Hénon 混沌系统广义预测函数控制快速收敛算法

刘文龙[1)†] 庞双杰[2)] 张继峰[1)]
1)(东北石油大学秦皇岛分校,秦皇岛 066004)
2)(秦皇岛职业技术学院,秦皇岛 066100)

(2011 年 1 月 6 日收到;2011 年 2 月 27 日收到修改稿)

提出一种具有收敛跟踪性能的 Hénon 混沌系统广义预测函数控制快速算法. 基于已有的广义预测函数控制方法,依据混沌系统运动特性和实际中控制量变化趋势选取特殊形式的基函数,避免了控制律中的矩阵求逆计算,并在性能指标函数中引入确定的前馈增益矩阵,实现 Hénon 混沌系统对参考信号的收敛跟踪. 仿真结果验证了该算法的有效性.

关键词: 广义预测控制, 预测函数控制, Hénon 混沌系统, 前馈增益矩阵
PACS: 05.45.Gg

1. 引 言

混沌是非线性系统中出现的一种类似随机、貌似无规则的特有运动行为. 随着混沌系统理论研究的不断深入,混沌系统的控制问题备受人们的关注,成为非线性科学研究领域极其活跃的前沿课题. 考虑混沌控制[1—4]研究的复杂性,现有研究成果多数都是基于 Hénon[5], Lorenz[6], Chua[7] 等特定形式的混沌系统得到的.

广义预测控制[8,9]是随着自适应控制研究而发展起来的一种新型计算机控制算法. 它具有自适应控制的在线辨识和预测控制的滚动优化双重优点,比自适应控制更具鲁棒性和实用性,成为解决工业控制问题的有效方法. 预测函数控制[10]与广义预测控制的本质区别在于其将控制规律结构化,认为控制输入是若干个事先依据被控对象特性以及参考轨迹所选定的基函数的线性组合,通过优化性能指标函数求出线性组合系数,便可得到相应的控制量. 文献[11]将预测函数控制方法融入广义预测控制中,提出一种 Hénon 混沌系统自适应预测函数控制快速算法,避免了矩阵求逆计算,有效地实现系统对参考信号的快速跟踪,但没有对系统的跟踪收敛性进行分析. 本文在文献[11]算法的基础上,通过选取特殊形式的基函数以及引入满足确定条件的前馈增益矩阵,提出一种能够确保系统跟踪参考信号收敛的 Hénon 混沌系统广义预测函数控制快速算法.

2. Hénon 混沌系统的模型辨识

Hénon 混沌系统所表现出来的非线性运动特性很难用线性定常模型精确描述. 为提高建模精度,实现混沌系统的有效控制,本文采用具有时变参数的受控自回归积分滑动平均(CARIMA)模型在线辨识 Hénon 混沌系统. 考虑 Hénon 混沌系统动态特性变化的不平稳性,以及参数估计中误差协方差矩阵 $\boldsymbol{P}(k)$ 由于信息量减少而按指数增加,这里选取自动调整遗忘因子的递推最小二乘方法来辨识混沌系统.

考虑如下 CARIMA 模型:

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k-1) + C(z^{-1})\xi(k)/\Delta, \qquad (1)$$

其中

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_{n_a} z^{-n_a},$$
$$B(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_{n_b} z^{-n_b},$$
$$C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \cdots + c_{n_c} z^{-n_c},$$

y 和 u 分别为系统的输出与输入, ξ 为均值为零、方

† E-mail: liuwenlong1980@126.com

差为 σ^2 的白噪声, $\Delta = 1 - z^{-1}$ 为差分算子. 为了突出算法原理,假设 $C(z^{-1}) = 1$.

将(1)式改写为

$$\Delta y(k) = -A_1(z^{-1})\Delta y(k) + B(z^{-1})\Delta u(k-1) + \xi(k), \tag{2}$$

其中, $A_1(z^{-1}) = A(z^{-1}) - 1$. 令

$$\boldsymbol{\theta} = [a_1 \quad \cdots \quad a_{n_a} \quad b_0 \quad \cdots \quad b_{n_b}]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\varphi}(k) = [-\Delta y(k-1) \quad \cdots \quad -\Delta y(k-n_a) \quad \Delta u(k-1) \quad \cdots \quad \Delta u(k-n_b-1)]^{\mathrm{T}},$$

则可将(2)式写成最小二乘格式

$$\Delta y(k) = \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{\theta} + \xi(k). \tag{3}$$

选取初始条件为: $\hat{\boldsymbol{\theta}}(-1) = \boldsymbol{0}$ ($\boldsymbol{0}$ 为零向量), $\boldsymbol{P}(-1) = \tau^2\boldsymbol{I}$ (τ 为一个充分大的正数, $\boldsymbol{I}$ 为单位阵). 自动调整遗忘因子递推最小二乘算法[11,12]为

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) + \boldsymbol{K}(k)[\Delta y(k) - \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)], \tag{4}$$

$$\boldsymbol{P}(k) = \frac{1}{\mu(k)}[\boldsymbol{P}(k-1) - \boldsymbol{K}(k)\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}(k-1)], \tag{5}$$

$$\boldsymbol{K}(k) = \boldsymbol{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k)[\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k) + \mu(k)]^{-1}, \tag{6}$$

$$\mu(k) = 1 - \frac{[\Delta y(k) - \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)]^2}{\sigma^2 L} \times \left[1 - \frac{\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k-l)\boldsymbol{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k-l)}{1 + \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k-l)\boldsymbol{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k-l)}\right], \tag{7}$$

其中, σ^2 为量测噪声方差, L 为数据长度, l 为遗忘步长, $\mu(k) \in (0,1]$ 为可自动调整的遗忘因子.

3. 广义预测函数控制快速收敛算法

3.1. 算法设计

广义预测控制采用模型(1)式描述被控对象. 通过引入并求解 Diophantine 方程,得到系统输出预测方程为

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{GU} + \boldsymbol{F}y(k) + \boldsymbol{H}\Delta u(k-1), \tag{8}$$

其中,字母符号意义与参考文献[11]相同.

为了得到收敛跟踪的广义预测函数控制算法,选取性能指标函数为

$$\min J(k) = E\left\{\sum_{j=1}^{N}[y(k+j\mid k) - \beta_j y_r(k+j)]^2 + \lambda\sum_{i=1}^{N_u}[\Delta u(k+i-1)]^2\right\}, \tag{9}$$

其中, $E\{\cdot\}$ 表示取数学期望值; $y_r(k+j)$ 为对象输出期望值; β_j 为前馈增益; λ 为控制增量加权系数; N 和 N_u 分别为预测时域与控制时域.

将(9)式写成向量形式为

$$\min J = E\{[(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{\beta Y}_r)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{\beta Y}_r)] + \lambda\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}\}, \tag{10}$$

其中, $\boldsymbol{\beta} = \mathrm{diag}\{\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_N\}$ 为前馈增益矩阵; $\boldsymbol{Y}_r = [y_r(k+1) \quad y_r(k+2) \quad \cdots \quad y_r(k+N)]^{\mathrm{T}}$ 为期望输出矩阵.

引入预测函数控制方法,将控制量表示为若干已知基函数的线性组合形式[10],即

$$u(k+i-1) = \sum_{n=1}^{q}\alpha_n f_n(i-1) \quad (i = 1,\cdots,N_u), \tag{11}$$

其中, α_n 为线性组合系数; $f_n(i-1)$ 表示第 n 个基函数在 $t = (i-1)T$ 时刻的值; q 为基函数的个数. 考虑 Hénon 混沌系统的运动特性以及算法的快速性,并兼顾实际控制中控制增量呈现出的衰减趋势,选取如下两个基函数:

$$f_1(i-1) = u(k-1), \tag{12}$$

$$f_2(i-1) = \sum_{m=0}^{i-1} d^m, \tag{13}$$

其中, $d \in [0,1]$ 为可调参数. 令 $\alpha_1 = 1$, 控制量表示为

$$u(k+i-1) = u(k-1) + \alpha_2\sum_{m=0}^{i-1} d^m, \tag{14}$$

经过推导,控制增量 $\Delta u(k+i-1)$ 与控制增量矩阵 $\boldsymbol{U}$ 可表示为

$$\Delta u(k+i-1) = u(k+i-1) - u(k+i-2) = \alpha_2 d^{i-1}, \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U} &= [1 \quad d \quad d^2 \quad \cdots \quad d^{N_u-1}]^{\mathrm{T}}\alpha_2 \\ &= [1 \quad d \quad d^2 \quad \cdots \quad d^{N_u-1}]^{\mathrm{T}}\Delta u(k) \\ &= \boldsymbol{Q}\Delta u(k).\end{aligned} \tag{16}$$

将(8)式和(16)式代入(10)式,令其对 $\Delta u(k)$ 求导等于0,得到预测控制律为

$$\Delta u(k) = [\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M} + \lambda\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}]^{-1}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}} \times [\boldsymbol{\beta Y}_r - \boldsymbol{F}y(k) - \boldsymbol{H}\Delta u(k-1)], \tag{17}$$

其中, $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{GQ}$.

由控制律(17)式可知, $\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M} + \lambda\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}$ 为标量,避免了常规广义预测控制中高维的矩阵求逆,有效

减少了计算量,确保了控制算法的快速性.

3.2. 收敛性分析

对象的期望输出信号通常取为系统的参考信号,并且期望输出矩阵 $\boldsymbol{Y}_r$ 总可以表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Y}_r &= \boldsymbol{\Phi} r \\ &= [\,y_r(k+1)/y_r(k) \quad y_r(k+2)/y_r(k) \quad \cdots \\ &\qquad y_r(k+N)/y_r(k)\,]^{\mathrm{T}} r,\end{aligned} \tag{18}$$

其中,$\boldsymbol{\Phi}$ 为 k 时刻存在的确定系数向量;$r = y_r(k)$. 显然,当参考信号为恒值时,系数向量 $\boldsymbol{\Phi} = [1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1]^{\mathrm{T}}$,$r$ 为参考信号值.

定理 1 若模型多项式 $A(z^{-1})$,$B(z^{-1})$ 的系数有界,对象期望输出矩阵 $\boldsymbol{Y}_r$ 用(18)式表示,并在任意时刻 k 处,选取 $\beta_j = \left.\dfrac{F_j(z^{-1})}{y_r(k+j)/y_r(k)}\right|_{z=1}$,则(17)式控制律与(1)式对象模型所构成的闭环控制系统具有如下性质:$\lim\limits_{k\to\infty} E\{y(k) - r\} = 0$,即系统收敛.

证明 将(17)式代入(1)式,得

$$\begin{aligned}y(k) &= \frac{z^{-1}B(z^{-1})\boldsymbol{T\beta Y}_r}{(1+z^{-1}\boldsymbol{TH})A(z^{-1})\Delta + z^{-1}B(z^{-1})\boldsymbol{TF}} \\ &\quad + \frac{(1+z^{-1}\boldsymbol{TH})\xi(k)}{(1+z^{-1}\boldsymbol{TH})A(z^{-1})\Delta + z^{-1}B(z^{-1})\boldsymbol{TF}},\end{aligned} \tag{19}$$

其中,$\boldsymbol{T} = [\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M} + \lambda \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}]^{-1}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}$.

由 $\beta_j = \left.\dfrac{F_j(z^{-1})}{y_r(k+j)/y_r(k)}\right|_{z=1}$ 可知,

$$\boldsymbol{\beta\Phi} = \boldsymbol{F}\,|_{z=1}. \tag{20}$$

将(18)式、(19)式和(20)式代入 $\lim\limits_{k\to\infty} E\{y(k) - r\}$,得

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} E\{y(k) - r\} &= \lim_{k\to\infty} E\left\{\frac{z^{-1}B(z^{-1})\boldsymbol{T\beta\Phi} r}{(1+z^{-1}\boldsymbol{TH})A(z^{-1})\Delta + z^{-1}B(z^{-1})\boldsymbol{TF}}\right\} \\ &\quad + \lim_{k\to\infty} E\left\{\frac{(1+z^{-1}\boldsymbol{TH})\xi(k)}{(1+z^{-1}\boldsymbol{TH})A(z^{-1})\Delta + z^{-1}B(z^{-1})\boldsymbol{TF}}\right\} - \lim_{k\to\infty} E\{r\} \\ &= \left.\frac{z^{-1}B(z^{-1})\boldsymbol{T\beta\Phi} r}{(1+z^{-1}\boldsymbol{TH})A(z^{-1})\Delta + z^{-1}B(z^{-1})\boldsymbol{TF}}\right|_{z=1} - r = 0.\end{aligned} \tag{21}$$

至此,定理 1 证毕.

推论 1 若参考信号为恒值,模型多项式 $A(z^{-1})$,$B(z^{-1})$ 的系数有界,对象期望输出矩阵 $\boldsymbol{Y}_r$ 用(18)式表示,选取 $\beta_j = F_j(z^{-1})\,|_{z=1}$,则有 $\lim\limits_{k\to\infty} E\{y(k) - r\} = 0$,即系统收敛.

证明 当参考信号为恒值时,$\boldsymbol{\Phi} = [1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1]^{\mathrm{T}}$,将其代入定理 1 的证明过程,就会证得 $\lim\limits_{k\to\infty} E\{y(k) - r\} = 0$. 至此,推论 1 证毕.

由定理 1 及其推论可知,只要在每一时刻均选取 $\beta_j = \left.\dfrac{F_j(z^{-1})}{y_r(k+j)/y_r(k)}\right|_{z=1}$,就可实现系统对任意形式参考信号的收敛性跟踪. 特殊地,选取 $\beta_j = F_j(z^{-1})\,|_{z=1}$,可实现系统对恒值参考信号的收敛跟踪.

4. 仿真研究

Hénon 混沌系统描述为

$$\begin{aligned}x_1(k+1) &= x_2(k), \\ x_2(k+1) &= 1 + bx_1(k) - a(x_2(k))^2 + u(k),\end{aligned} \tag{22}$$

其中,系统参数 $a = 1.4$,$b = 0.3$,控制信号 $u(k) = 0$ 时,系统处于混沌状态.

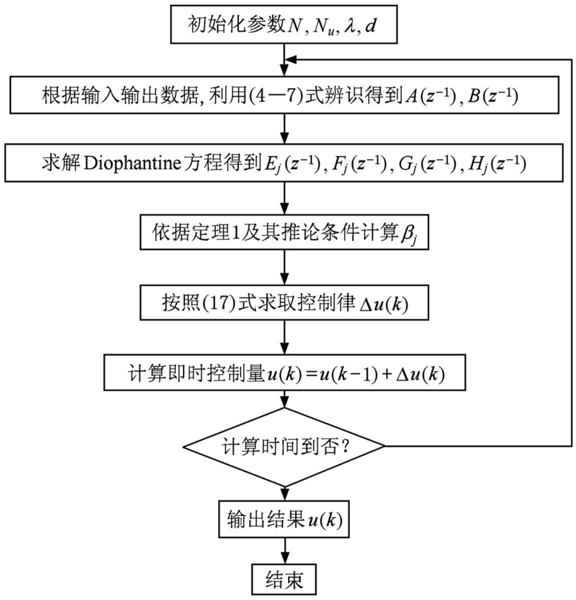

图1 算法程序流程图

选取控制器参数 $N=5$, $N_u=3$, $\lambda=1$. 在预测基函数可调参数 d 取不同值的情况下,按照图 1 所示的算法实现流程编写 Matlab 软件程序对 Hénon 混沌系统中 $x_1(k)$ 分量跟踪参考信号 $y_r(k)=\sin(k)$ 与 $y_r(k)=1$ 进行仿真研究,部分仿真结果如图 2—4 所示.

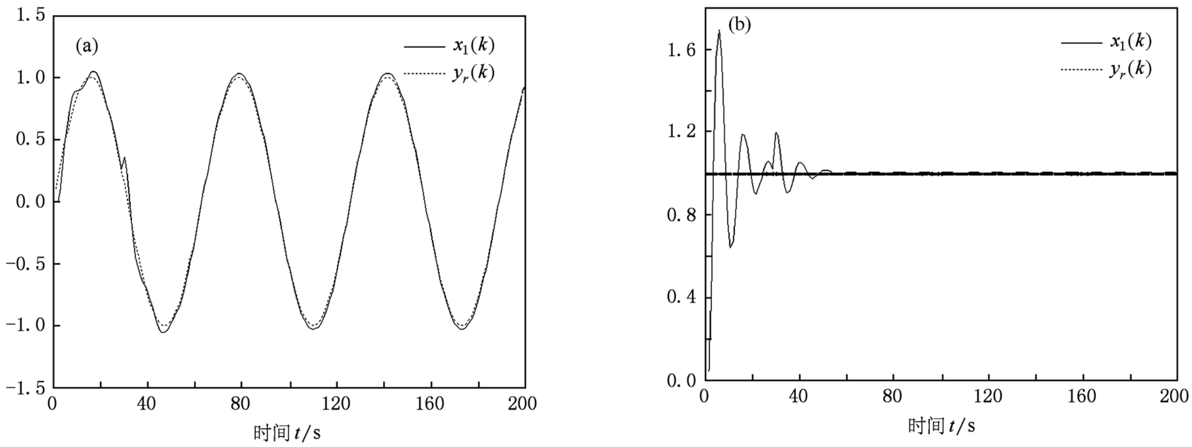

图 2　$d=0.4$ 时控制输出曲线

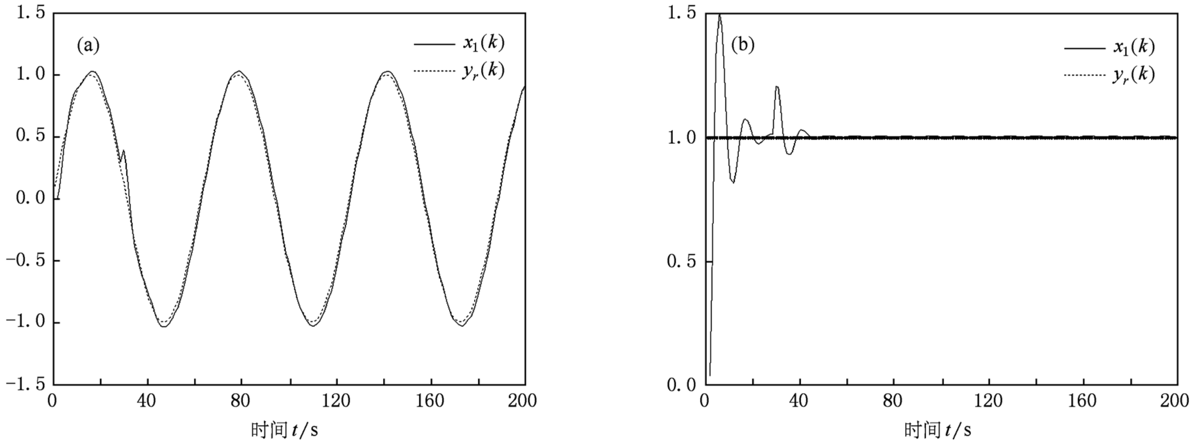

图 3　$d=0.6$ 时控制输出曲线

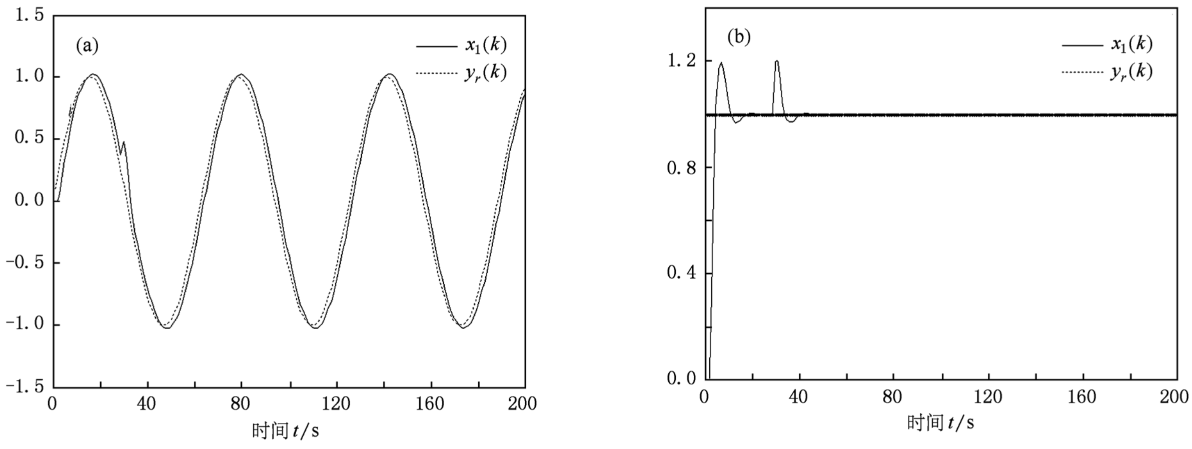

图 4　$d=0.9$ 时控制输出曲线

从图 2—4 可以看出,本文算法能够确保 Hénon 混沌系统跟踪参考信号收敛,并且具有良好的跟踪效果. 此外,随着 d 取值的增大,系统抑制超调的能力增强. 经过大量仿真和计算得出,对于 $y_r(k) = 1$ 情况, d 从 0.4 增大到 0.9 时,超调量从 69% 降低到 20% ;从动、稳态两方面综合考虑控制效果时,对于 $y_r(k) = \sin(k)$ 与 $y_r(k) = 1$ 两种情况, d 的最佳取值范围分别为[0.5,0.7]和[0.7,0.9].

选择与上述相同的参考信号和控制器参数 N, N_u 和 λ, 得到文献[11]算法的仿真结果如图 5 所示. 比较仿真结果并通过计算得出,当 d 选取最佳范围值时,本文算法跟踪效果优于文献[11]算法.

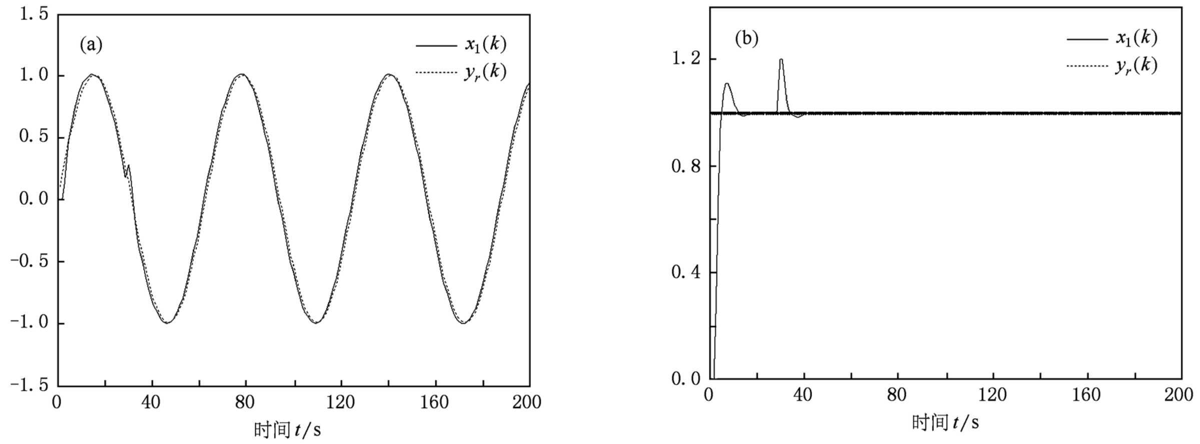

图 5　文献[11]算法控制输出曲线

5. 结　论

本文提出一种 Hénon 混沌系统广义预测函数控制快速收敛算法,相比文献[11]做了如下改进与创新:1) 从 Hénon 混沌系统运动特性以及实际控制中控制量变化趋势出发选取特殊形式的基函数,不但使基函数选择更加合理,而且避免了矩阵求逆运算,提高了算法的快速性;2) 通过引入满足定理 1 及其推论的前馈增益矩阵,实现系统对任意形式参考信号的收敛跟踪,并且具有更佳的跟踪效果.

[1] Zhang Y W, Qin S J, Hesketh T 2009 *Chao. Sol. Frac.* **39** 1463
[2] Zhu S P, Qian F C, Liu D 2010 *Chin. Phys.* B **19** 2250
[3] Yan X M, Liu D, Guo H J 2010 *Control Theory & Appl.* **27** 344 (in Chinese) [阎晓妹、刘　丁、郭会军 2010 控制理论与应用 **27** 344]
[4] Wu R C, Guo Y X 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 5293 (in Chinese) [吴然超、郭玉祥 2010 物理学报 **59** 5293]
[5] Liu F C, Liang X M, Song J Q 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1458 (in Chinese) [刘福才、梁晓明、宋佳秋 2008 物理学报 **57** 1458]
[6] Sun K H, Yang J L, Ding J F, Sheng L Y 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 8385 (in Chinese) [孙克辉、杨静利、丁家峰、盛利元 2010 物理学报 **59** 8385]
[7] Meng J, Wang X Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 819 (in Chinese) [孟　娟、王兴元 2009 物理学报 **58** 819]
[8] Wang Y Q, Zhou D H, Gao F R 2009 *J. Proc. Cont.* **19** 803
[9] Ding B C 2008 *Predictive Control Theory and Methods* (Beijing: China Machine Press) p54 (in Chinese) [丁宝苍 2008 预测控制的理论与方法(北京:机械工业出版社) 第 54 页]
[10] Shen G L, Zhao J, Qian J X 2008 *J. Chem. Indus. Engin.* **59** 118 (in Chinese) [沈国良、赵　均、钱积新 2008 化工学报 **59** 118]
[11] Wen S H 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 5209 (in Chinese) [温淑焕 2009 物理学报 **58** 5209]
[12] Li Y J, Zhang K 2009 *System Identification Theory and Applications* (Beijing: National Defense Industry Press) p114 (in Chinese) [李言俊、张　科 2009 系统辨识理论及应用(北京:国防工业出版社) 第 114 页]

A fast algorithm with convergence for generalized predictive function control of Hénon chaotic system

Liu Wen-Long[1)†] Pang Shuang-Jie[2)] Zhang Ji-Feng[1)]

1) (*Northeast Petroleum University at Qinhuangdao, Qinhuangdao* 066004, *China*)

2) (*Qinhuangdao Institute of Technology, Qinhuangdao* 066100, *China*)

(Received 6 January 2011; revised manuscript received 27 February 2011)

Abstract

A kind of fast generalized predictive function control algorithm with convergence of tracking for Hénon chaotic system is proposed. First, based on the existing generalized predictive function control algorithm, the matrix inversion computation in the control law is avoided because special basis functions are selected according to the motion characteristics of chaotic system and the change trend of practical control input. Then, by introducing the determinate feedforward gain matrix into performance index function, it is convergent that the output of Hénon chaotic system follows reference signal. The simulated results show the effectiveness of this algorithm.

Keywords: generalized predictive control, predictive function control, Hénon chaotic system, feedforward gain matrix

PACS: 05.45.Gg

† E-mail: liuwenlong1980@126.com