.2$, 引入背景场

5. 结 论

本文采用变分同化技术,结合反问题中的正则化思想,基于电磁波抛物方程传播模式对利用垂直天线阵观测资料遥感反演大气折射率廓线问题进行了探讨. 数值模拟试验结果验证了理论算法的可行性. 在观测含有噪声的情况下,该问题是不适定的,这给数值计算带来了很大困难. 本文为了克服不适定性带来的困难,在目标泛函中增加了正则化项作为稳定泛函,此正则化项与正模式解的垂直梯度有关,相当于从物理上增加了约束,从而克服了计算中的不稳定,提高了反演精度.

采用分步 Fourier 算法求解电磁波抛物方程传播模式和伴随模式是一种行之有效的方法. 由于在求解过程中存在的固有计算误差随着传播距离的

增加而累积增大,使得在传播距离较远时,反演结果变得不可靠,这严重影响了理论算法的实际业务化使用. 本文通过改进初猜值和引入背景场约束等手段,有效地控制了算法的收敛性,但这并不是根本解决途径. 开发正模式和伴随模式的精确数值解法将是我们今后主要研究工作之一.

附 录

计算目标泛函 $J[m]$ 在 m 处关于 \hat{m} 的 Gâteaux 导数. 令

$$J_1[m] = \frac{1}{2} \int_0^Z |u(L,z) - u^{obs}(L,z)|^2 dz, \quad (A1)$$

$$J_2[m] = \frac{1}{2} \int_0^Z \int_0^L |\partial_z u(x,z)|^2 dx dz. \quad (A2)$$

首先计算 $J_1[m]$ 在 m 处关于 \hat{m} 的 Gâteaux 导数,令

$$v = u(L,z) - u^{obs}(L,z) = v_1 + iv_2, \quad (A3)$$

$$\begin{aligned} J'_1[m; \hat{m}] &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{J_1[\tilde{m}] - J_1[m]}{\alpha} = \frac{1}{2} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\int_0^Z (|\tilde{v}|^2 - |v|^2) dz}{\alpha} = \frac{1}{2} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\int_0^Z (\tilde{v} \tilde{v}^* - v \bar{v}) dz}{\alpha} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\int_0^Z [(\tilde{v}_1^2 + \tilde{v}_2^2) - (v_1^2 + v_2^2)] dz}{\alpha} = \frac{1}{2} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\int_0^Z [(\tilde{v}_1^2 - v_1^2) + (\tilde{v}_2^2 - v_2^2)] dz}{\alpha} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\int_0^Z [(\tilde{v}_1 - v_1)(\tilde{v}_1 + v_1) + (\tilde{v}_2 - v_2)(\tilde{v}_2 + v_2)] dz}{\alpha} \\ &= \int_0^Z (\hat{v}_1 v_1 + \hat{v}_2 v_2) dz = \int_0^Z \text{Re}[v_1 \hat{v}_1^*] dz = \text{Re}(v_1, \hat{v}_1). \end{aligned} \quad (A4)$$

将(A3)式代入(A4)式,且由于观测 $u^{obs}(L,z)$ 已知,可得

$$J'_1[m, \hat{m}] = \text{Re}(u(L,z) - u^{obs}(L,z), \hat{u}(L,z)). \quad (A5)$$

下面计算 $J_2[m]$ 在 m 处关于 \hat{m} 的 Gâteaux 导数,令

$$u = u_1 + iu_2, \quad (A6)$$

$$\begin{aligned} J'_2[m, \hat{m}] &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{J_2[\tilde{m}] - J_2[m]}{\alpha} = \frac{1}{2} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\int_0^Z \int_0^L (|\partial_z \tilde{u}|^2 - |\partial_z u|^2) dx dz}{\alpha} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\int_0^Z \int_0^L (|\partial_z(\tilde{u}_1 + i\tilde{u}_2)|^2 - |\partial_z(u_1 + iu_2)|^2) dx dz}{\alpha} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\int_0^Z \int_0^L [\partial_z(\tilde{u}_1 - u_1) \cdot \partial_z(\tilde{u}_1 + u_1) + \partial_z(\tilde{u}_2 - u_2) \cdot \partial_z(\tilde{u}_2 + u_2)] dx dz}{\alpha} \\ &= \int_0^Z \int_0^L [\partial_z \hat{u}_1 \cdot \partial_z u_1 + \partial_z \hat{u}_2 \cdot \partial_z u_2] dx dz = \int_0^Z \int_0^L \text{Re}[\partial_z u \cdot \partial_z \hat{u}^*] dx dz \\ &= \text{Re}[\int_0^Z \int_0^L \partial_z u \cdot \hat{u}^* dz - \int_0^Z \partial_z^2 u \cdot \hat{u} dz] = \text{Re}[-\int_0^Z \int_0^L \partial_z^2 u \cdot \hat{u} dx dz] = \text{Re}\langle -\partial_z^2 u, \hat{u} \rangle. \end{aligned} \quad (A7)$$

于是,

$$\begin{aligned} J'[m, \hat{m}] &= J'_1[m, \hat{m}] + \gamma_1^2 J'_2[m, \hat{m}] \\ &= \text{Re}[(u(L,z) - u^{obs}(L,z), \hat{u}(L,z)) + \langle -\gamma_1^2 \partial_z^2 u, \hat{u} \rangle]. \end{aligned} \quad (A8)$$

- [1] Yan H J, Fu Y, Hong Z J 2006 *Introduction to Modern Atmospheric Refraction* (Shanghai: Science and Educational Press) (in Chinese) p16 [严豪健、符养、洪振杰 2006 现代大气折射引论 (上海:上海科技教育出版社) 第 16 页]
- [2] Halvey R A 1983 *Proc. IEEE Part F* **130** 643
- [3] Richter J H 1969 *Radio Sci.* **4** 1261
- [4] Gingras D F, Gerstoft P, Gerr N L 1997 *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **45** 1536
- [5] Tabrikian J, Krolik J L 1999 *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **47** 1727
- [6] Gerstoft P, Gingras D F, Rogers L T, Hodgkiss W S 2000 *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **48** 345
- [7] Valtr P and Pechac P 2005 *Novel Method of Vertical Refractivity Profile Estimation Using Angle of Arrival Spectra 28th General Assembly of International Union. of Radio Science* [CD-ROM] New Delhi, India
- [8] Zhao X F, Huang S X, Shi W L, Xiang J 2011 *Chin. Phys. B* **20** 099201
- [9] Huang S X, Han W, Wu R S 2004 *Sci. Chin. D* **47** 630
- [10] Huang S X, Wu R S 2005 *Mathematical Physics Problems in Atmospheric Science 2nd Edition* (Beijing: Meteorology Press) (in Chinese) p460 [黄思训、伍荣生 2005 大气科学中的数学物理问题 第二版 (北京:气象出版社) 第 460 页]
- [11] Huang S X, Teng J J, Lan W R, Xiang J 2005 *Chin. J. Theor. Appl. Mech.* **37** 399 (in Chinese) [黄思训、滕加俊、兰伟仁、项杰 2005 力学学报 **37** 399]
- [12] Hursky P, Porter M B, Cornuelle B D, Hodgkiss W S, Kuperman W A 2004 *J. Acoust. Soc. Am.* **115** 607
- [13] Sheng Z, Huang S X 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1734 (in Chinese) [盛 峥、黄思训 2010 物理学报 **59** 1734]
- [14] Sheng Z, Huang S X 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3912 (in Chinese) [盛 峥、黄思训 2010 物理学报 **59** 3912]
- [15] Dockery G D 1988 *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **36** 1464
- [16] Kuttler J R, Dockery G D 1991 *Radio Sci.* **26** 381
- [17] Barrios A E 1994 *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **42** 90
- [18] Akbarpour R, Webster A R 2005 *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **53** 3785
- [19] Barrios A E, Anderson K D, Lindem G E 2006 *Advanced Propagation Model (APM) Analysis of VHF Signals in the Southern California Desert* Technical Report 1945 San Diego, USA
- [20] Valtr P, Pechac P, Kvicera V, Grabner M A 2010 *Radioengineering* **19** 117
- [21] Zhao X F, Huang S X 2010 *Radioengineering* **19** 601
- [22] Morales J L, Nocedal J 2001 *ACM Trans. on Mathemath. Software* **27** 83
- [23] Yardim C 2007 *Ph. D. Dissertation* (Electrical Engineering, University of California, San Diego, USA)
- [24] Tikhonov A N, Arsenin V Y 1977 *Solutions of ill-posed problems* Winston and Sons, Washington, USA
- [25] Hansen P C, Oleary D P 1993 *Siam J. Sci. Comput.* **14** 1487
- [26] Li Jun, Huang S X 2001 *Sci. Chin. Ser. D* **44** 847
- [27] Kalnay E 2005 *Atmospheric Modeling, Data Assimilation and Predictability* (Beijing: Meteorology Press) (in Chinese) p115 [Kalnay E 2005 大气模式、资料同化和可预报性 (北京:气象出版社) 第 115 页]

Remote sensing of atmospheric refractivity from field measurements of vertical receiver array^{*}

Zhao Xiao-Feng[†] Huang Si-Xun

(*Institute of Meteorology, PLA University of Science and Technology, Nanjing 211101, China*)

(Received 21 December 2010; revised manuscript received 20 January 2011)

Abstract

In this paper we put forward a possibility of refractive index profile retrieval using field measurements at an array of radio receivers through the variational adjoint approach. The derivation of the adjoint model begins with the electromagnetic parabolic equation for a smooth, perfectly conducting surface and horizontal polarization conditions. To deal with the ill-posed difficulties of the inversion, the regularization idea is introduced into the establishment of the cost function. Based on the variational assimilation idea, the retrieval iterative format is constructed. Numerical experiments demonstrate the feasibility of theoretic algorithm for refractivity estimation. However, using the split-step Fourier algorithm to solve the forward model and the adjoint model, the intrinsic error of the solutions will increase with the extension of the propagation range, which reduces the inversion accuracy at long distance propagation. Through adopting a good initial refractivity profile and introducing the background fields in the cost function the inversions could generally be improved.

Keywords: atmospheric refractivity, electromagnetic parabolic equation, variational adjoint approach, regularization

PACS: 92.60.Ta, 78.20.Ci, 02.30.Zz

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 41175025).

[†] E-mail: zxf_best@126.com