

# 输入方波信号的过阻尼谐振子的随机共振\*

陆志新<sup>1)†</sup> 曹力<sup>2)</sup>

1) (湖北汽车工业学院汽车工程系, 十堰 442002)

2) (华中科技大学物理学院, 武汉 430074)

(2010年12月8日收到; 2011年2月25日收到修改稿)

计算了在输入方波信号情况下过阻尼谐振子的输出功率谱和信噪比, 详细讨论了相应的随机共振现象, 并与输入余弦信号情况进行对比. 研究发现: 它们均出现随机共振现象, 且均存在共振和抑制并存的现象. 但这一并存现象, 在两模型中分别出现于不同的共振曲线.

**关键词:** 过阻尼谐振子, 随机共振, 方波信号

**PACS:** 05.40.-a, 05.45.-a

## 1. 引言

在随机共振现象的研究中, 一个十分引人注目的共同研究对象是噪声驱动的线性谐振子. 它是自然界各种现象的最简单的基础模型, 从而也成为各类基本概念的理论典范. 从历史上看, 布朗谐振子的噪声驱动力学早在 65 年前就由 Chandrasekhar 运用朗之万方程和福克-普朗克方程进行了研究<sup>[1]</sup>, 这之后 Chandrasekhar 模型和它的各式各样变形在如今的文献中常常见到<sup>[2,3]</sup>. 例如, 具有涨落频率的谐振子已成为包括物理学、生物学和化学等诸多学科领域的研究对象<sup>[4]</sup>.

近 10 年来, 线性谐振子随机共振的研究进展分为 3 个方面: 1) 线性谐振子的频率涨落引起的随机共振<sup>[5]</sup>; 2) 线性谐振子的阻尼系数涨落引起的随机共振<sup>[6]</sup>; 3) 过阻尼线性谐振子的随机共振<sup>[7]</sup>. 本文侧重研究输入信号为方波时过阻尼谐振子的随机共振现象. 因为现代通讯(例如激光通信)中采用脉冲信号, 而方波信号是一种脉冲信号. 因此本文讨论过阻尼谐振子输入方波信号后的随机共振现象, 并与通常情况下输入余弦信号的过阻尼谐振子的随机共振现象进行比较.

## 2. 模型

阻尼谐振子的运动方程为

$$\ddot{x} = -\gamma\dot{x} - \omega^2 x. \quad (1)$$

其中  $\gamma$  是系统的阻尼系数, 在过阻尼情况, 可忽略惯性项  $\ddot{x}$ , 方程(1)降为一阶常微分方程. 下面考虑两方面涨落的影响, 并引入相应的噪声: 一方面引入加法噪声  $\xi(t)$  反映振子受环境涨落的影响; 另一方面引入乘法噪声  $\eta(t)$ <sup>[8]</sup> 反映振子频率受环境涨落的影响. 两噪声  $\xi(t)$  和  $\eta(t)$  来自同一噪声源, 故相互关联<sup>[9,10]</sup>. 对过阻尼谐振子输入方波信号  $f(t)$ , 得到过阻尼谐振子的无量纲随机动力学模型为

$$\dot{x} = -(\omega^2 + \eta(t))x + \xi(t) + f(t), \quad (2)$$

其中

$$\langle \eta(t) \rangle = \langle \xi(t) \rangle = 0, \quad (3)$$

$$\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = 2Q\delta(t-t'),$$

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2D\delta(t-t'),$$

$$\langle \eta(t)\xi(t') \rangle = \langle \xi(t)\eta(t') \rangle = 2\lambda \sqrt{DQ}\delta(t-t'). \quad (4)$$

式中,  $D$ ,  $Q$  分别为加法和乘法噪声强度,  $\lambda$  为两噪声的关联系数, 其取值范围为  $-1 \leq \lambda \leq 1$ . 设方波信号  $f(t)$  的周期为  $T$ , 具有下列形式:

$$f(t) = \begin{cases} -A & 0 < t \leq \frac{T}{2}, \\ A & \frac{T}{2} < t \leq T. \end{cases} \quad (5)$$

下面研究模型(2)的随机共振, 为此计算输出信噪比. 必须指出, 本文只研究(5)式表示的占空比为 50% 的方波, 主要是和对称性相似的余弦信号输入

\* 国家自然科学基金(批准号: 11045004)资助的课题.

† E-mail: luzhixin6@163.com

作比较. 方波占空比的改变会影响系统的随机共振特性, 例如某些随机共振现象会因占空比的减小而消失, 这些将不在本文中讨论.

### 3. 信噪比

解(2)式可得<sup>[11]</sup>

$$x(t) = x_0 e^{-\int_0^t [\omega^2 + \eta(s)] ds} + e^{-\int_0^t [\omega^2 + \eta(s)] ds} \cdot \int_0^t \xi(\tilde{s}) \times e^{\int_0^{\tilde{s}} [\omega^2 + \eta(s')] ds'} d\tilde{s} + e^{-\int_0^t [\omega^2 + \eta(s)] ds} \times \int_0^t f(\tilde{s}) e^{\int_0^{\tilde{s}} [\omega^2 + \eta(s')] ds'} d\tilde{s}. \quad (6)$$

要求信噪比, 须先求出系统的输出功率谱, 而功率谱则是  $x(t)$  的稳态关联函数的傅里叶变换. 因此, 第一步由(6)式求出  $x(t)$  的关联函数  $\langle x(t)x(t+\tau) \rangle$ , 不失普遍性, 可令  $x_0 = 0$ , 则

$$\begin{aligned} \langle x(t)x(t+\tau) \rangle &= \langle [e^{-\int_0^t [\omega^2 + \eta(s)] ds} \int_0^t \xi(\tilde{s}) \times e^{\int_0^{\tilde{s}} [\omega^2 + \eta(s')] ds'} d\tilde{s} \\ &+ e^{-\int_0^t [\omega^2 + \eta(s)] ds} \times \int_0^t f(\tilde{s}) e^{\int_0^{\tilde{s}} [\omega^2 + \eta(s')] ds'} d\tilde{s}] \\ &\times [e^{-\int_0^{t+\tau} [\omega^2 + \eta(s')] ds'} \int_0^{t+\tau} \xi(\tilde{s}') \\ &\times e^{\int_0^{\tilde{s}'} [\omega^2 + \eta(s'')] ds''} d\tilde{s}' + e^{-\int_0^{t+\tau} [\omega^2 + \eta(s')] ds'} \cdot \int_0^{t+\tau} f(\tilde{s}') \\ &\times e^{\int_0^{\tilde{s}'} [\omega^2 + \eta(s'')] ds''} d\tilde{s}'] \rangle. \quad (7) \end{aligned}$$

第二步, 为了求得信噪比, 须对(7)式进行周期平均, 并令  $t \rightarrow \infty$ , 以获得平稳的关联函数

$$\begin{aligned} C(\tau) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \langle x(t')x(t'+\tau) \rangle dt' \\ &= \frac{D}{2(\omega^2 - Q)} e^{-(\omega^2 - \frac{1}{2}Q)\tau} \\ &+ \frac{\lambda^2 DQ}{(\omega^2 - \frac{1}{2}Q)(\omega^2 - \frac{3}{2}Q)} e^{-Q\tau} \\ &+ 2A\lambda \sqrt{DQ} \left( \frac{e^{-(\omega^2 - Q)T}}{2(\omega^2 - Q)} \right)^2 e^{-(\omega^2 - \frac{1}{2}Q)\tau} \\ &+ \frac{2A^2}{(\omega^2 - \frac{1}{2}Q)(\omega^2 - \frac{3}{2}Q)} (e^{-(\omega^2 - \frac{1}{2}Q)\frac{T}{2}} - 1) \\ &\times (e^{-(\omega^2 - \frac{3}{2}Q)\frac{T}{2}} - 1) (e^{-Q\tau} + 1). \quad (8) \end{aligned}$$

第三步是求输出功率谱. 过阻尼谐振子的输出功率谱  $S(\tilde{\omega})$  可由  $C(\tau)$  通过付里叶变换求出

$$S(\tilde{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\tau) e^{-i\tilde{\omega}\tau} d\tau. \quad (9)$$

最后一步是求信噪比. 为此, 对  $S(\tilde{\omega})$  作如下分解, 并只取正频:

$$S(\tilde{\omega}) = S_1(\tilde{\omega}) + S_2(\tilde{\omega}), \quad (10)$$

其中, 输出信号功率谱

$$\begin{aligned} S_1(\tilde{\omega}) &= 2\lambda A \sqrt{DQ} \left( \frac{e^{(\omega^2 - Q)T}}{2(\omega^2 - Q)} \right)^2 \frac{2(\omega^2 - \frac{1}{2}Q)}{\tilde{\omega}^2 + (\omega^2 - \frac{1}{2}Q)^2} \\ &+ \frac{2A^2}{(\omega^2 - \frac{1}{2}Q)(\omega^2 - \frac{3}{2}Q)} (e^{(\omega^2 - \frac{1}{2}Q)\frac{T}{2}} - 1) \\ &\times (e^{(\omega^2 - \frac{3}{2}Q)\frac{T}{2}} - 1) \frac{2Q}{\tilde{\omega}^2 + Q^2}. \quad (11) \end{aligned}$$

输出噪声功率谱

$$\begin{aligned} S_2(\tilde{\omega}) &= \frac{D}{2(\omega^2 - Q)} \frac{2(\omega^2 - \frac{1}{2}Q)}{(\omega^2 - \frac{1}{2}Q)^2 + \tilde{\omega}^2} \\ &+ \frac{\lambda^2 DQ}{(\omega^2 - \frac{1}{2}Q)(\omega^2 - \frac{3}{2}Q)} \frac{2Q}{\tilde{\omega}^2 + Q^2}. \quad (12) \end{aligned}$$

输出信号总功率

$$\begin{aligned} P_s &= \int_0^{\infty} S_1(\tilde{\omega}) d\tilde{\omega} \\ &= \pi\lambda A \sqrt{DQ} \left( \frac{e^{(\omega^2 - Q)T}}{2(\omega^2 - Q)} \right)^2 \\ &+ \frac{\pi A^2}{(\omega^2 - \frac{1}{2}Q)(\omega^2 - \frac{3}{2}Q)} \\ &\times (e^{(\omega^2 - \frac{1}{2}Q)\frac{T}{2}} - 1) (e^{(\omega^2 - \frac{3}{2}Q)\frac{T}{2}} - 1). \quad (13) \end{aligned}$$

输出噪声总功率

$$\begin{aligned} N_s &= \int_0^{\infty} S_2(\tilde{\omega}) d\tilde{\omega} \\ &= \frac{\pi D}{4(\omega^2 - Q)} + \frac{\pi\lambda^2 DQ}{2(\omega^2 - \frac{1}{2}Q)(\omega^2 - \frac{3}{2}Q)}. \quad (14) \end{aligned}$$

信噪比  $R_s$  定义为输出信号总功率  $P_s$  与输出噪声总功率  $N_s$  之比<sup>[12]</sup>, 即

$$R_s = \frac{P_s}{N_s} = \frac{\frac{\lambda A}{4} \sqrt{DQ} \left( \frac{e^{(\omega^2 - Q)T}}{(\omega^2 - Q)} \right)^2 + \frac{A^2}{\left(\omega^2 - \frac{1}{2}Q\right)\left(\omega^2 - \frac{3}{2}Q\right)} (e^{(\omega^2 - \frac{1}{2}Q)\frac{T}{2}} - 1)(e^{(\omega^2 - \frac{3}{2}Q)\frac{T}{2}} - 1)}{\frac{D}{4(\omega^2 - Q)} + \frac{\lambda^2 DQ}{2\left(\omega^2 - \frac{1}{2}Q\right)\left(\omega^2 - \frac{3}{2}Q\right)}}. \quad (15)$$

#### 4. 输入方波信号的过阻尼谐振子的随机共振

信噪比  $R_s$  随加法噪声强度  $D$ , 噪声关联系数  $\lambda$  及信号参数  $A$  和  $T$  的变化不出现共振峰或抑制谷, 故未予画图讨论. 下面从乘法噪声强度  $Q$ 、谐振子频率  $\omega$  两方面进行讨论.

1) 信噪比  $R_s$  随乘法噪声强度  $Q$  的变化:  $R_s$ - $Q$  曲线. 为了更好地比较  $A, T, D, \omega$  及  $\lambda$  各参数的改变对随机共振特性的影响, 采用基准参数和基准参数曲线的概念. 图 1 为信噪比随乘法噪声强度变化的曲线. 基准参数为  $\lambda = 1, D = 1, T = 0.001, A = 2, \omega = 1.7$ . 分别改变参数  $A, T, D, \omega$  及  $\lambda$  的值画出图 1 的 5 个分图. 每个分图中都有一条基准参数曲线, 它就是对应于基准参数的  $R_s$ - $Q$  曲线. 每个分图都只改变基准参数中的一个参数, 从而便于看出这时曲线与基准参数曲线的差别, 便于了解随机共振特性的变化. 改变方波振幅  $A$  画出信噪比  $R_s$  随乘法噪声强度  $Q$  的变化曲线如图 1(a) 所示. 可以看出曲线出现一共振峰, 且随着信号振幅  $A$  的增大, 共振峰升高并变尖锐, 但极值位置不变. 改变方波周期  $T$  画出  $R_s$ - $Q$  曲线, 也出现随机共振, 如图 1(b) 所示, 随  $T$  值变大, 峰变高而峰的位置左移. 改变振动频率  $\omega$  画出  $R_s$ - $Q$  曲线如图 1(c) 所示, 曲线也存在共振峰, 且每两个不同振动频率的共振曲线会相交, 在交点的两侧,  $R_s$  随参数的改变而变化的趋势相反. 在交点左侧,  $R_s$  随  $\omega$  的增大而减小, 在交点右侧,  $R_s$  随  $\omega$  的增大而增大. 改变  $\lambda$  画出的  $R_s$ - $Q$  曲线, 也有类似的交点, 在交点的左侧,  $R_s$  随  $\lambda$  的减小而减小, 而在交点的右侧,  $R_s$  随  $\lambda$  的减小而增大, 如 1(d) 所示.

改变  $D$  画出的  $R_s$ - $Q$  曲线如图 1(e) 所示. 它表明曲线存在一共振峰, 峰高随  $D$  的减小而升高, 但峰的位置不变.

2) 信噪比  $R_s$  随振子频率  $\omega$  的变化:  $R_s$ - $\omega$  曲线. 以  $A$  为参数的  $R_s$ - $\omega$  曲线, 如图 2 所示. 曲线显示, 信噪比  $R_s$  随振子频率  $\omega$  的变化, 不但会出现共振峰, 而且还会出现抑制现象. 随着  $A$  的增大, 峰变高, 而谷变深. 以  $\lambda, Q, D, T$  为参数的  $R_s$ - $\omega$  曲线也表现出类似现象, 先共振后抑制, 为节省篇幅, 图略.

#### 5. 输入余弦信号的过阻尼谐振子的随机共振

过去研究随机共振输入的都是余弦信号. 现在根据实际情况输入方波信号. 这两种不同信号输入的随机共振会有什么异同呢? 下面对过阻尼谐振子输入余弦信号, 计算其信噪比  $R_c$ , 并与输入方波信号时的信噪比  $R_s$  进行比较, 分析这两种信号输入情况下, 相应的随机共振模型为

$$\dot{x} = -[\omega^2 + \eta(t)]x + \zeta(t) + A \cos \omega t, \quad (16)$$

相应的信噪比

$$R_c = \frac{P_c}{N_c}. \quad (17)$$

其中

$$P_c = \frac{\pi A^2 [(\omega^2 - Q/2)(\omega^2 - 3Q/2) + \Omega^2 - \Omega Q]}{2[(\omega^2 - Q/2)^2 + \Omega^2][(\omega^2 - 3Q/2)^2 + \Omega^2]}, \quad (18)$$

$$N_c = \frac{\pi D}{4(\omega^2 - Q)} + \frac{\pi \lambda^2 DQ}{2(\omega^2 - Q/2)(\omega^2 - 3Q/2)}. \quad (19)$$

下面只以  $\lambda$  为影响参数讨论信噪比  $R_c$  随乘法噪声

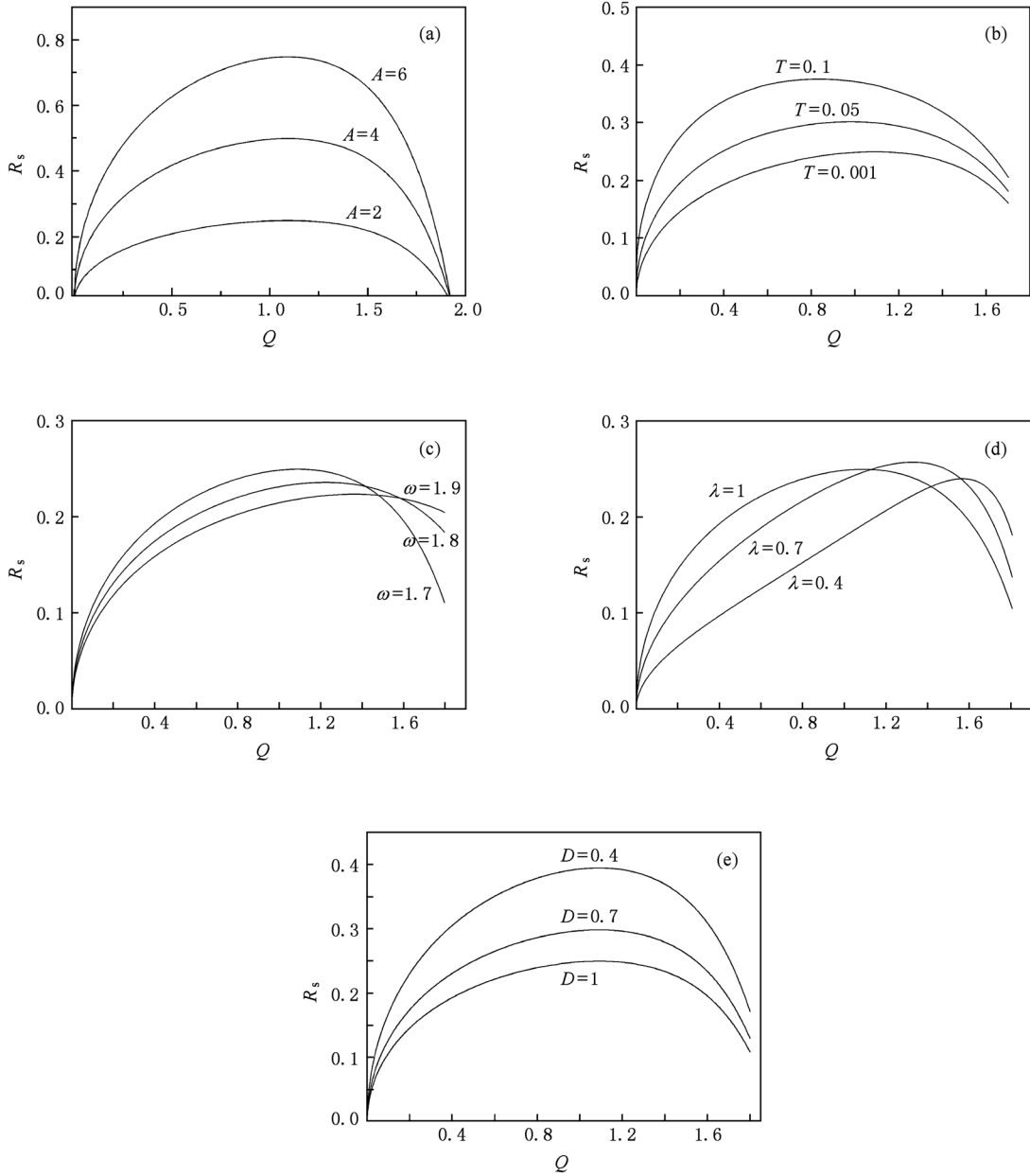


图1 信噪比  $R_s$  随乘法噪声强度  $Q$  变化的曲线. 基准参数值为:  $\lambda = 1, D = 1, A = 2, T = 0.001, \omega = 1.7$ . (a)  $A = 2, 4, 6$ ; (b)  $T = 0.001, 0.5, 0.1$ ; (c)  $\omega = 1.7, 1.8, 1.9$ ; (d)  $\lambda = 1, 0.7, 0.4$ ; (e)  $D = 1, 0.7, 0.4$

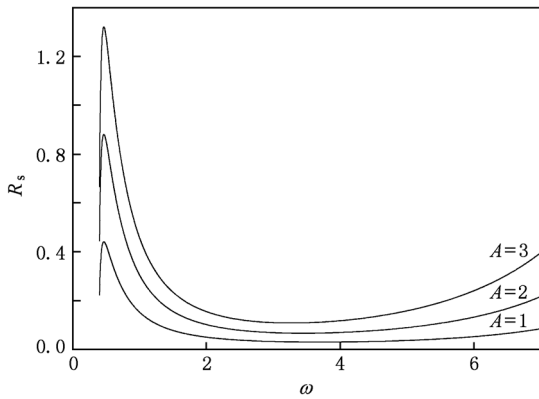


图2 信噪比  $R_s$  随振子频率  $\omega$  变化的曲线. 参数值:  $Q = 0.1, T = 0.03, D = 1$  和  $\lambda = 1$

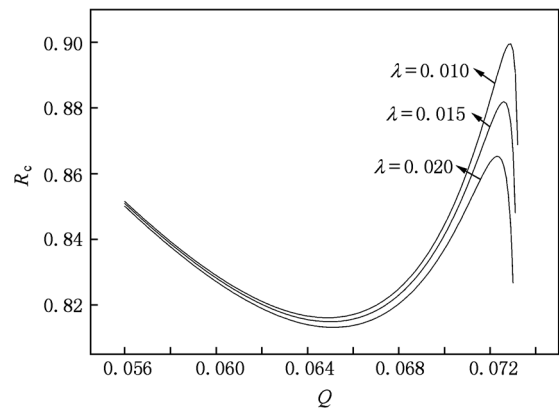


图3 信噪比  $R_c$  随乘法噪声强度  $Q$  变化的曲线. 参数值:  $A = 2, D = 1, \Omega = 0.1, \omega = 0.33$

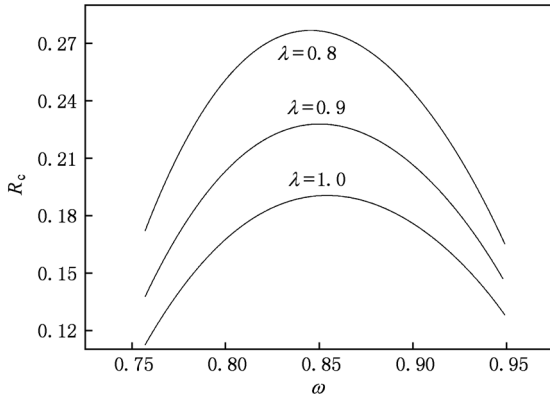


图4 信噪比  $R_c$  随振子频率  $\omega$  变化的曲线. 参数值:  $A = 2, D = 1, \Omega = 1$  和  $Q = 1$

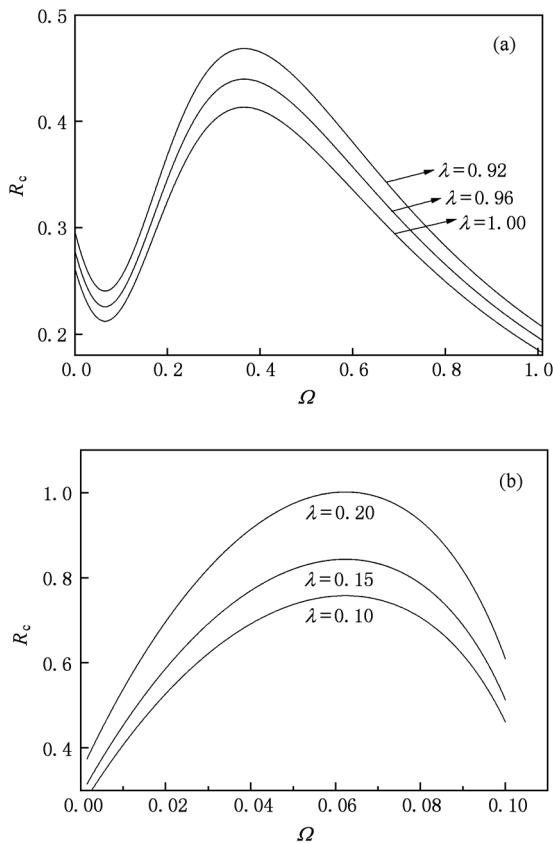


图5 信噪比  $R_c$  随信号频率  $\Omega$  变化的曲线. 参数值:  $A = 2, D = 1, Q = 0.1$ . (a)  $\omega = 0.5$ ; (b)  $\omega = 0.35$

强度  $Q$ , 振子频率  $\omega$  和输入信号频率  $\Omega$  三个方面的变化. 其他相关参数  $Q, D, T, A$  对信噪比  $R_c$  随  $Q, \omega, \Omega$  变化的影响定性相同, 为节省篇幅, 未予画图讨论, 这样做不影响本文中两类模型相比较的结论.

1) 图3是  $R_c-Q$  曲线, 从图可以看出存在两个极值, 一个共振峰和一个抑制谷.  $\lambda$  值减小, 共振峰变高, 抑制谷变浅.

2) 图4是  $R_c-\omega$  曲线, 存在共振峰, 随着  $\lambda$  减小, 峰变高, 极值位置左移.

3)  $R_c-\Omega$  曲线如图5所示, 改变参数  $\omega, R_c-\Omega$  曲线有两种不同的形式.  $\omega$  在0.5附近和大  $\lambda$  值时, 曲线有峰有谷, 且随着  $\lambda$  值减小, 峰变高, 谷也上抬.  $\omega$  在0.35附近和较小  $\lambda$  值时, 曲线只有一极大值, 随着  $\lambda$  值减小, 峰值降低.

## 6. 两模型随机共振的比较

1) 不论输入方波信号还是输入余弦信号, 均会出现随机共振现象.

2) 两种信号输入都会出现具有两个极值的随机共振曲线. 说明均会产生共振与抑制并存的现象. 所不同的在于, 方波信号输入时, 是在信噪比随振子频率变化过程中出现这一并存现象. 而余弦信号输入时, 则是在信噪比随乘法噪声强度的变化过程中出现共振和抑制现象. 此外, 余弦信号输入时, 信噪比随信号频率变化也会出现此现象.

3) 方波信号输入时独特的现象是, 在信噪比随乘法噪声强度变化的过程中, 对  $\omega$  不同取值的  $R_s-Q$  曲线会相交. 物理就是在交点的两侧,  $R_s$  的大小随曲线对应的参数变化的趋势正好相反. 对应于参数  $\lambda$  不同取值的  $R_s-Q$  曲线, 也有类似的相交现象.

[1] Chandrasekhar 1943 *Rev. Mod. Phys.* **15** 1  
 [2] Liu L, Zhang L Y, Cao L 2009 *Chin Phys. B* **18** 4182  
 [3] Chen D Y, Wang Z L 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 111 (in Chinese) [陈德彝、王忠龙 2010 物理学报 **59** 111]

[4] Liu L, Wu D J 2009 *College Physics* **16** 28 (in Chinese) [刘立、吴大进 2009 大学物理 **16** 28]  
 [5] Gitterman M 2003 *Phys. Rev. E* **67** 057103  
 [6] Gitterman M 2004 *Phys. Rev. E* **69** 041101

- [7] Zhang L, Liu L, Cao L 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1494 (in Chinese) [张莉、刘立、曹力 2010 物理学报 **59** 1494]
- [8] Jin Y F, Hu H Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2895 (in Chinese) [靳艳飞、胡海岩 2009 物理学报 **58** 2895]
- [9] Zhang L, Cao L 2010 *Chin. Phys. Lett.* **27** 060504
- [10] Cao L, Wu D J 2007 *Int. J. Mod. Phys. B* **21** 1721
- [11] Arnold L 1974 *Stochastic Defferential Equations: Theory and Applications* (New York: Willy-Interscience Publication)
- [12] Cao L, Wu D J 2007 *Physica A* **376** 191

## Stochastic resonance of square wave signal in an overdamped harmonic oscillator\*

Lu Zhi-Xin<sup>1)†</sup> Cao Li<sup>2)</sup>

1) (Department of Automobile Engineering, Hubei University of Automotive Technology, Shiyan 442002, China)

2) (School of Physics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

(Received 8 December 2010; revised manuscript received 25 February 2011)

### Abstract

The output power and the signal-to-noise ratio of an overdamped harmonic oscillator are calculated in the case of square wave signal input. The corresponding stochastic resonance phenomenon and the comparison with the case of cosine signal input are discussed. Results reveal that there appear the stochastic resonances in these two cases, and the phenomenon in which the resonance and suppression are coexistent, but the coexistence phenomenon appears in the different stochastic resonance curves for these two models.

**Keywords:** overdamped harmonic oscillator, stochastic resonance, square wave signal

**PACS:** 05.40.-a, 05.45.-a

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11045004).

† E-mail: luzhixin6@163.com